

基于 MATLAB 的均质土坡稳定可靠度的蒙特卡罗模拟

杨 明^{1,2}, 张可能¹, 刘宇飞³, 杨庆光⁴

(1. 中南大学地学与环境工程学院, 长沙 410083; 2. 广州市南沙区建设工程质量安全监督站, 广州 511455; 3. 中南大学土木建筑学院, 长沙 410075; 4. 湖南工业大学岩土工程研究所, 株洲 412008)

[摘 要] 根据 Bishop 条分法建立均质土坡的可靠度计算模型, 利用 MATLAB 进行蒙特卡罗方法模拟的程序实现, 进行均质土坡的可靠度模拟计算。结果表明土性参数 c 、 φ 在正态分布或对数正态分布情况下, 对于边坡可靠度基本没有影响。并将其应用于工程实例分析, 取得良好效果, 说明可靠度分析方法是传统的确定性分析方法的有益补充。

[关键词] 可靠度 蒙特卡罗模拟 MATLAB

[中图分类号] TU433 [文献标识码] A [文章编号] 0495-5331(2009)01-0089-06

边坡的稳定分析是工程地质的重要研究课题之一, 建立在刚塑性体模型基础上的破坏理论, 是古典土力学解决土质边坡稳定的核心。边坡稳定分析经历一百多年来的研究, 内容十分丰富, 总体上来说, 边坡稳定分析有确定性分析方法, 可靠度分析方法和模糊方法^[1-5]。

1 边坡可靠性的蒙特卡罗模拟方法

蒙特卡洛法^[6-8]是一种风格独特的数值计算方法, 又称为随机模拟法 (Random simulation), 随机抽样法 (Random sampling) 或统计试验法 (Statistical testing), 它既能求解确定性的数学问题, 也能够求解随机性的问题。

假设所要求的量 x 是随机变量 ξ 的数学期望 $E(\xi)$, 那么近似确定 x 的方法是对 ξ 进行 N 次重复抽样, 产生相互独立的 ξ 值的序列 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, 并计算其算术平均值:

$$\bar{\xi}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n \tag{1}$$

根据柯尔莫哥罗夫加强大数定理有

$$P(\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\xi}_N = x) = 1 \tag{2}$$

因此, 当 N 足够大时, 可以用 $\bar{\xi}_N$ 作为所求量 x 的估计值, 而且可以用样本方差 $\sigma^2(\bar{\xi})$ 作为理论方差的估计值。

蒙特卡洛方法可以解决各种类型的问题。在边坡工程的可靠性分析中, 也能够用蒙特卡洛法得出

可靠度的近似值, 设边坡的功能函数为

$$Z = g(x_1, x_2, \dots, x_m) \tag{3}$$

式中, $x_1, x_2, \dots, x_m$ 为 m 个具有一定分布、统计独立的随机变量, 假定它们的统计量已知。如果把状态函数定义为安全系数, 则可根据从各随机变量 x_i 中抽取同分布变量的 $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ 由上式求得安全系数的一个随机样本 Z' , 重复上述过程至达到预期精度的次数 N 。设在 N 次随机抽样的试验中, 出现 $Z \leq 1$ 的次数为 M , 则边坡破坏概率为:

$$p_f = \frac{M}{N} \tag{4}$$

当 N 足够大时, 可以由安全系数的统计样本比较精确地近似安全系数的分布函数, 并估计其分布参数:

$$\mu_z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \tag{5}$$

$$\sigma_z = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu_z)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

在标准正态空间, 根据 μ_z 和 σ_z 求得可靠指标:

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} \tag{7}$$

2 蒙特卡罗模拟的 MATLAB 实现

2.1 概述

MATLAB 是英文 MATrix LABoratory (矩阵实验室) 的缩写。MATLAB 功能强大、简单易学、编程效率高, 现已成为一种广泛应用于工程计算及数值

[收稿日期] 2008-05-23; [修订日期] 2008-09-23。
[第一作者简介] 杨 明(1972 年—), 男, 1999 年毕业于中南大学, 获硕士学位, 高级工程师, 现主要从事地基处理和地质灾害治理及基坑支护结构工作。

