

原地生成宇宙成因核素测年技术思考(二): 持续抬升区单样品直接计算抬升速率方法

黄费新¹,李岩¹,李广伟²,董国成^{3,4},程杨¹,赵亮亮¹

(1. 中国冶金地质总局矿产资源研究院,北京 101300;2. 南京大学地球科学与工程学院,江苏南京 210023;3. 中国科学院地球环境研究所,陕西西安 710061;4. 西安加速质谱中心,陕西西安 710061)

[摘要] 原地生成宇宙成因核素测年技术在计算暴露年龄和侵蚀速率时,一直默认样品所在位置不随时间发生高程变化,从而核素生成速率不因高程变化而改变。在构造稳定区,这样的假设是合理的。在构造活动区,往往会因构造运动,地表样品高程发生改变;大冰盖地区(如南极)的冰川消融或加厚也会引起地壳均衡反弹,从而导致样品高程变化;而核素的生成速率将随高程变化而改变。本文对持续抬升情况下,地表样品中宇宙成因核素浓度与生成速率加速率间的计算关系进行了三种方法的数学推导,并提出如何利用单块样品中两种宇宙成因核素(以¹⁰Be和²⁶Al为例)浓度计算地表抬升速率,最后指出以往利用宇宙成因核素方法对构造活动区的侵蚀速率的计算存在高估。本文首次提出利用地表在接近稳态侵蚀状态下的单块样品的两种宇宙成因核素直接计算地表持续抬升速率的方法,从而将原地生成宇宙成因核素方法和构造运动学研究直接联系起来。

[关键词] 抬升区 原地生成宇宙成因核素 抬升速率 侵蚀速率

[中图分类号] O572.19 [文献标识码] A [文章编号] 0495-5331(2019)03-08

Huang Feixin, Li Yan, Li Guangwei, Dong Guocheng, Cheng Yang, Zhao Liangliang. Consideration on the in situ produced cosmogenic nuclide dating technique (2): Direct calculation of surface uplift rates by a single sample[J]. *Geology and Exploration*, 2019, 55(3): 0818-0825.

0 引言

自20世纪80年代以来,原地生成宇宙成因核素测年技术迅速发展,已被广泛应用于地貌学和第四纪地质学的研究(Lal, 1991; Gosse et al., 2001; 孔屏, 2002; Dunai, 2010; Beer et al., 2012; Darryl et al., 2013), 目前主要应用领域包括计算样品的暴露时间和埋藏时间(黄费新等, 2004; Owen et al., 2006; Huang et al., 2008; 李广伟等, 2009; Altmaier et al., 2010; Kong et al., 2010; 韩非等, 2016; Thompson et al., 2018), 估算地表侵蚀速率或计算阶地下切速率(Granger et al., 1996; Heimsath et al., 2001; Schaller et al., 2001; Blanckenburg, 2005; Kober et al., 2007), 以及重建古地震序列(Tesson et al., 2016; Cowie et al., 2017; 张金玉等, 2018)。准确估

算地球表面不同位置样品的宇宙成因核素的生成速率是应用原地生成宇宙成因核素测年技术的必要前提之一(Balco, 2011; Borchers et al., 2016), 而样品高程的升高和降低, 对应于地球大气层对宇宙射线的屏蔽程度发生变化, 从而导致核素生成速率的改变(Lal, 1991; Dunai, 2000; Stone, 2000)。然而, 在实际研究中, 往往以样品当前生成速率进行计算, 从而忽略了样品暴露以来随高程的变化导致的生成速率变化。在构造稳定区, 假设样品暴露以来, 位置未发生改变, 侵蚀厚度有限, 在忽略地磁场变化等情况下, 以当前核素生成速率进行计算是可行的。然而在抬升区(如构造活动区、大冰盖消融引起的地壳反弹区)地表高程随时间可明显增加, 从而地表样品的核素生成速率也会增大(下降区可视为高程和核素生成速率增加为负值的抬升区), 生成速率不变的假设

[收稿日期] 2019-01-07; [改回日期] 2019-04-02; [责任编辑] 郝情情。

[基金项目] 国家自然科学基金面上项目(编号:41873064, 41176166)资助。

[第一作者] 黄费新(1974年-), 男, 教授级高级工程师, 从事构造地质学与极地地质研究。E-mail: huangfeixin@cmgb.cn。

[通讯作者] 李岩(1988年-), 男, 工程师, 从事岩石学及矿床学研究。E-mail: liyan@cmgb.com。

会对相关研究带来很大的不确定性。利用宇宙成因核素研究古高程的方法学的最新进展是 Blard 等 (2019) 利用两种核素的浓度投影图判断样品的古高程,但方法较复杂,且其承认仅适用于长期暴露 (>5Ma) 或侵蚀速率较低 (<1m/Ma) 的地区,所计算的例子也是抬升不明显的稳定区,然而更需要关注和重点研究的其实是如活动造山带或青藏高原这样的快速抬升区,而这样的地区侵蚀速率一般较高 (Kong et al., 2006)。鉴于此,本文推导出持续抬升地区核素浓度的计算等式,提出在长期暴露接近稳态侵蚀状态地区如何利用单块样品的两种核素浓度联合计算地表抬升速率及其误差,并讨论了抬升对侵蚀速率计算结果的影响,相对于 Blard et al. (2019) 的方法简单易操作且更有针对性。突变型的抬升,可视为两次高程稳定的暴露历史的叠加,核素浓度和时间关系的计算方式相对简单,本文未做讨论。

1 长期持续抬升下宇宙成因核素浓度计算

在长期持续抬升的条件下,样品的高程随时间连续变化,进而导致宇宙成因核素的生成速率(P)的连续变化,因此推导样品当前的浓度(N)计算等式应考虑生成速率的持续变化。下文从简单到复杂,从近似到精确,利用数列求和、解微分方程和定积分三种方法对持续抬升情况下的核素浓度计算等式进行推导。

1.1 数列求和法

在样品位置不变即生成速率不变时原地生成宇宙成因核素的浓度 N 和暴露时间 t 有如下等式关系 (Lal, 1991):

$$N = \frac{P}{\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}} \left(1 - e^{-(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})t} \right) + N_0 e^{-\lambda t} \quad (1)$$

