水文·工程·环境

doi:10.12134/j.dzykt.2019.01.014

原地生成宇宙成因核素测年技术思考(一):稳态侵蚀等式解出的ε是当前地表侵蚀速率

黄费新,李 岩,程 杨
(中国冶金地质总局矿产资源研究院,北京 101300)

[摘 要]原地生成宇宙成因核素测年技术可以方便地计算出地表的暴露年龄和侵蚀速率,从而成为研究地表演化过程的有力工具。在利用原地生成宇宙成因核素测年方法研究地表的侵蚀过程中,常常将稳态侵蚀状态下浓度与侵蚀速率的关系式所计算出的侵蚀速率当成暴露时间内的地表平均侵蚀速率,这其实是不准确的。本文通过数学计算和理论推导,证明由当前稳态侵蚀关系式解出的侵蚀速率是地表当前侵蚀速率(或称为最后恒定侵蚀速率),显然与地表平均侵蚀速率所代表的地质含义是不同的。

[关键词] 原地生成宇宙成因核素 稳态侵蚀 当前侵蚀速率
[中图分类号]O572.19 [文献标识码]A [文章编号]0495-5331(2019)01-07

Huang Feixin, Li Yan, Cheng Yang. Consideration on *in situ* produced cosmogenic nuclide dating techniques(1): ε solved by steady-state erosion equation is the current surface erosion rate[J]. Geology and Exploration, 2019, 55(1): 0145-0151.

0 引言

原地生成宇宙成因核素测年技术是最近几十年发展最为迅速的地表演化过程量化研究方法之一,被广泛应用于暴露和埋藏年龄、侵蚀速率、新构造运动等领域,其研究成果引人瞩目(Nishiizumi et al., 1986;1989;Lal,1991;Cerling et al.,1994;顾兆炎等,1997;Bierman et al.,1999;Stone,2000;Dunai,2000;胡二伢等,2011;孔屏等2012)。相对于国外长期致力于方法学研究而言(Nishiizumi et al.,1986;1989;Lal,1991;Cerling et al.,1994;Bierman et al.,1999;Dunai,2000;Stone,2000),国内研究往往注重将该方法具体运用于不同地点的模仿研究。在暴露/埋藏年龄、侵蚀速率的计算方式程序化、网络化以后(黄费新等,2004;李储华等,2004;顾兆炎等,2006;张会平等,2007;黄湘通等,2013;赵国庆等,2013;郑勇等,2014;马严等,2015;崔丽峰等,2015;胡凯等,2015;陈清敏等,2018),更少进行方法学本身地质意义的进一步研究和探讨,甚至往往只利用程序的计算结果,对计算过程和原理的了解都不再深入。在科学研究实践中,创新型研究方法的建立优于具体地点模仿型的运用,古人云"授人以鱼不如授之以渔",从自我认知角度出发,也可以认为"受人之鱼不如学人之渔,学人之渔不如摸索自己养鱼"。当我们深入理解了原地生成宇宙成因核素测年技术计算过程的推理过程,可以促进我们对一些特殊的地表演化过程的研究方法进行数学探索。有鉴于此,本文先将宇宙成因核素测年技术中的计算等式进行系统的微分方程求解推导,并对常用的地表稳态侵蚀状态下计算出的所谓"平均侵蚀速率"的地质意义进行了再思考。后续我们将对一些目前尚未开展广泛研究的一些特殊地表演化过程如地表升降(高原抬升、冰盖消涨导致的地壳反弹等)、湖泊消失、侵蚀速率变化等特殊地表过程,利用原地生成宇宙成因核素测年技术如何开展研究进行数学推导,以期抛砖引玉,对未来利用原地生成宇宙成因核素方法解决更复杂的地表演化过程带来有益的启示。

[收稿日期]2018-11-04;[改回日期]2019-01-07;[责任编辑]郝情情。
[基金项目]国家重点研发计划项目(编号:2016YFC0600207)和自然科学基金面上项目(编号:41873064)联合资助。
[第一作者]黄费新(1974年-),男,教授级高级工程师,从事构造地质学与极地地质研究。E-mail:huangfeixin@cmgb.cn。
[通讯作者]李 岩(1988年-),男,工程师,从事岩石学及矿床学研究。E-mail:liyan@cmgb.com。

1 原地生成宇宙成因核素测年计算等式的微分推导过程

1.1 放射性核素浓度衰变等式的推导

这一过程的数学推导相对简单,往往在大学的高等数学教材中作为求解常微分方程的例题。下面等式对应的地质含义是放射性核素的瞬时浓度变化等于因衰变导致浓度(N)的减少,其中 λ 是放射性核素的衰变常数:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda \mathrm{d}t$$