分析领域的新型高级语言^[9]。

文章对可靠度的求解是通过 Monte-Carlo 模拟来计算,由于计算工作量大,因此采用 MATLAB 编制计算程序来实现。

2.2 MATLAB 计算程序流程图

MATLAB 计算可靠性指标 β 的计算流程见图 1,文章采用 Bishop 条分法按 Newton 迭代法进行安全系数的计算。

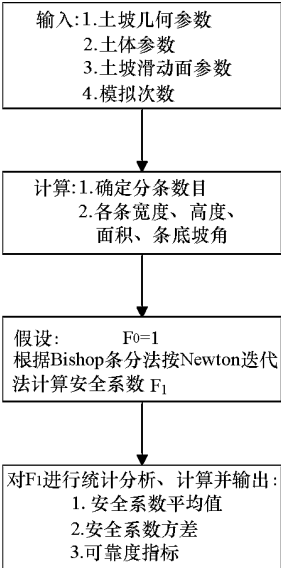


图 1 MATLAB 计算流程

3 均质土坡确定滑动面的蒙特卡罗模拟

3.1 均质土坡确定滑动面模型的建立

某简单均质粘性土坡,坡顶、坡面均为平面,为简化计算,不考虑土性参数相关性,忽略土的重度变异性对可靠度的影响,土体的破坏符合 Mohr-Coulomb 破坏准则,不考虑地下水的作用和地震作用。其几何形态参数为坡高 $H=9.6\text{m}$,坡角 $\alpha=56.5^\circ$;土的容重为 $\gamma=18\text{kN/m}^3$,土的抗剪强度参数:粘聚力为 $\bar{c}=20\text{kPa}$,内摩擦角为 $\bar{\varphi}=23^\circ$,其变异系数分别为 $\delta_c=0.2, \delta_\varphi=0.2$ 。最危险滑裂面及滑弧圆心及土坡模型见图 2。

对一般性工程,取 $N=5\,000\sim 10\,000$ 次,已完全可以满足工程评价精度要求^[1]。为满足研究需要,在下面的计算中,均取 $N=100\,000$ 次。

3.2 土性参数分布类型对边坡可靠度的影响

假设其参数分布服从不同的分布规律,经蒙特卡罗模拟计算相应 μ_{F_s}, σ_{F_s} 及可靠度指标 β 。

1) c, φ 均为正态分布:

经过 MATLAB 模拟后的 F_s-f 关系见图 3, f 为

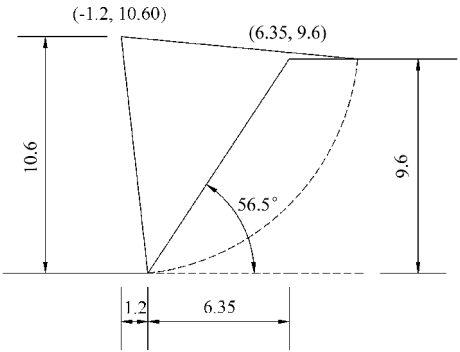


图 2 土坡模型几何参数

相应的 F_s 频数。

$$\beta = 1.3429, \mu_{F_s} = 1.2514, \sigma_{F_s} = 0.1872, f_{F_s < 1} = 8858.$$

2) c, φ 均为对数正态分布,模拟结果见图 4。

$$\beta = 1.3226, \mu_{F_s} = 1.2510, \sigma_{F_s} = 0.1898, f_{F_s < 1} = 9545.$$

3) c 为正态分布, φ 为对数正态分布,模拟结果见图 5。

$$\beta = 1.3243, \mu_{F_s} = 1.2511, \sigma_{F_s} = 0.1896, f_{F_s < 1} = 9290.$$

4) c 为对数正态分布, φ 为正态分布,模拟结果见图 6。

$$\beta = 1.3428, \mu_{F_s} = 1.2515, \sigma_{F_s} = 0.1873, f_{F_s < 1} = 8726.$$