式中: N 是目前样品中的放射性核素浓度 (atoms/g), N_0 是样品暴露前放射性核素浓度原始值 (atoms/g), P 是样品的放射性核素生成速率 (atoms/(g·yr)), 数值随地磁纬度及高差的变化而变化; λ 是放射性核素衰变常数, ρ 是岩石密度 (g/cm³); Λ 是宇宙成因核素的吸收深度 (g/cm²), 代表核素生成速率随距离地表深度增加呈指数函数减少,降为 $1/e$ 倍的地表下深度 (Lal, 1991), Λ 值一般 130 ~ 150 (Dunai, 2000), 约相当于 50cm 长英质岩石厚度; t 是样品的暴露时间 (yr); ε 是地表侵蚀速率 (cm/yr)。

没有埋藏只有一次性暴露历史 (即 $N_0 = 0$) 样品

的核素浓度计算等式为:

$$N = \frac{P}{\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}} \left(1 - e^{-(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})t} \right) \quad (2)$$

(2)式用解微分方程法得出的具体过程,可参见黄费新等 (2019)。

地表高程的变化将导致核素生成速率的变化。设目前地表核素生成速率为 P , 设因地表高程增加,核素的生成速率加速率 (即年增加值) 为 f (atoms/(g·a²)) 且保持恒定 (f 为 fast 的第一个字母), 则距今 t 年前的生成速率为 $P - ft$ 。设在这一年内生成速率变化很小可忽略, 这一年生成的核素在这一年的衰变量很小也忽略, 即 t 年前的这年生成的浓度可近似视为 $P - ft$, 随后这一年生成的浓度将经历 t 年的衰变。由于有侵蚀速率情况下侵蚀速率可视为对核素衰变常数 λ 修正为 $\lambda + \rho\varepsilon/\Lambda$ (黄费新等, 2019), 为书写方便设 $\sigma = \lambda + \rho\varepsilon/\Lambda$, 那么 t 年前的这一年生成浓度目前留存了 $(P - f)e^{-\sigma t}$, 而目前的核素浓度 N 就是 t 从距今 1 年到距今 T 年的每年浓度至今留存量累加后的总量。 N 可借鉴等比数列求和公式, 由以下数列求和计算出:

$$N = (P - f) + (P - 2f)e^{-\sigma} + (P - 3f)e^{-2\sigma} + \dots + (P - Tf)e^{-(T-1)\sigma}$$

$$N = (P + Pe^{-\sigma} + \dots + Pe^{-(T-1)\sigma}) - (f + 2fe^{-\sigma} + 3fe^{-2\sigma} + \dots + Tfe^{-(T-1)\sigma})$$

设第二项为 S , 即 $S = f + 2fe^{-\sigma} + 3fe^{-2\sigma} + \dots + Tfe^{-(T-1)\sigma}$, 则

$$S - Se^{-\sigma} = f + 2fe^{-\sigma} + 3fe^{-2\sigma} + \dots + Tfe^{-(T-1)\sigma} - (fe^{-\sigma} + 2fe^{-2\sigma} + \dots + Tfe^{-T\sigma})$$

$$= f + fe^{-\sigma} + fe^{-2\sigma} + fe^{-3\sigma} + fe^{-(T-1)\sigma} - Tfe^{-T\sigma} \\ = \frac{f(1 - e^{-T\sigma})}{1 - e^{-\sigma}} - Tfe^{-T\sigma}$$

那么:

$$S = \frac{f(1 - e^{-T\sigma})}{(1 - e^{-\sigma})^2} - \frac{Tfe^{-T\sigma}}{1 - e^{-\sigma}}$$

从而:

$$N = \frac{P(1 - e^{-\sigma T})}{1 - e^{-\sigma}} - \frac{f(1 - e^{-T\sigma})}{(1 - e^{-\sigma})^2} + \frac{Tfe^{-T\sigma}}{1 - e^{-\sigma}}$$

$$N = \left(\frac{P}{1 - e^{-\sigma}} - \frac{f}{(1 - e^{-\sigma})^2} \right) (1 - e^{-T\sigma}) + \frac{Tfe^{-T\sigma}}{1 - e^{-\sigma}}$$

代回 $\sigma = \lambda + \rho\varepsilon/\Lambda$:

$$N = \left(\frac{P}{1 - e^{-(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})}} - \frac{f}{(1 - e^{-(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})})^2} \right) (1 - e^{-(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})T}) + \frac{Tfe^{-(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})T}}{1 - e^{-(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})}} \quad (3)$$

当然,由于 t 年前的这年生成的浓度视为 $P - ft$ 是一种近似,因此等式(3)只是一种近似计算。

1.2 微分方程法

设岩石样品一次性暴露无埋藏,暴露总时间为 T 。在距今 T 时刻前开始计时后的某一时刻 t (注意此节 t 不是距今时间,后面略),样品处于地表以下 x cm 处,此处核素的生成速率降为 $Pe^{-\frac{\rho}{\Lambda}x}$ (Lal, 1991),则样品中的放射性核素(如¹⁰Be、²⁶Al)浓度的瞬时变化可表示为由衰变造成的浓度减少和新生浓度之和,由微分等式表示如下(Lal, 1991):

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N + Pe^{-\frac{\rho}{\Lambda}x} \quad (4)$$

设地表侵蚀速率为 ε (cm/yr) 且不变,那么 t 时刻样品的深度 x (cm) 可以表示为 ε 、 T 和 t 的函数,注意因 x_0 是目前地表深度即等于 0 (cm),而 t 是 T 时刻前开始计时的时间,距今时间则是 $T - t$,那么 $x = x_0 + \varepsilon(T - t) = 0 + \varepsilon(T - t) = \varepsilon(T - t)$ 。

从而(4)式改写为

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N + Pe^{-\frac{\rho}{\Lambda}\varepsilon(T-t)} \quad (5)$$