两边积分(通常积分过程中,增加的常数项用 C 表示,但这里为了计算方便,常数项用 $\ln C$):

$$\ln N = -\lambda t + \ln C$$

$$N = e^{-\lambda t + lnC} = Ce^{-\lambda t}$$

代入初始条件即 $t=0$ 时 $N=N_0$,得:

$$N_0 = Ce^{-\lambda \cdot 0} = C$$

即常数 $C=N_0$,最后解出放射性核素浓度衰变等式:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{1}$$

稳定核素可视为衰变常数为无穷小的特殊放射性核素,后面我们统称核素不再区分。

1.2 简单暴露历史浓度等式的推导

简单暴露历史指无侵蚀一次性暴露历史,设暴露时新生核素生成速率为 P,核素浓度的瞬时变化是原浓度因衰变的减少和新生核素浓度的叠加:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N + P$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{-\lambda N + P} = \mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{-\lambda}\frac{\mathrm{d}(-\lambda N + P)}{-\lambda N + P} = \mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}(-\lambda N + P)}{-\lambda N + P} = -\lambda \mathrm{d}t$$

两边积分:

$$\ln(-\lambda N + P) = -\lambda t + \ln C$$

$$-\lambda N + P = \mathrm{e}^{-\lambda t + \ln C}$$

$$-\lambda N + P = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

因为为一次性暴露,则初始条件为 $t=0$ 时,$N=0$,得:

$$0 + P = C\mathrm{e}^{-\lambda \cdot 0} = C$$

即常数 $C=P$,代回:

$$-\lambda N + P = P\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

最后解出核素浓度与暴露时间的计算等式:

$$N = \frac{P\mathrm{e}^{-\lambda t} - P}{-\lambda}$$

$$N = \frac{P}{\lambda}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) \tag{2}$$

有时将等式(2)改写为 t 的表达式,这就是宇宙成因核素测年技术中关于最小暴露年龄 t 的求解等式(Lal,1991):

$$t = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(1 - \frac{\lambda}{P}N\right) \tag{3}$$

关于式(2)要说的是,当 $T \gg 1/\lambda$ 时,$\mathrm{e}^{-\lambda t} \approx 0$,式(2)可改写为 $N = P/\lambda$,是一个与时间无关的等式,意味着核素浓度不再随时间变化,由于在地表演化历史研究中没有广泛用途,在此不展开讨论。

等式(2)和(3)通常只在研究侵蚀特别微弱的地区(如南极),或者暴露时间很短可忽略侵蚀的影响(如末次冰期以来)的地表演化历史时才适用。

1.3 侵蚀状态下核素浓度等式的推导

设核素生成速率为 P,地表侵蚀速率为 ε(一般以 cm/a 为单位),浓度等式的推导过程如下:

首先,在原地生成宇宙成因核素测年技术的建立过程中,明确了地下 x cm 深度处核素的生成速率与地表核素生成速率呈指数衰减的关系,即 $P_x = P\mathrm{e}^{-\frac{\rho}{\Lambda}x}$($\rho$ 是岩石密度,Λ 是核素吸收深度常数,该深度处核素生成速率减小为地表时的 1/e)(Lal,1991),那么以 x cm 处岩石为考察对象:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N + Pe^{-\frac{\rho}{\Lambda}x}$$

设总暴露时间为 T,在 $0-T$ 时间内,随着侵蚀样品从深部接近地表,t 时刻深度 x(cm)可由 $x=\varepsilon(T-t)$ 确定:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N + P\mathrm{e}^{-\frac{\rho}{\Lambda}\varepsilon(T-t)}$$

解该微分方程,需先解方程 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = -\lambda N$,解得 $N = Ce^{-\lambda t}$。此时替换常数 C 为 t 的函数 u,即设:

$$N = u\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

那么根据分步求导法则:

$$N' = u'\mathrm{e}^{-\lambda t} + u(-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

代回 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N + P\mathrm{e}^{-\frac{\rho}{\Lambda}\varepsilon(T-t)}$:

$$u'\mathrm{e}^{-\lambda t} + u(-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda t} = -\lambda u\mathrm{e}^{-\lambda t} + Pe^{-\frac{\rho}{\Lambda}\varepsilon(T-t)}$$

$$u'\mathrm{e}^{-\lambda t} = P\mathrm{e}^{-\frac{\rho}{\Lambda}\varepsilon(T-t)}$$

$$u' = P\mathrm{e}^{-\frac{\rho}{\Lambda}\varepsilon(T-t)}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

为方便书写,令 $\delta = \rho\varepsilon/\Lambda$:

$$u' = P\mathrm{e}^{-\delta(T-t)}\mathrm{e}^{\lambda t} = P\mathrm{e}^{-\delta T}\mathrm{e}^{(\delta+\lambda)t}$$