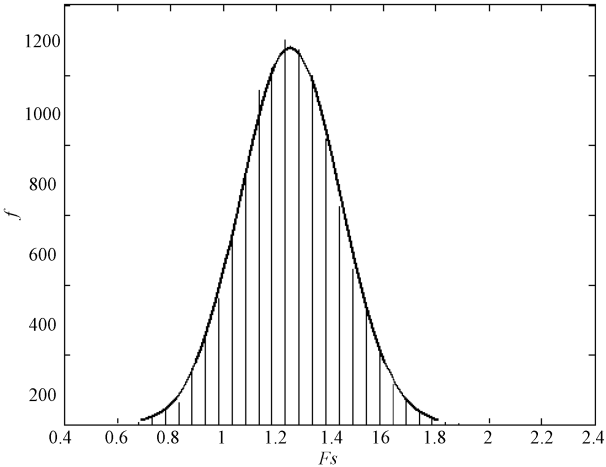


图 3 c, φ 为正态分布

3.3 结果分析

1) 从以上模拟的图形看,在 c, φ 为正态分布或者对数正态分布时,其对应的安全系数的分布均呈标准正态分布;这一点通过软件的统计分析工具也同样得到了证实。

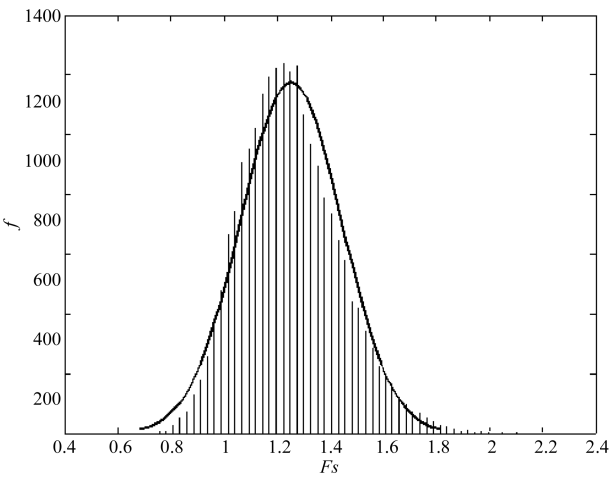


图 4 c, φ 为对数正态分布

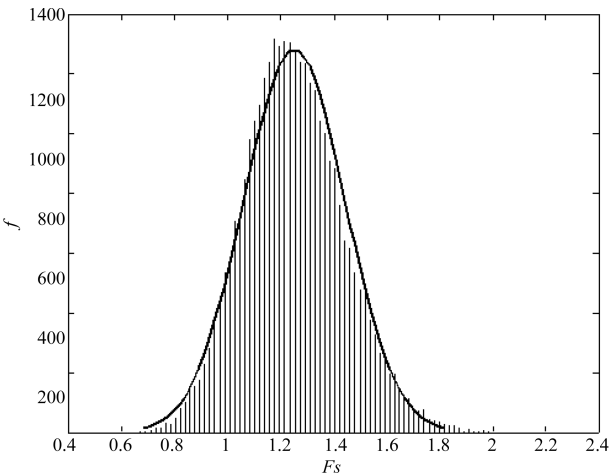


图 5 c 为正态分布, φ 为对数正态分布

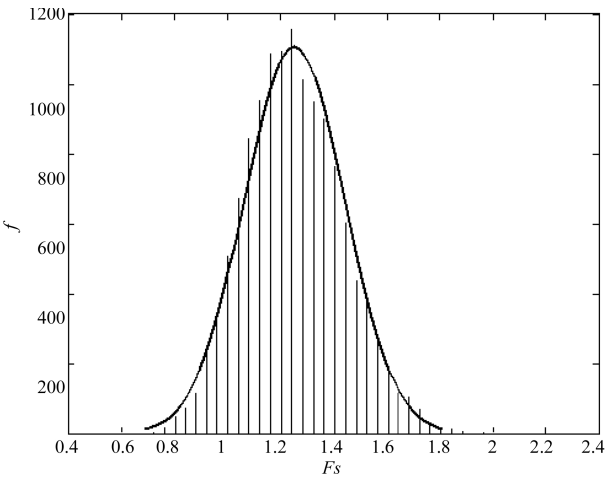


图 6 c 为对数正态分布, φ 为正态分布

2) 从以上模拟的结果可以看出,土性参数取不同分布类型时,其对应的安全系数平均值分别为 $\mu_{F_s}=1.2514$ (c, φ 均为正态分布), $\mu_{F_s}=1.2510$ (c, φ 均