随着抬升,地面高程增大,(5)式中地表核素的生成速率 P 会增加,则在 T 时刻前开始后的某一时刻 t ($0 < t < T$),样品中核素的生成速率可表示为目前核素地面生成速率 P 与 f 、 T 及 t 的函数 $P_t = P - fT + ft$, (5)式改写为:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N + (P - fT + ft)e^{-\frac{\rho}{\Lambda}\varepsilon(T-t)} \quad (6)$$

解微分方程(6)的方法是,先解方程 $dN/dt = -\lambda N$,得 $N = Ce^{-\lambda t}$ 。替换常数 C 为 t 的函数 u ,即设:

$$N = ue^{-\lambda t}$$

那么:

$$N' = u'e^{-\lambda t} + u(-\lambda)e^{-\lambda t}$$

代回方程(6):

$$u'e^{-\lambda t} + u(-\lambda)e^{-\lambda t} = -\lambda ue^{-\lambda t} + (P - fT + ft)e^{-\frac{\rho}{\Lambda}\varepsilon(T-t)}$$

$$u'e^{-\lambda t} = (P - fT + ft)e^{-\frac{\rho}{\Lambda}\varepsilon(T-t)}$$

$$u' = (P - fT + ft)e^{-\frac{\rho}{\Lambda}\varepsilon(T-t)} e^{\lambda t}$$

为书写方便,令 $\delta = \rho\varepsilon/\Lambda$:

$$u' = (P - fT + ft)e^{-\delta(T-t)} e^{\lambda t} = (P - fT + ft)e^{-\delta T + \delta t + \lambda t} = (P - fT + ft)e^{-\delta T} e^{(\delta + \lambda)t}$$

两边积分:

$$u = e^{-\delta T} \int (P - fT + ft)e^{(\delta + \lambda)t} dt$$

$$u = \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} \int (P - fT + ft)e^{(\delta + \lambda)t} d(\delta + \lambda)t$$

$$u = \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} \int (P - fT + ft) de^{(\delta + \lambda)t}$$

利用分部积分方法:

$$u = \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} (P - fT + ft)e^{(\delta + \lambda)t} -$$

$$\frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} \int e^{(\delta + \lambda)t} d(P - fT + ft)$$

$$u = \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} (P - fT + ft)e^{(\delta + \lambda)t} - \frac{fe^{-\delta T}}{\delta + \lambda} \int e^{(\delta + \lambda)t} dt$$

$$u = \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} (P - fT + ft)e^{(\delta + \lambda)t} - \frac{fe^{-\delta T}}{(\delta + \lambda)^2} e^{(\delta + \lambda)t} + C$$

将 $u = Ne^{\lambda t}$ 代回来:

$$Ne^{\lambda t} = \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} (P - fT + ft)e^{(\delta + \lambda)t} - \frac{fe^{-\delta T}}{(\delta + \lambda)^2} e^{(\delta + \lambda)t} + C$$

再代入初始条件即 $t = 0$ 时, $N = 0$, 解出常数 C :

$$0 = \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} (P - fT + f \cdot 0)e^{(\delta + \lambda) \cdot 0} - \frac{fe^{-\delta T}}{(\delta + \lambda)^2} e^{(\delta + \lambda) \cdot 0} + C$$

$$0 = \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} (P - fT) \cdot 1 - \frac{fe^{-\delta T}}{(\delta + \lambda)^2} \cdot 1 + C$$

$$C = \frac{fe^{-\delta T}}{(\delta + \lambda)^2} - \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} (P - fT) = \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} (fT - P) + \frac{fe^{-\delta T}}{(\delta + \lambda)^2}$$

解出放射性核素浓度计算等式是:

$$Ne^{\lambda t} = \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} (P - fT + ft)e^{(\delta + \lambda)t} - \frac{fe^{-\delta T}}{(\delta + \lambda)^2} e^{(\delta + \lambda)t} + \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} (fT - P) + \frac{fe^{-\delta T}}{(\delta + \lambda)^2}$$

由于最终要求解的是目前 ($t = T$) 的浓度, 所以:

$$Ne^{\lambda T} = \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} (P - fT + fT)e^{(\delta + \lambda)T} - \frac{fe^{-\delta T}}{(\delta + \lambda)^2} e^{(\delta + \lambda)T} + \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} (fT - P) + \frac{fe^{-\delta T}}{(\delta + \lambda)^2}$$

$$Ne^{\lambda T} = \frac{Pe^{\lambda T}}{\delta + \lambda} - \frac{fe^{\lambda T}}{(\delta + \lambda)^2} + \frac{e^{-\delta T}}{\delta + \lambda} (fT - P) + \frac{fe^{-\delta T}}{(\delta + \lambda)^2}$$

$$N = \frac{P}{\delta + \lambda} - \frac{f}{(\delta + \lambda)^2} + \frac{e^{-\delta T} e^{-\lambda T}}{\delta + \lambda} (fT - P) + \frac{fe^{-\delta T} e^{-\lambda T}}{(\delta + \lambda)^2}$$

$$N = \frac{P}{\delta + \lambda} - \frac{f}{(\delta + \lambda)^2} + \frac{(fT - P)e^{-(\delta + \lambda)T}}{\delta + \lambda} + \frac{fe^{-(\delta + \lambda)T}}{(\delta + \lambda)^2}$$

$$N = \frac{P}{\delta + \lambda} (1 - e^{-(\delta + \lambda)T}) - \frac{f}{(\delta + \lambda)^2} (1 - e^{-(\delta + \lambda)T}) + \frac{fTe^{-(\delta + \lambda)T}}{\delta + \lambda}$$

$$N = \left(\frac{P}{\delta + \lambda} - \frac{f}{(\delta + \lambda)^2} \right) (1 - e^{-(\delta + \lambda)T}) + \frac{fTe^{-(\delta + \lambda)T}}{\delta + \lambda}$$

代回 $\delta = \rho\varepsilon/\Lambda$:

$$N = \left(\frac{P}{\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}} - \frac{f}{\left(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda} \right)^2} \right) (1 - e^{-(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})T}) + \frac{fTe^{-(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})T}}{\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}} \quad (7)$$