两边积分:

$$u = \int P e^{-\delta T}\mathrm{e}^{(\delta+\lambda)t}\mathrm{d}t$$

$$u = P\mathrm{e}^{-\delta T}\int \mathrm{e}^{(\delta+\lambda)t}\mathrm{d}t$$

$$u = \frac{P\mathrm{e}^{-\delta T}}{\delta+\lambda}\int \mathrm{e}^{(\delta+\lambda)t}\mathrm{d}((\delta+\lambda)t)$$

$$u = \frac{P\mathrm{e}^{-\delta T}}{\delta+\lambda}\mathrm{e}^{(\delta+\lambda)t} + C$$

将 $u = N\mathrm{e}^{\lambda t}$ 代回来:

$$N\mathrm{e}^{\lambda t} = \frac{P\mathrm{e}^{-\delta T}}{\delta+\lambda}\mathrm{e}^{(\delta+\lambda)t} + C$$

代入初始条件即 $t=0$ 时,$N=0$,解出常数 C:

$$0 = \frac{P\mathrm{e}^{-\delta T}}{\delta+\lambda} + C$$

$$C = -\frac{P\mathrm{e}^{-\delta T}}{\delta+\lambda}$$

最后解出放射性核素浓度衰变等式:

$$N\mathrm{e}^{\lambda t} = \frac{P\mathrm{e}^{-\delta T}}{\delta+\lambda}\mathrm{e}^{(\delta+\lambda)t} - \frac{P\mathrm{e}^{-\delta T}}{\delta+\lambda}$$

$$N = \frac{P\mathrm{e}^{-\delta T}}{\delta+\lambda}\mathrm{e}^{(\delta+\lambda)t}\mathrm{e}^{-\lambda t} - \frac{P\mathrm{e}^{-\delta T}}{\delta+\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

因为是关于当前浓度与侵蚀速率的关系等式,即 $t=T$:

$$N = \frac{P\mathrm{e}^{-\delta T}}{\delta+\lambda}\mathrm{e}^{(\delta+\lambda)T}\mathrm{e}^{-\lambda T} - \frac{P\mathrm{e}^{-\delta T}}{\delta+\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda T}$$

$$N = \frac{P\mathrm{e}^{-\delta T}\mathrm{e}^{(\delta+\lambda)T}\mathrm{e}^{-\lambda T}}{\delta+\lambda} - \frac{P\mathrm{e}^{-\delta T}\mathrm{e}^{-\lambda T}}{\delta+\lambda}$$

$$N = \frac{P}{\delta+\lambda} - \frac{P\mathrm{e}^{-\lambda T-\delta T}}{\delta+\lambda}$$

$$N = \frac{P}{\delta+\lambda}(1-\mathrm{e}^{-(\delta+\lambda)T})$$

将 $\delta = \rho\varepsilon/\Lambda$ 代回来:

$$N = \frac{P}{\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda\right)T}\right) \tag{4}$$

这就是侵蚀速率恒定为 ε 的情况下地表核素浓度的计算等式(t 和 T 对最终等式而言是等价的,后略)。从推导过程可知,在计算过程中已经假设侵蚀速率 ε 恒定。到这一步时,若认为 ε 也可近似代表地表侵蚀速率变化不大的情况下的平均侵蚀速率,是没有什么太大问题的,短期暴露时视侵蚀速率恒定(或认为 ε 近似代表侵蚀速率平均值)可以接受,因为如果考虑 ε 有明显变化,推导过程复杂程度将大大增加。

2　稳态侵蚀状态等式解出的侵蚀速率 ε 的地质含义的数学推理

2.1　稳态侵蚀状态等式解出的侵蚀速率不是暴露期间的平均侵蚀速率

根据等式(4),在暴露时间长到超过一定的阀值后(即 $T \gg 1/(\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda)$),地表核素的浓度将不再随时间增加,此时称核素达到稳态浓度(也称平衡浓度、饱和浓度),相应地将这种状态称为地表处于稳态侵蚀状态。其数学意义是,$T \gg 1/(\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda)$ 时,$\mathrm{e}^{-\left(\lambda+\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}\right)T} \approx 0$。此时等式(4)简化为:

$$N = \frac{P}{\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda} \tag{5}$$

等式(5)就是稳态侵蚀状态等式,也与时间无关,表明核素浓度不再随时间变化而变化。根据等式(5)解出的侵蚀速率 ε,通常称为最大侵蚀速率,其含义是地表可能并未达到稳态侵蚀,由等式(5)解出的 ε 是地表侵蚀速率的最大可能值,其潜在前提包括了 ε 值是恒定的。如果已达稳态侵蚀,那么“最大”的含义就不复存在,ε 就代表地表侵蚀速率。若 ε 不恒定,以往就将稳态侵蚀状态等式解出的 ε 看成平均侵蚀速率。