为对数正态分布), $\mu_{F_s}=1.2511$ (c 为正态分布, φ 为对数正态分布), $\mu_{F_s}=1.2515$ (c 为对数正态分布, φ 为正态分布),可见土性参数的不同分布类型对于安全系数的平均值基本无影响。

3) 同时可以看出,土性参数取不同分布类型时,其对应的安全系数的标准差分别为 $\sigma_{F_s}=0.1872$ (c, φ 均为正态分布), $\sigma_{F_s}=0.1898$ (c, φ 均为对数正态分布), $\sigma_{F_s}=0.1896$ (c 为正态分布, φ 为对数正态分布), $\sigma_{F_s}=0.1873$ (c 为对数正态分布, φ 为正态分布),表明土性参数 c, φ 同取正态分布比同取对数正态分布的标准差要略小,且 c, φ 分别取不同分布时,其失效概率介于两者之间。

4) 从模拟的结果看,土性参数取不同分布时,各相应的模拟失效概率分别为 $p_f=0.089$ (c, φ 均为正态分布), $p_f=0.095$ (c, φ 均为对数正态分布), $p_f=0.093$ (c 为正态分布, φ 为对数正态分布), $p_f=0.087$ (c 为对数正态分布, φ 为正态分布),可见土性参数 c, φ 同取正态分布比同取对数正态分布的失效概率要略小,且 c, φ 分别取不同分布时,其失效概率介于两者之间。但是对于实际工程评价来说,可以认为 c, φ 的不同分布类型对其失效概率可以认为基本没有影响。

5) 从模拟的结果看,土性参数取不同分布时,各相应的可靠指标分别为 $\beta=1.3429$ (c, φ 均为正态分布), $\beta=1.3226$ (c, φ 均为对数正态分布), $\beta=1.3243$ (c 为正态分布, φ 为对数正态分布), $\beta=1.3427$ (c 为对数正态分布, φ 为正态分布),可见土性参数 c, φ 同取正态分布比同取对数正态分布的可靠指标要略小,且 c, φ 分别取不同分布时,其可靠指标介于两者之间,且通过以上分析可以看出, c, φ 的不同分布主要是通过影响安全系数的标准差而影响可靠指标的。但是对于实际工程评价来说,可以认为 c, φ 的不同分布类型对其可靠指标基本没有影响。这也从一个侧面说明了《水利水电工程边坡设计规范》(SL 386-2007)中关于边坡可靠度计算采用均值稳定安全系数来评价边坡可靠度方法的合理性。

4 工程案例

某建筑物为地面上主楼 28 层,裙楼 3 层,地下 2 层,建筑总面积 51 105.60m²。拟开挖基坑深 8m,基坑开挖面积及深度较大,组成基坑边壁的主要地层为粘土,地下水位位于 9m 深左右,该基坑属临时支护工程。由于基坑周围建筑物及市政道路的限制,边坡放坡的坡比为 1 : 0.25。根据勘察报告,拟开挖基坑上层 0.3 ~ 0.5m 为填土,主要成分为建筑

垃圾; 以下为粉质粘土, 褐黄色, 呈硬塑状态, 主要由粘粒组成, 层厚 7.8 ~ 8.5m; 砾砂层, 为河流阶地冲积物, 浅黄色、黄褐色, 呈中密状态, 主要成分为石英, 含云母碎片, 层厚 2.3 ~ 4.2m。为简化计算, 不考虑上层杂填土及地下水作用。基坑边坡土体参数分别为 $\gamma = 18.7 \text{ kN/m}^3$, $\bar{c} = 26.2 \text{ kPa}$, $\sigma_c = 6.9 \text{ kPa}$, $\bar{\varphi} = 27.4^\circ$, $\sigma_\varphi = 7.2^\circ$ 。