1.3 定积分法

微分方程法推导出 f 与 N 的关系式(7)式为准正确计算等式,推导过程比较繁琐但原理简单,利用定积分法推导原理稍复杂但推导过程较为简单。

没有经历过埋藏只有一次性暴露历史的样品无原始浓度,因此:

$$N = \frac{P}{\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}} (1 - e^{-(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})T})$$

为书写方便,令 $\sigma = \lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}$ 。上式改写为:

$$N = \frac{P}{\sigma} (1 - e^{-\sigma T})$$

为了计算地面升降情况下即 P 变化情况下的浓度计算等式,先对上式关于 T 求导(为清楚区分,同时将 T 换为 t),得到 t 时刻的瞬时浓度变化(可认为是目前样品 t 时刻单位时间净生成浓度):

$$N' = Pe^{-\sigma t}$$

同样,设因高程变化导致的核素生成速率加速率为 f ,而样品目前为止总暴露时间为 T ,得到距今 t 时刻时核素的生成速率 $P_t = P - ft$,那么距今 t 时刻的净生成浓度为 $(P - ft)e^{-\sigma t}$ 。 t 从距今 0 时刻到距今 T 时刻积分,得到核素浓度 N 与暴露总时间 T 之间关系:

$$N = \int_0^T (P - ft)e^{-\sigma t} dt$$

该定积分式可以这么理解,当距今 $t = T$ 时刚好是核素开始生成的时刻,此时 P 为 $P_0 = P_t - ft$,此时瞬间 dt 生成的浓度将在 T 时间内因衰减和侵蚀减少仅能保留 $P_0e^{-\sigma T}$,而在 $t = 0$ 的目前时刻生成的浓度,没有衰减,所以为 $Pe^{-\sigma \cdot 0} = P$ 。然后将所有 dt 内的净生成浓度积分。

积分过程如下:

$$\begin{aligned} N &= \int_0^T Pe^{-\sigma t} dt - \int_0^T fte^{-\sigma t} dt \\ N &= \frac{P}{-\sigma} e^{-\sigma t} \Big|_0^T - \frac{1}{-\sigma} \int_0^T fte^{-\sigma t} d(-\sigma t) \\ N &= \frac{P}{-\sigma} (e^{-\sigma T} - 1) - \frac{f}{-\sigma} \int_0^T td(e^{-\sigma t}) \\ N &= \frac{P}{\sigma} (1 - e^{-\sigma T}) + \frac{f}{\sigma} \left(te^{-\sigma t} - \int_0^T e^{-\sigma t} dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \frac{P}{\sigma} (1 - e^{-\sigma T}) + \frac{f}{\sigma} \left(te^{-\sigma t} - \frac{1}{-\sigma} \int_0^T e^{-\sigma t} d(-\sigma t) \right) \\ N &= \frac{P}{\sigma} (1 - e^{-\sigma T}) + \frac{f}{\sigma} \left(te^{-\sigma t} - \frac{1}{-\sigma} e^{-\sigma t} \right) \Big|_0^T \end{aligned}$$

$$N = \frac{P}{\sigma} (1 - e^{-\sigma T}) + \frac{f}{\sigma} \left(Te^{-\sigma T} - \frac{1}{-\sigma} e^{-\sigma T} \right) - \frac{f}{\sigma} \left(0 - \frac{1}{-\sigma} \right)$$

$$N = \frac{P}{\sigma} (1 - e^{-\sigma T}) + \frac{f}{\sigma} \left(Te^{-\sigma T} + \frac{1}{\sigma} e^{-\sigma T} \right) - \frac{f}{\sigma^2}$$

$$N = \frac{P}{\sigma} (1 - e^{-\sigma T}) + \frac{f}{\sigma} Te^{-\sigma T} + \frac{f}{\sigma^2} e^{-\sigma T} - \frac{f}{\sigma^2}$$

$$N = \frac{P}{\sigma} (1 - e^{-\sigma T}) - \frac{f}{\sigma^2} (1 - e^{-\sigma T}) + \frac{f}{\sigma} Te^{-\sigma T}$$

$$N = \left(\frac{P}{\sigma} - \frac{f}{\sigma^2} \right) (1 - e^{-\sigma T}) + \frac{f}{\sigma} Te^{-\sigma T}$$

代回 $\sigma = \lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}$:

$$N = \left(\frac{P}{\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}} - \frac{f}{\left(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda} \right)^2} \right) (1 - e^{-(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})T}) + \frac{fTe^{-(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})T}}{\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}}$$

与解微分方程方法的结果(7)式一致。

1.4 数列求和法与后两种方法结果的比较

与微分方程法和定积分法比较,可看出数列求和法得到的等式是一种近似计算。数列求和法的结果是:

$$N = \left(\frac{P}{1 - e^{-\sigma}} - \frac{f}{(1 - e^{-\sigma})^2} \right) (1 - e^{-T\sigma}) + \frac{Tfe^{-T\sigma}}{1 - e^{-\sigma}}$$

由于在一年时间内,对于半衰期较长的核素如¹⁰Be和²⁶Al,核素的衰变量及因侵蚀减小的量非常小,因此 $P \approx \frac{P}{\sigma} (1 - e^{-\sigma})$,从而推出 $\sigma \approx (1 - e^{-\sigma})$ (例如在地表正常且很快的侵蚀速率 m/ka 数量级下,取小数点后 6 位, $\sigma = 0.001001, 1 - e^{-\sigma} \approx 0.0009995$,误差小于十万分之一(浓度计算差别远小于加速器质谱仪浓度测量误差百分比),那么上式就与微分方程法和定积分法结果一致,即:

$$N = \left(\frac{P}{\sigma} - \frac{f}{\sigma^2} \right) (1 - e^{-T\sigma}) + \frac{Tfe^{-T\sigma}}{\sigma}$$

相对于前两种方法,数列求和方法并非一种严谨的求解方式,但是这种将总浓度年份化,再数列求和得出最终浓度的思维方法(本质是积分的初等数学反向分解),将来对于模拟特别复杂的暴露历史(如既有高程变化导致生成速率变化,又有侵蚀速率的变化,同时中间又经历了若干次埋藏),在目前个人计算机运行速率极大提高的情况下,累加几百万项可在几分钟之内完成,是一种具有可行性的简