现实情况下,地表环境“山无棱,江水为竭,春雷震震,夏雨冬雪”的演化过程中,一定伴随着侵蚀速率的变化,侵蚀速率的变化必将影响稳态侵蚀状态的稳定。而且地表演化是一个动态过程,地表达到稳态侵蚀状态一般需要较长时间,不能视为短期过程,更不用说稳态侵蚀状态也可能持续存在了更长的时间,这么长时间视 ε 一直保持恒定不太符合实际情况,那么等式(5)解出的 ε 是否等于暴露期间的平均侵蚀速率呢?

首先设想一个相对简单的问题,把暴露总时间 T 平均分为两段即 $T_1 = T_2 = T/2$,T_1 时侵蚀速率恒定为 ε,T_2 开始侵蚀速率突然由 ε 提高,恒定为 3ε,T_1 和 T_2 都分别长到足以独立地使地表达到稳态侵蚀状态,设 T_1 结束时地表达到初期的稳态侵蚀状态时核素浓度为 N_1,而 T_2 结束时(目前)地表又已经处于新的稳态侵蚀状态,核素浓度为 N_2(即当前浓度 N)。

T_1 时间段结束时,根据等式(5),下式成立没问题:

$$N_1=\frac{P}{\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda}$$

而 T_2 结束时，到底是 $N_2=\frac{P}{\frac{\rho\left(\frac{1+3}{2}\right)\varepsilon}{\Lambda}+\lambda}$ 还是 $N_2=\frac{P}{\frac{3\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda}$ 成立？初步认为前者不成立，因为极端思考，T_2 时间特别长如 $T_2=1000/\left(\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda\right)$，那么至 T_2 结束，T_1 时间内的核素浓度 N_1 早已衰变殆尽，T_1 时间内的侵蚀速率对 T_2 结束时的浓度没有影响。

以下进行数学推理：

暴露总时间 T 不等分划分为 T_1 和 T_2。T_2 时间段内地表侵蚀速率由 T_1 时间段的 ε_1 增加 $\Delta\varepsilon$ 变为 $\varepsilon_2=\varepsilon_1+\Delta\varepsilon$，那么 T_2 结束时位于地表的样品在 T_2 开始（关注点从此时开始，设此时 $t=0$）时尚处于 ε_2T_2 深度处，而从 T_2 开始到 T_2 结束之间某个时刻 t，样品应处于 $\varepsilon_2(T_2-t)$ 深度处：

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-\lambda N+P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}(T_2-t)}$$

类似前面解法，解上式可得：

$$N\mathrm{e}^{\lambda t}=\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda}\mathrm{e}^{\left(\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda\right)t}+C$$

此时求解常数 C 稍有不同之处，因为 $t=0$ 时 $N\neq0$ 了，此时样品位于 ε_2T_2 深度处，根据 T_1 时的浓度等式，此时刚好 T_1 结束，该深度处的生成速率为 $P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}$，浓度则应该是 $N=\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda\right)T_1}\right)$，解出 C：

$$\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda\right)T_1}\right)\mathrm{e}^{\lambda\cdot0}=\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda}\mathrm{e}^{\left(\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda\right)\cdot0}+C$$

$$C=\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda\right)T_1}\right)-\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda}$$

将 C 代回原来的等式中：

$$N\mathrm{e}^{\lambda t}=\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda}\mathrm{e}^{\left(\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda\right)t}+\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda\right)T_1}\right)-\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda}$$

$$N=\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda}\mathrm{e}^{\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}t}+\left(\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda\right)T_1}\right)-\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

最后时刻（即当前），因 $t=T_2$，故：

$$N=\frac{P}{\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda}+\left(\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda\right)T_1}\right)-\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda T_2}$$

$$N=\frac{P}{\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda\right)T_2}\right)+\frac{P\mathrm{e}^{-\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda\right)T_1}\right)\mathrm{e}^{-\lambda T_2}$$

判断上式含义比较直观，即当前的浓度等于 T_2 期间生成并存留至今的浓度和 T_1 期间的浓度的至今衰变留存量之和，因此等式应是合理的。

设此时为稳态侵蚀状态，对应的侵蚀速率为 ε：

$$\frac{P}{\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda}=\frac{P}{\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda\right)T_2}\right)+\frac{P\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda\right)T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda\right)T_1}\right)$$

$$\varepsilon=\frac{\Lambda}{\rho}\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda\right)T_2}\right)+\frac{\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda\right)T_2}}{\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_1}{\Lambda}+\lambda\right)T_1}\right)}-\lambda\right)\quad(6)$$