4.1 按《建筑边坡工程技术规范》评价边坡稳定性
按国家标准《建筑边坡工程技术规范》(GB 50330 - 2002) 中所推荐的简化 Bishop 法评价边坡稳定性。由于地下水水位位于基坑底以下, 因此不考虑地下水对边坡的影响。采用商业化软件理正岩土 5.11 版进行计算, 得 $F_s = 1.309$ 。根据《建筑边坡工程技术规范》(GB 50330 - 2002) 3.2 节的规定, 按边坡坡高 $H = 8 \text{ m} < 10 \text{ m}$, 以及损坏后可能造成的后果的严重性, 确定该边坡安全等级为二级, 按照边坡稳定性评价的要求, $F_s = 1.309 > 1.25$, 满足规范要求, 因此不需要对基坑边坡进行加固处理。

4.2 采用蒙特卡洛方法计算边坡可靠度
取 $N = 10\,000$ 次, 用蒙特卡洛方法模拟进行边坡的可靠度模拟, 模拟结果见图 7。
经计算, $\mu_{F_s} = 1.3096$, $\sigma_{F_s} = 0.2646$, 可靠指标 $\beta = 1.1704$, 失效概率 $p_f = 12.1\%$ 。

由于现阶段边坡工程尚无可靠度设计标准, 而边坡工程和建筑工程有相似之处, 因此参考《建筑结构可靠度设计统一标准》(GB 50068-2001) 中有关可靠度的设计标准, 该基坑安全等级为二级, 属于延性破坏, 其相应的可靠指标为 3.2, 而经过蒙特卡洛计算的结果, $\beta = 1.1704 < 3.2$, 因此需对该边坡进行相应的支护处理。

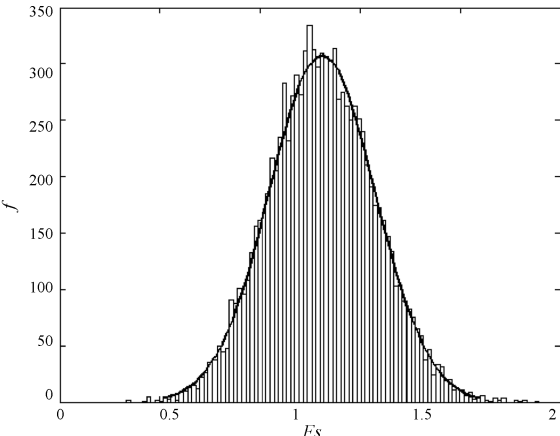


图 7 蒙特卡洛模拟 F_s - f 图

4.3 按《水利水电工程边坡设计规范》(SL 386 - 2007) 进行可靠度计算

在 2007 年出版实施的水利行业标准《水利水电工程边坡设计规范》(SL 386 - 2007) 中推荐了采用均值抗滑稳定安全系数的可靠度分析方法, 文章采用该方法进行边坡的可靠度计算以进行比较。其计算步骤如下:

- 1) 求包括岩体材料性能指标在内的所有计算参数的平均值和标准差;
- 2) 将计算参数的平均值带入相应的抗滑稳定计算公式, 计算出均值稳定安全系数 μ_F ;
- 3) 将各计算参数的平均值分别加减其标准差, 计算出稳定安全系数 F_i^+ 、 F_i^- ;
- 4) 将稳定安全系数 F_i^+ 、 F_i^- 相减得到 ΔF_i ;
- 5) 重复上述步骤 (2) ~ (4), 直到对全部参数计算完毕, 计算得出所有的 ΔF_i ;
- 6) 利用 Taylor 级数展开, 求得均值稳定安全系数的标准差 σ_F , 从而计算其变异系数 δ_F ;
- 7) 计算可靠指标、可靠度和失效概率。

均值稳定安全系数 F_i^+ 、 F_i^- 和 ΔF_i 计算结果见表 1。

分类	c			φ		
	F_i^+	F_i^-	ΔF_i	F_i^+	F_i^-	ΔF_i
	1.535	1.080	0.455	1.454	1.176	0.278

按下式计算均值稳定安全系数的标准差:

$$\sigma_F = \sqrt{\left(\frac{\Delta F_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F_2}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\Delta F_n}{2}\right)^2} = 0.2666$$

(8)

$$\mu_F = 1.309$$

(9)