便模拟计算方法,因此对其原理在这里进行了简单阐述。

2 核素生成速率加速度 f 的计算及误差估计

(7)式即放射性宇宙成因核素浓度与目前核素地表生成速率 P 、暴露时间 T 、地表侵蚀速率 ε 及核素生成速率加速度 f 之间的关系式,其形式与无抬升浓度等式(2)比较,增加了两处修正项 $\frac{f}{(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})^2}$

和 $\frac{fTe^{-(\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda})T}}{\lambda + \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}}$ 。将 ^{10}Be 、 ^{26}Al 浓度及参数分别代入

(7)式组成方程组,如果地质样品暴露时间 T 已知,可对 ε 及 f 赋值逼近求解。

赋值逼近求解 ε 及 f 并不方便,因此我们对(7)式继续进行推导,以下是特殊情况 $T \gg 1/(\lambda + \rho\varepsilon/\Lambda)$ 时,即地表长期暴露接近“稳态侵蚀状态”下(Lal,1991) ε 及 f 的计算方法的推导:

设 $\delta = \frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}$, (7)式展开改写为:

$$N = \frac{P}{\lambda + \delta} - \frac{f}{(\lambda + \delta)^2} - \frac{P - fT - \frac{f}{\lambda + \delta}}{\lambda + \delta} e^{-(\lambda + \delta)T} \quad (8)$$

注意(8)式中的 $P - fT$ 其意义就是初始时刻核素生成速率 P_0 。

由于 $T \gg 1/(\lambda + \delta)$ 时 $e^{-(\lambda + \delta)T} \approx 0$, 式中的最后一项 $\frac{P - fT - \frac{f}{\lambda + \delta}}{\lambda + \delta} e^{-(\lambda + \delta)T} \approx 0$, 此时(8)式可简化为:

$$\delta = \frac{-\left(N_A \lambda_A - \frac{P_A}{P_B} N_B \lambda_B\right) \pm \sqrt{\left(N_A \lambda_A - \frac{P_A}{P_B} N_B \lambda_B\right)^2 - \left(N_A - \frac{P_A}{P_B} N_B\right) \left(\frac{P_A}{P_B} N_B \lambda_B^2 - N_A \lambda_A^2 - P_A \lambda_B + P_A \lambda_A\right)}}{\left(N_A - \frac{P_A}{P_B} N_B\right)} \quad (14)$$

注意 δ 应为正实数才有地质意义,然后可以将 δ 值、 ^{10}Be 或 ^{26}Al 的各项参数代入(11)式计算出 ^{10}Be 或 ^{26}Al 生成速率加速度。

3 抬升速率的估算

核素生成速率加速度 f 反映地表抬升快慢不太直观,利用下式可估算 f 对应的目前位置的抬升速率。根据 Stone(2000)方法计算,全球范围内,地表

$$N = \frac{P}{\lambda + \delta} - \frac{f}{(\lambda + \delta)^2} \quad (9)$$

(9)式就是生成速率匀速增加且时间 $T \gg 1/(\lambda + \delta)$ 时 N 与 P 、 f 的关系式,是一个重要的计算等式。(9)式表明高度已确定时,暴露时间足够长,核素浓度与生成速率加速度负相关。在无抬升即 $f=0$ 的情况下,(9)式即为稳态侵蚀状态下宇宙成因核素浓度与生成速率的关系式 $N = \frac{P}{\lambda + \delta}$ (Lal,1991)。

在具体的研究中,由于存在 f 、 ε 两个未知数,我们需要测得两种核素浓度(如 ^{10}Be 和 ^{26}Al)组成方程组来解。由(9)式得:

$$f = P(\lambda + \delta) - N(\lambda + \delta)^2 \quad (10)$$

将 ^{10}Be 、 ^{26}Al 浓度及各项参数(分别以下标 B 、 A 指代),代入上式,可组成方程组:

$$\begin{cases} f_B = P_B(\lambda_B + \delta) - N_B(\lambda_B + \delta)^2 \\ f_A = P_A(\lambda_A + \delta) - N_A(\lambda_A + \delta)^2 \end{cases} \quad (11)$$

注意在全球特定地点的 ^{26}Al 和 ^{10}Be 的生成速率比值基本恒定(Dunai,2000;Borchers et al.,2016),因此也有 $f_A = P_A/P_B \cdot f_B$, 上述方程组可推出如下等式:

$$\frac{P_A}{P_B} (P_B(\delta + \lambda_B) - N_B(\delta + \lambda_B)^2) = P_A(\delta + \lambda_A) - N_A(\delta + \lambda_A)^2 \quad (12)$$

得到关于 δ 的一元二次方程:

$$\begin{aligned} \left(N_A - \frac{P_A}{P_B} N_B\right) \delta^2 + 2\left(N_A \lambda_A - \frac{P_A}{P_B} N_B \lambda_B\right) \delta - \\ \left(\frac{P_A}{P_B} N_B \lambda_B^2 - N_A \lambda_A^2 - P_A \lambda_B + P_A \lambda_A\right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

因此可解出 δ :

每克石英中的 ^{10}Be 生成速率随高程变化的曲线,如图1,因此在抬升幅度较小($< 200\text{m}$)时,高程增加与核素的生成速率的增加大致成正比:

$$v = \frac{fH}{P} \quad (15)$$

(5)式中 v 为抬升速率(m/yr), H 为样品高程(m), P 为样品目前位置地表核素生成速率($\text{atoms}/(\text{g} \cdot \text{yr})$)。

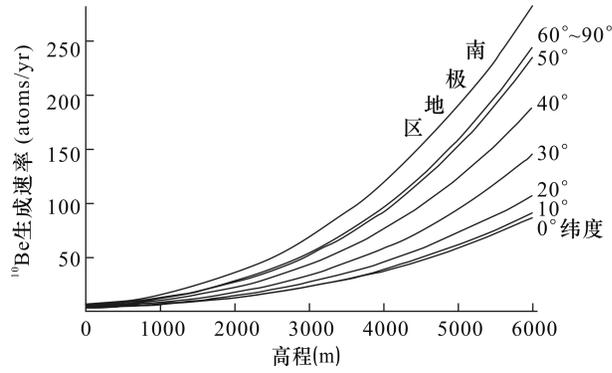


图1 全球不同纬度及南极地区¹⁰Be生成速率与高程关系 (据 Stone(2000) 绘制)