等式(6)关于 ε 的求解表达式比较复杂,但可判断 ε 不会等于暴露期间 T 内的平均侵蚀速率(即 $\varepsilon \neq (\varepsilon_1 T_1 + \varepsilon_2 T_2)/(T_1 + T_2)$),只有在 $T_2 \gg 1/(\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda} + \lambda)$ 时,即 $e^{-\left(\frac{\rho\varepsilon_2}{\Lambda}+\lambda\right)T_2} \approx 0$ 条件下,化简等式(6)可解得 $\varepsilon = \varepsilon_2$。

2.2　稳态侵蚀状态等式解出的侵蚀速率 ε 也不是最小暴露年龄以来时间段的平均侵蚀速率

最小暴露年龄是假设侵蚀速率为 0,由样品浓度计算得到的暴露年龄。最小暴露年龄可由(3)式求得,小于实际暴露年龄,可以认为其只代表了暴露时间的末段(如果实际侵蚀速率很大,也可能代表的时间段比较长)。许多年轻样品如末次冰期以来的冰川漂砾,暴露时间短,其浓度并未达到稳态浓度,这时候讨论假设其达到稳态侵蚀状态,解出的侵蚀速率是否为暴露期间的平均侵蚀速率并无多大意义,所以实践上一般仅解出最小暴露年龄。我们只简单讨论暴露时间足够长,使样品达到稳态侵蚀状态时,解出的侵蚀速率与最小暴露年龄以来的时间段内的平均侵蚀速率有无关系。

类似地,设最小暴露年龄时间段也分为不相等的时间 T_1、T_2,T_1 期间(也可包括 T_1 之前)的侵蚀速率为 ε_1,T_2 期间侵蚀速率变为 $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \Delta\varepsilon$。同理,设最后达到稳态侵蚀状态,由等式(6)解出的 ε,也不会是最小暴露年龄时间段以来的平均侵蚀速率($\varepsilon \neq (\varepsilon_1 T_1 + \varepsilon_2 T_2)/(T_1 + T_2)$)。

2.3　稳态侵蚀状态等式解出的侵蚀速率 ε 是当前侵蚀速率

首先我们进行简单的逻辑推理:

考查侵蚀速率为 0 和侵蚀速率恒定为 ε 时的核素浓度与时间的等式:

$$N = \frac{P}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

$$N = \frac{P}{\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda} + \lambda}\left(1 - e^{-\left(\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda\right)t}\right)$$

二者结构一致,只不过前式中的衰变常数 λ 变成了后式中的 $\rho\varepsilon/\Lambda + \lambda$,因此可以将有侵蚀的效果视同是对核素衰变常数的校正,即侵蚀产生的效果是衰变常数为 λ 的一种放射性核素,在恒定侵蚀速率 ε 的情况下 t 时间内达到的浓度,等同于衰变常数为 $\rho\varepsilon/\Lambda + \lambda$ 的另外一种假设的放射性核素在无侵蚀速率下 t 时间内达到的浓度。以此思维方式再去考察稳态侵蚀状态下的核素浓度计算等式 $N = \frac{P}{\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda} + \lambda}$,显然随着 ε 变化 N 会随之相应变化。然而,ε 变化只不过是对假设的核素进行再次修改为另一种新的假设核素,达到新的稳态侵蚀浓度,这种由原来稳态侵蚀状态调整为新的稳态侵蚀状态的过程,可暂称为变稳态侵蚀状态。达成新稳态侵蚀状态需要的时间与 ε 的变化 $\Delta\varepsilon$ 大小密切相关。变稳态侵蚀状态其实是与 ε 相对应的一种动态平衡,那么达到最终的稳态侵蚀状态时,通过等式(5)解出的 ε 是最终稳态侵蚀状态下的侵蚀速率。在变稳态侵蚀状态过程中,如 $\Delta\varepsilon$ 足够小,则修正所需时间足够短,所以,如果地表目前正处于稳态侵蚀状态,等式(5)解出的侵蚀速率 ε 仅代表目前的地表侵蚀速率。

从稳态侵蚀状态的定义出发对 ε 含义进行推导,稳态侵蚀状态就是每年地表核素浓度无变化的状态,侵蚀速率为 ε 时,可等同于衰变常数为($\rho\varepsilon/\Lambda + \lambda$)的无侵蚀速率的情况,那么在当前一年时间内(此时 $t = 1$),核素的衰变和侵蚀造成的浓度减小量(即稳态浓度减去其衰变和侵蚀一年后的浓度的差值)等于这一年的新生核素浓度。即:

$$\left(\frac{P}{\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda} + \lambda}\right) - \left(\frac{P}{\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda} + \lambda}\right)e^{-\left(\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda\right)\cdot 1} = \left(\frac{P}{\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda} + \lambda}\right)\left(1 - e^{-\left(\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda\right)\cdot 1}\right)$$