Fig. 1 Relationships between ¹⁰Be generation rate and elevation at varied latitudes and Antarctic area(after Stone,2000)

根据上述计算方法,我们对青藏高原部分已经公开发表的核素数据进行了试算,表明青藏高原目前抬升速率在 mm/yr 到 cm/yr 数量级,和裂变径迹法研究结果及 GPS 观测数据基本一致(肖序常和李廷栋,2000;Kong et al.,2007)。

正如稳态侵蚀状态等式解出的侵蚀速率 ε 只代表达到稳态侵蚀状态当前地表(或达到稳态侵蚀状态后侵蚀速率无变化时)的侵蚀速率一样(黄费新等,2019),利用稳态侵蚀状态解出的 f 也应仅代表地表暴露时间很长后,当前的核素生成速率加速度,从而换算的 v 也仅代表当前的地表抬升速率,只有 f 不变时 f 值才可向已往时间扩展,否则应是不准确的。同时要注意,对一些测量误差较大,例如 ²⁶Al/¹⁰Be 浓度比值大于 ²⁶Al/¹⁰Be 生成速率比值的样品(由于²⁶Al 衰变快,自然界仅因暴露、侵蚀、埋藏或地表升降等变化,都不会产生这种现象),(14)式和(11)式联合计算也能得出结果,但可能不具有地质意义,所以对计算结果要进行地质现实性判断。

4 f 误差 df 的计算

4.1 δ 均方差 $d\delta$ 的计算

正文中(13)式可变化为:

$$(P_B N_A - P_A N_B) \delta^2 + 2(P_B N_A \lambda_A - P_A N_B \lambda_B) \delta + (P_B N_A \lambda_A^2 - P_A N_B \lambda_B^2 + P_A P_B \lambda_B - P_A P_B \lambda_A) = 0$$

视 N_B 为 x , N_A 为 y , δ 为 z , 利用多元函数隐函数全微分的计算方法推导 δ 的全微分来估计其均方差。

$$(d\delta)^2 = \left(\frac{\partial \delta}{\partial N_A} dN_A \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial N_B} dN_B \right)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial N_A} &= -\frac{F_{N_A}}{F_\delta} = \\ &= -\frac{P_B \delta^2 + 2P_B \lambda_A \delta + P_B \lambda_A^2}{2(P_B N_A - P_A N_B) \delta + 2(P_B N_A \lambda_A - P_A N_B \lambda_B)} \\ &= -\frac{P_B (\delta + \lambda_A)^2 dN_A}{2(P_B N_A - P_A N_B) \delta + 2(P_B N_A \lambda_A - P_A N_B \lambda_B)} \\ \frac{\partial \delta}{\partial N_B} &= -\frac{F_{N_B}}{F_\delta} = \frac{P_A \delta^2 + 2P_A \lambda_B \delta + P_A \lambda_B^2}{2 + 2(P_B N_A \lambda_A - P_A N_B \lambda_B)} \\ &= \frac{P_A (\delta + \lambda_B)^2}{2(P_B N_A - P_A N_B) \delta + 2(P_B N_A \lambda_A - P_A N_B \lambda_B)} \\ d\delta &= \sqrt{\frac{(P_B (\delta + \lambda_A)^2 dN_A)^2 + (P_A (\delta + \lambda_B)^2 dN_B)^2}{(2(P_B N_A - P_A N_B) \delta + 2(P_B N_A \lambda_A - P_A N_B \lambda_B))^2}} \end{aligned} \quad (16)$$

4.2 f 均方差 df 的计算

根据 $f - P(\delta + \lambda) + N(\delta + \lambda)^2 = 0$, 均方差 df 的计算如下:

$$\begin{aligned} (df)^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial N} dN \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \delta} d\delta \right)^2 \\ \frac{\partial f}{\partial N} &= -\frac{F_N}{F_f} = -\frac{(\delta + \lambda)^2}{1} = -(\delta + \lambda)^2 \\ \frac{\partial f}{\partial \delta} &= -\frac{F_\delta}{F_f} = -\frac{-P + 2N(\delta + \lambda)}{1} = 2N(\delta + \lambda) - P \\ df &= \sqrt{((\delta + \lambda)^2 dN)^2 + ((2N(\delta + \lambda) - P) d\delta)^2} \end{aligned} \quad (17)$$

5 已往抬升区侵蚀速率的高估

已往地表侵蚀速率的计算常利用稳态侵蚀状态等式 $N = \frac{P}{\lambda + \frac{\rho \varepsilon}{\Lambda}}$ 来计算的,从而得到 $\varepsilon = \left(\frac{P}{N} - \lambda \right) \frac{\Lambda}{\rho}$ 。

现在我们知道,抬升区因为受生成速率加速度影响,稳态侵蚀状态等式变化为 $N = \left(\frac{P}{\lambda + \frac{\rho \varepsilon}{\Lambda}} - \frac{f}{\left(\lambda + \frac{\rho \varepsilon}{\Lambda} \right)^2} \right)$, 即 $N \left(\lambda + \frac{\rho \varepsilon}{\Lambda} \right)^2 - P \left(\lambda + \frac{\rho \varepsilon}{\Lambda} \right) +$

$f = 0$, 因此 $\varepsilon = \left(\frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4Nf}}{2N} - \lambda \right) \frac{\Lambda}{\rho}$, 而 $\frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4Nf}}{2N} \leq \frac{P}{N}$, 所以解出的 ε 相对而言应更小些。