等式左右只相差一个括号而已,因此上式中的 ε 首先代表的是最后一年的 ε。如果在距今若干年内是稳态侵蚀状态,而侵蚀速率是保持不变的,则 ε 代表这距今若干年内恒定的侵蚀速率。

最后,我们计算一下在侵蚀速率增加很小值 $\Delta\varepsilon$ 时,需要多长时间 Δt 以达到新的稳态侵蚀状态。

对等式(5)两边关于 ε 求导,其意义是侵蚀速率的微小变化导致稳态浓度的相应变化:

$$N' = \left(\frac{P}{\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda} + \lambda}\right)' = -\frac{\rho}{\Lambda}\frac{P}{\left(\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda} + \lambda\right)^2}$$

那么根据导数的意义 $\Delta N = N'\Delta\varepsilon$,即侵蚀速率的变化对应的稳态浓度的变化:

$$\Delta N = -\frac{P\frac{\rho}{\Lambda}}{\left(\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda} + \lambda\right)^2}\Delta\varepsilon$$

由侵蚀速率为 $\varepsilon + \Delta\varepsilon$,未达稳态侵蚀状态时的

浓度计算等式,关于时间求导,可得到浓度的年变化值(新生和衰变的综合效果)大小:

$$N' = \left(\frac{P}{\frac{\rho(\varepsilon+\Delta\varepsilon)}{\Lambda}+\lambda} \left(1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho(\varepsilon+\Delta\varepsilon)}{\Lambda}+\lambda\right)t}\right) \right)' = P\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho(\varepsilon+\Delta\varepsilon)}{\Lambda}+\lambda\right)t}$$

因此时 $t = T$,所以此时浓度年变化值为 $P\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho(\varepsilon+\Delta\varepsilon)}{\Lambda}+\lambda\right)T}$。此后随时间增加浓度开始衰变,浓度年变化值会逐年略微减小,但为计算简便考虑,在很短时间 Δt 内视其基本不变。

因此重新达到稳态侵蚀状态需要时间与侵蚀速率变化的大小有关:

$$\Delta t \approx \frac{-\frac{P\frac{\rho}{\Lambda}}{\left(\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda\right)^2}\Delta\varepsilon}{P\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho(\varepsilon+\Delta\varepsilon)}{\Lambda}+\lambda\right)T}} = -\frac{\frac{\rho}{\Lambda}}{\left(\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda\right)^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho(\varepsilon+\Delta\varepsilon)}{\Lambda}+\lambda\right)T}}\Delta\varepsilon$$

等式右侧除 $\Delta\varepsilon$ 外的值为常数,$\mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho(\varepsilon+\Delta\varepsilon)}{\Lambda}+\lambda\right)T}$ 可视为 $\approx \mathrm{e}^{-\left(\frac{\rho\varepsilon}{\Lambda}+\lambda\right)T}$,所以当 $\Delta\varepsilon$ 较小时,Δt 与 $\Delta\varepsilon$ 大致成正比关系。当侵蚀速率变化 $\Delta\varepsilon$ 趋近于 0,重新调整成新的稳态侵蚀状态所需时间 Δt 也趋近于 0。

综上所述,不管通过何种具体过程,在地表首次达到稳态侵蚀状态后,随着侵蚀速率每次有所改变,稳态浓度也随之调整。所以,利用稳态侵蚀状态等式解出的侵蚀速率 ε 是当前的侵蚀速率(即最后保持不变的侵蚀速率),而不是暴露期间的平均侵蚀速率。以前常将 ε 当成暴露期间的平均侵蚀速率,只能视为是侵蚀速率只有很小变化的情况下的一种近似处理。

稳态侵蚀状态下解出的侵蚀速率仅代表当前侵蚀速率,那么历史侵蚀速率发挥了什么作用呢? 历史侵蚀速率决定了达到稳态侵蚀状态所需时间的长短,历史侵蚀速率较低的地区其达到首次稳态侵蚀状态所需时间较长,而历史侵蚀速率较高的地区达到首次稳态侵蚀状态所需时间较短。每当侵蚀速率有改变时,调整到新的稳态侵蚀状态所需的时间 Δt 与侵蚀速率改变值的大小 $\Delta\varepsilon$ 正相关。

3 结论

利用原地生成宇宙成因核素研究地表演化历史时,把地表处于稳态侵蚀状态下计算出的侵蚀速率当成暴露时间内的平均侵蚀速率是不准确的。在侵蚀速率不断发生变化时,在当前稳态侵蚀状态下解出的侵蚀速率仅是稳态侵蚀状态下地表当前不变的侵蚀速率。历史侵蚀速率只和达到稳态侵蚀状态所需时间长短相关。

[References]

Bierman P R, Marsella K A, Patterson C, Davis P T, Caffee M. 1999. Mid – Pleistocene cosmogenic minimum – age limits for pre – Wisconsinan glacial surfaces in southwestern Minnesota and southern Baffin Island: A multiple nuclide approach[J]. Geomorphology, 27(1): 25 – 39.