由此可知,已往抬升区假设达到稳态侵蚀状态解出的侵蚀速率忽略了核素生成速率加速度的影响, ε 值存在高估(同理下降区以往计算的侵蚀速率应存在低估)。

6 结论

受抬升的影响,原地生成宇宙成因核素的生成速率发生变化,本文通过三种方法推导了核素生成速率加速率的计算方法,然后可换算为抬升速率,最后指出已往抬升区利用稳态侵蚀状态浓度等式计算的侵蚀速率计算结果存在高估。

[References]

- Altmaier M, Hergers U, Delisle G, Merchel S, Ott U. 2010. Glaciation history of Queen Maud Land (Antarctica) reconstructed from in-situ produced cosmogenic ^{10}Be , ^{26}Al and ^{21}Ne [J]. *Polar Science*, 4(1): 42-61.
- Balco G. 2011. Contributions and unrealized potential contributions of cosmogenic-nuclide exposure dating to glacier chronology, 1990-2010 [J]. *Quaternary Science Reviews*, 30(1-2): 3-27.
- Beer J, McCracken K, Steiger R von. 2012. *Cosmogenic radionuclide - Theory and applications in the terrestrial and space environments* [M]. Springer Heidelberg Dordrecht London New York: Springer Press: 426.
- Blanchenburg F V. 2005. The control mechanisms of erosion and weathering at basin scale from cosmogenic nuclides in river sediment [J]. *Earth & Planetary Science Letters*, 237(3-4): 462-479.
- Blard P H, Lupker M, Rousseau M. 2019. Paired-cosmogenic nuclide paleoaltimetry [J]. *Earth and Planetary Science Letters*, 515: 271-282.
- Borchers B, Marreto S, Balco G, Caffee M, Geohring B, Lifton N, Nishiizumi K, Phillips F, Schaefer J, Stone J. 2016. Geological calibration of spallation production rates in the CRONUS-Earth project [J]. *Quaternary Geochronology*, 31: 188-198.
- Cowie P A, Phillips R J, Roberts G P, McCaffrey K, Zijerveld L J J, Gregory L C, Walker J F, Wedmore L N J, Dunai T J, Binnie S A. 2017. Orogen-scale uplift in the central Italian Apennines drives episodic behaviour of earthquake faults [J]. *Scientific Reports*, 7: 44858.
- Darryl E G, Nathaniel A L, Jane K W. 2013. A cosmic trip: 25 years of cosmogenic nuclides in geology [J]. *Bulletin of the Geological Society of America*, 125(9-10): 1379-1402.
- Dunai T J. 2000. Scaling factors for production rates of in situ produced cosmogenic nuclides: A critical reevaluation [J]. *Earth and Planetary Science Letters*, 176: 157-169.
- Dunai T J. 2010. *Cosmogenic nuclides - Principles, concepts and applications in the Earth surface Sciences* [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press: 187.
- Granger D E, Kirchner J W, Finkel R. 1996. Spatially averaged long-term erosion rates measured from in situ-produced cosmogenic nuclides in alluvial sediment [J]. *Journal of Geology*, 104(3): 249-257.
- Gosse J C, Phillips F M. 2001. *Terrestrial in situ cosmogenic nuclides: Theory and application* [J]. *Quaternary Science Reviews*, 20: 1475-1560.
- Han Fei, Gu Zhaoyan, Yin Gongming, David Fink, Wang Duo. 2016. Cosmogenic nuclides $^{26}\text{Al}/^{10}\text{Be}$ burial dating of Yellow River gravel terraces around Yemingshan Hill, Ningxia, China [J]. *Quaternary Science*, 36(5): 1216-1223 (in Chinese with English abstract).
- Heimsath A M, Chappell J, Dietrich W E, Nishiizumi K, Finkel R C. 2001. Late Quaternary erosion in southeastern Australia: A field example using cosmogenic nuclides [J]. *Quaternary International*, 83(1): 169-185.
- Huang Feixin, Liu Xiaohan, Kong Ping, Fink D, Ju Yitai, Fang Aimin, Yu Liangjun, Li Xiaoli, Na Changguang. 2008. Fluctuation history of the interior East Antarctic Ice Sheet since mid-Pliocene [J]. *Arctic Science*, 20(2): 197-203.
- Huang Feixin, Liu Xiaohan, Kong Ping, Ju Yitai, Fang Aimin, Li Xiaoli, Na Changguang. 2004. Bedrock exposure ages in the Grove Mountains, interior east Antarctica [J]. *Chinese Journal of Polar Research*, 16(01): 22-28 (in Chinese with English abstract).
- Huang Feixin, Li Yan, Cheng Yang. 2019. Consideration on in situ produced cosmogenic nuclide dating techniques (1): ε solved by steady-state erosion equation is the current surface erosion rate [J]. *Geology and Exploration*, 55(1): 145-151 (in Chinese with English abstract).
- Kober F, Ivy-Ochs S, Schlunegger F, Baur H, Kubik P W, Wieler R. 2007. Denudation rates and a topography-driven rainfall threshold in northern Chile: Multiple cosmogenic nuclide data and sediment yield budgets [J]. *Geomorphology*, 83(1): 97-120.
- Kong Ping, Huang Feixin, Liu Xiaohan, Fink D, Ding Lin, Lai Qingzhou. 2010. Late Miocene ice sheet elevation in the Grove Mountains, East Antarctica, inferred from cosmogenic ^{21}Ne - ^{10}Be - ^{26}Al [J]. *Global Planetary Change*, 72(1): 50-54.
- Kong Ping. 2002. Application of cosmogenic nuclides in the earth science [J]. *Earth Science Frontiers*, 9(3): 41-48 (in Chinese with English abstract).
- Kong Ping, Na Chunguang, Fink D, Ding Ling, Huang Feixin. 2007. Erosion in northwest Tibet from in situ produced cosmogenic ^{10}Be and ^{26}Al in bedrock [J]. *Earth Surface Processes and Landforms*, 32: 116-125.
- Lal D. 1991. Cosmic ray labeling of erosion surfaces: In situ nuclide production rates and erosion models [J]. *Earth Planetary Science Letters*, 104(91): 424-439.
- Li Guangwei, Liu Xiaohan, Huang Feixin, Kong Ping, Fink David, Wei Lijie, Fang Aimin. 2009. Preliminary study on the erratic exposure ages of Grove Mountains, East Antarctica [J]. *Chinese Journal of Polar Research*, 21(04): 265-271 (in Chinese with English abstract).
- Owen L A, Caffee M W, Bovard K R, Finkel R C, Sharma M C. 2006. Terrestrial cosmogenic nuclide surface exposure dating of the oldest glacial successions in the Himalayan orogen: Ladakh Range, northern India [J]. *Geological Society of America Bulletin*, 118(3-4): 383-392.
- Schaller M, Blanchenburg F V, Hovius N, Kubik P W. 2001. Large-scale erosion rates from in situ-produced cosmogenic nuclides in European river sediments [J]. *Earth & Planetary Science Letters*, 188(3): 441-458.