Cerling T E, Craig H. 1994. Geomorphology and in – situ cosmogenic isotopes[J]. Annual Review of Earth and Planetary Sciences, 22: 273 – 317.

Chen Qingli, Zhang Li, Wang Zhe, Luo Qianzhou, Lin Xinwang, Zhang Junliang, Ren Juangang. 2018. Cosmogenic nuclides $^{26}Al/^{10}Be$ burial ages of Dafo Cave in Hanzhong, Shaanxi, China[J]. Journal of Earth Enviroment, 9(1): 38 – 44 (in Chinese with English abstract).

Cui Lifeng, Liu Congqiang, Xu Sheng, Zhao Zhiqi, Tu Chenglong, Liu Taoze, Ding Hu. 2014. The long – term denudation rate of granitic regolith in Qinhuangdao, North China determined from the in situ depth pro – file of the cosmogenic nuclides ^{26}Al and ^{10}Be[J]. Chinese Science Bulletin, 59: 4823 – 4828 (in Chinese with English abstract).

Dunai T. J. 2000. Scaling factors for production rates of in situ produced cosmogenic nuclides: A critical reevaluation[J]. Earth and Planetary Science Letters, 176: 157 – 169.

Gosse J C, Phillips F M. 2001. Terrestrial in situ cosmogenic nuclides: Theory and application[J]. Quaternary Science Reviews, 20: 1475 – 1560.

Gu Zhaoyan, Xu bing, Lv Yanwu, A. Aldahan, D. Lal. 2006. A report on ^{10}Be dating of terrace surfaces in Nujiang River valley[J]. Quaternary Sciences, 2: 293 – 294 (in Chinese with English abstract).

Hu Erya, Li Yang, Zhao ZhiJun. 2011. Calculating erosion rate of drainage basin by ^{10}Be and ^{26}Al measurements: Theory and application [J]. Bulletin of Soil and Water Conservation, 31(3): 103 – 107 (in Chinese with English abstract).

Hu Kai, Fang XiaoMin, Zhao ZhiJun, Darryl Granger. 2015. Erosion rates of northern Qilian Shan revealed by cosmogenic ^{10}Be[J]. Advances in Earth Science, 30(2): 268 – 275 (in Chinese with English abstract).

Huang Xiangtong, Zheng Hongbo, John Chappell, Wang Ping. 2013. Characteristics of cosmogenic nuclide ^{18}Be in the Yangze River in the sediment and estimations of erosion rate[J]. Quaternary Sciences, 33(4): 671 – 683 (in Chinese with English abstract).

Kong Ping. 2012. Cosmogenic nuclide burial dating: Theory and application[J]. Quaternary Sciences, 32(3): 388 – 393 (in Chinese with English abstract).

Lal D. 1991. Cosmic ray labeling of erosion surfaces: In situ nuclide production rates and erosion models[J]. Earth and Planetary Science Letters, 104: 424 – 439.

Li Chuhua, Ji Youliang, Zhang Shiqi, Zhao Junqing. 2004. Estimation of exposure time and erosion rate as well as thickness of erosion surface

using cosmogenic nuclides ^{10}Be and ^{26}Al[J]. Journal of the University of Petroleum, China(Edition of Natural Science), 21(1): 1 - 4, 137(in Chinese with English abstract).

Ma Yan, Wu Yang, Pang Jianzhang, Zhang Huiping, Zheng Dewen. 2015. Theory and application of the stable cosmogenic nuclide ^{21}Ne dating method[J]. Seismology and Geology, 37(1): 242 - 255(in Chinese with English abstract).

Nishiizumi K, Lal D, Klein J, Middleton R, Arnodl J R. 1986. Production of ^{10}Be and ^{26}Al by cosmic rays in terrestrial quartz in situ and implications for erosion rates[J]. Nature, 319: 134 - 136.

Nishiizumi K, Winterer E L, Kohl C P, Klein J. 1989. Middleton R. Cosmic ray production rates of ^{10}Be and ^{26}Al in quartz from glacially polished rocks[J]. Journal of Geophysical Research, 94: 17907 - 17915.

Stone J O. 2000. Air pressure and cosmogenic isotope production[J]. Journal of Geophysical Research, 105: 23753 - 23759.