- Stone J O. 2000. Air pressure and cosmogenic isotope production [J]. *Journal of Geophysical Research*, 105 (B10): 23753 – 23759.
- Tesson J, Pace B, Benedetti L, Visini F, Rocioli M D, Arnold M, Aumaître G, Bourlès D L, Keddadouche K. 2016. Seismic slip history of the Pizzalto fault (central Apennines, Italy) using in situ – produced ^{36}Cl cosmic ray exposure dating and rare earth element concentrations [J]. *Journal of Geophysical Research Solid Earth*, 121 (3): 1983 – 2003.
- Thompson Jobe J A, Li T, Bookhagen B, Chen J, Burbank D. 2018. Dating growth strata and basin fill by combining $^{26}\text{Al}/^{10}\text{Be}$ burial dating and magnetostratigraphy: Constraining active deformation in the Pamir – Tian Shan convergence zone, NW China [J]. *Lithosphere*, 10 (6): 806 – 828.
- Xiao Xuchang, Li Tingdong. 2000. Tectonic evolution and uplift of the Qinghai – Xizang (Tibet) Plateau [M]. Guangzhou: Guangdong Science and Technology Press: 225 – 231 (in Chinese).
- Zhang Jinyu, Liu Jing, Wang Heng, Shi Xuhua, Yao Wenjing, Xu Jing, Xu Xinyue. 2018. Cosmogenic nuclides exposure dating for bedrock fault scarp: Reconstructing the paleoearthquake sequence [J]. *Seismology and Geology*, 40 (5): 1149 – 1169 (in Chinese with English abstract).

[附中文参考文献]

- 韩非, 顾兆炎, 尹功明, David F, 王躲. 2016. 宇宙成因核素 $^{26}\text{Al}/^{10}\text{Be}$ 埋藏测年法在宁夏沙坡头黄河砾石阶地年代研究中的应用 [J]. *第四纪研究*, 36 (5): 1216 – 1223.
- 黄费新, 刘小汉, 孔屏, 据宜太, 方爱民, 李潇丽, 那春光. 2004. 东南极内陆格罗夫山地区基岩暴露年龄研究 [J]. *极地研究*, 16 (01): 22 – 28.
- 黄费新, 李岩, 程杨. 2019. 原地生成宇宙成因核素测年技术思考(一): 稳态侵蚀等式解出的 ε 是当前地表侵蚀速率 [J]. *地质与勘探*, 55 (1): 145 – 151.
- 孔屏. 2002. 宇宙成因核素在地球科学中的应用 [J]. *地学前缘*, 9 (3): 41 – 48.
- 李广伟, 刘小汉, 黄费新, 孔屏, Fink D, 韦利杰, 方爱民. 2009. 东南极格罗夫山萨哈罗夫岭漂砾暴露年龄初探 [J]. *极地研究*, 21 (04): 265 – 271.
- 肖序常, 李廷栋. 2000. 青藏高原的构造演化与隆升机制 [M]. 广州: 广东科技出版社: 225 – 231.
- 张金玉, 刘静, 王恒, 石许华, 姚文婧, 徐晶, 徐心悦. 2018. 基岩断面宇宙成因核素暴露定年: 重建正断层古地震序列 [J]. *地震地质*, 40 (5): 1149 – 1169.

Consideration on the In Situ Produced Cosmogenic Nuclide Dating Technique(2): Direct Calculation of Surface Uplift Rates by A Single Sample

HUANG Feixin¹, LI Yan¹, LI Guangwei², DONG Guocheng^{3,4}, CHENG Yang¹, ZHAO Liangliang¹

(1. Research Institute of Mineral Resources, China Metallurgical Geology Bureau, Beijing 101300; 2. School of Geosciences and Engineering, Nanjing University, Nanjing, Jiangsu 210023; 3. Institute of Geoenvironments, Chinese Academy of Sciences, Xi'an, Shaanxi 710061; 4. Xi'an Accelerated Mass Spectrometry Center, Xi'an, Shaanxi 710061)

Abstract: In situ cosmogenic isotopes (e. g., ^{10}Be , ^{26}Al , and ^{36}Cl , ^{21}Ne) have been widely applied to research of geomorphologic evolution to constrain the exposure and erosion history of the earth surface. Generally, the elevation of samples is assumed invariable, thus the production rate of cosmogenic nuclides does not change with the elevation. This assumption is reasonable in tectonically stable areas. Whereas, production rates of cosmogenic nuclides can vary with elevation in tectonically active regions. Besides, in areas with great ice sheet (e. g., Antarctica), balanced rebound in the earth's crust caused by melting or thickening glaciers can also make the elevation of samples change, leading to variation of the production rate of cosmogenic nuclides. To address this issue, we derive the relationship between nuclide concentration and the mean annual increment of radiogenic nuclide production rate by three mathematical methods and explore how to calculate the uplift rate using a pair of radio – nuclides data (e. g., ^{10}Be and ^{26}Al). Furthermore, we point out the existence of an overestimate of the erosion rate calculated by cosmogenic isotopes in uplift areas. It is the first time to present a method using a pair of cosmogenic nuclides of a single rock sample to calculate the earth surface uplift rate under steady – state erosion directly, thus linking the cosmogenic nuclide method with tectonic motion research.

Key words: uplift areas, in situ cosmogenic nuclide, erosion rate, uplift rate