Zhang Huiping, Zhang Peizhen, Zheng Wenjun, Zheng Dewen, Chen Zhengwei. 2007. Active tectonic rates constrained by terrestrial in situ cosmogenic nuclides dating[J]. Seismology and Geology, 29(2): 418 - 430(in Chinese with English abstract).

Zhao Guoqing, Zhang Li, Wu Zhenkun, Xian feng, Kong Xianghui. 2013. Tracing Paleoenvironment Changes with Cosmogenic Nuclides ^{10}Be and ^{26}Al[J]. Arid Zone Research, 30(3): 534 - 540(in Chinese with English abstract).

Zheng Yong, Jia Jun, Nie Xike, Kong Ping. 2014. Cosmogenic nuclide burial age of the Sanying Formation and its implications[J]. Science China: Earth Sciences, 40(7): 1141 - 1149(in Chinese with English abstract).

[附中文参考文献]

陈清敏,张丽,王　喆,罗乾周,蔺新望,张俊良,任娟刚. 2018. 汉中大佛洞宇宙成因核素 ~(26)Al/ ~(10)Be 埋藏年龄[J]. 地球环境学报, 9(1): 38 - 44.

崔丽峰,刘丛强,徐　胜,赵志琦,涂成龙,刘涛泽,丁　虎. 2015. 秦皇岛花岗岩风化壳的剥蚀速率:宇宙成因核素 ~(26)Al 与 ~(10)Be 的研究[J]. 科学通报, 60(4): 424.

顾兆炎,许　冰,吕延武,A. Aldahan, D. Lal. 2006. 怒江峡谷构造地貌的演化:阶地宇宙成因核素定年的初步结果[J]. 第四纪研究, 26(2): 293 - 294.

胡二伢,李　颖,赵志军. 2001. 利用宇宙成因核素 ~(10)Be, ~(26)Al 估算流域侵蚀速率的原理与应用[J]. 水土保持通报, 31(3): 103 - 107.

胡　凯,方小敏,赵志军,Darryl Granger. 2015. 宇宙成因核素 ~(10)Be 揭示的北祁连山侵蚀速率特征[J]. 地球科学进展, 30(2): 268 - 275.

黄湘通,郑洪波,John Chappell,王　平. 2013. 长江流域河流沉积物宇宙成因核素 ~(10)Be 特征与侵蚀速率估算[J]. 第四纪研究, 33(4): 671 - 683.

孔　屏. 2012. 宇宙成因核素埋藏年龄法:原理及应用[J]. 第四纪研究, 32(3): 388 - 393.

李储华,纪友亮,张世奇,赵俊青. 2004. 应用宇宙成因核素 ~(10)Be 和 ~(26)Al 估算剥蚀面的暴露时间及剥蚀速率和剥蚀厚度[J]. 石油大学学报(自然科学版), 28(1): 1 - 4, 137.

马　严,武　颖,庞建章,张会平,郑德文. 2015. 宇宙成因核素 ~(21)Ne 测年原理和应用[J]. 地震地质, 37(1): 242 - 255.

张会平,张培震,郑文俊,郑德文,陈正位. 活动构造研究中相关速率的原地宇宙成因核素年代学约束[J]. 地震地质, 29(2): 418 - 430.

赵国庆,张　丽,武振坤,鲜　锋,孔祥辉. 2013. 应用宇宙成因核素 ~(10)Be 和 ~(26)Al 追溯环境变迁过程[J]. 干旱区研究, 30(3): 534 - 540.

郑　勇,贾　君,聂喜柯,孔　屏. 2014. 云南三营组宇宙成因核素埋藏年龄及成因[J]. 中国科学:地球科学, 44(7): 1443 - 1451.

Consideration on In - Situ Produced Cosmogenic Nuclide Dating Techniques(1): ε Solved by Steady - State Erosion equation is the Current Surface Erosion Rate

HUANG Feixin, LI Yan, CHENG Yang

(*Research Institute of Mineral Resources, China Metallogical Geological Bureau, Beijing*　101300)

Abstract: In - situ produced cosmogenic nuclide dating technology can easily calculate the exposure age and erosion rate of earth surface, which has thus become a powerful tool for researching the performance and processofearth surface. When studying the surface erosion by using the in situ produced cosmogenic nuclide dating method, the erosion rate calculated by the relationship between the concentration and the erosion rate in the steady state erosion state is often regarded as the average surface erosion rate during the exposure time. In fact, it is not accurate. Through mathematical calculations and theoretical derivation, it is proved that the erosion rate solved by the current steady - state erosion relationship is the current surface erosion rate(or the final constant erosion rate), which is obviously different from the geological meaning represented by the surface average erosion rate.

Key words: in situ cosmogenic nuclide, steady erosion state, current erosion rate