按安全系数为正态分布计算可靠指标:

$$\beta_F = \frac{\mu_F - 1}{\sigma_F} = 1.159$$

(10)

小于 1.0 失效概率 P_f 也可根据均值稳定安全系数及其变异系数直接查规范中附表可得 $P_f = 11.0\%$ 。

同样如上节所述, 参考《建筑结构可靠度设计统一标准》(GB 50068-2001), $\beta_F = 1.159 < 3.2$, 因此该边坡需要进行必要的支护处理。

4.4 基坑边坡支护及施工

根据相关规范, 参照工程勘察报告及相关工程经验, 该基坑边壁采用土钉墙进行支护。该基坑支护工程自 2007 年 11 月 8 日开始支护, 至 12 月 27

日完成。在支护施工期间,基坑土方开挖至军干所及防疫站侧时,围墙内侧出现 4~6mm 裂缝,经进行分层开挖,分层支护,至基坑支护完成后至论文写作时已历时 5 个月,该裂纹未继续发展。如果未进行相应的支护措施处理,该裂缝有可能继续发展,造成边坡整体失稳滑塌。

4.5 讨论

1) 按照 3 种不同的方法对工程实例进行了边坡稳定性的分析,从中可以看出,如果按照确定性方法采用简化 Bishop 方法对边坡进行稳定性计算,评价结果表明其安全系数满足规范的要求,不需要采取工程措施进行加固处理。而按照可靠度方法评价,分别采用了文章所用的蒙特卡洛模拟法及《水利水电工程边坡设计规范》进行边坡稳定性评价。参考《建筑结构可靠度设计统一标准》(GB 50068-2001) 中有关可靠度的设计标准,经过蒙特卡洛计算的结果 $\beta = 1.1704 < 3.2$; 采用《水利水电工程边坡设计规范》(SL 386 - 2007) 计算,该边坡 $\beta_F = 1.159 < 3.2$ 。从结果可以看出,上述可靠指标无法满足要求,需要进行相应的工程措施进行支护处理。从施工过程中的周围变形观察表明,在军干所及防疫站围墙内侧出现了裂缝,如未进行支护处理,有可能由于参数的离散性而造成局部或者部分边坡失稳、滑塌。

由此可见,由于在边坡过程中存在各种不确定性因素,而确定性分析方法处理不确定性因素的方法是在安全系数上增加一个安全储备来处理,而可靠性分析方法则采用统计学方法把不确定性因素按照随机变量处理,因此用可靠性分析方法能够更加接近边坡的实际稳定状况,是确定性分析方法的有益补充,可同确定性分析方法相互印证,也为凭经验分析边坡稳定性及进行边坡工程设计提供了理论依据和直观的计算结果。

2) 采用《水利水电工程边坡设计规范》中推荐的可靠度计算方法得到的可靠指标 $\beta_F = 1.159$, $P_f = 11.0\%$ 。从其计算过程可以看出,该方法是简单地将计算参数的平均值代入相应的抗滑稳定计算公式,计算出均值稳定安全系数,再将各计算参数的平均值分别加减其标准差,计算出稳定安全系数 K_i^+ 、 K_i^- ,并将其相减得到 ΔK_i ,最后利用 Taylor 级数展开,求得其可靠指标、可靠度和失效概率。该方法中未考虑土性参数的统计分布形式,也未考虑参数的相关性,这样做可能存在一定的误差。文章所用的蒙特卡洛模拟法计算,工程案例中边坡的可靠指标

$\beta = 1.1704$, $p_f = 12.1\%$,不但考虑了土性参数的概率分布形式,在需要时还可以考虑土性参数之间的相关性,因此,该方法相比规范所推荐的方法精度更高,理论上也更加严密。从两种分析方法的结果比较来看,两种方法的差别并不大,从工程实用角度来看,两者都可以满足边坡工程稳定性评价的要求。

5 结论

1) 可靠度分析方法是确定性分析方法的有益补充,用破坏概率比用安全系数作为评价指标更能客观、定量地反映边坡的安全性。文章利用 MATLAB 模拟土性参数的分布类型对可靠指标 β 的影响,认为在土性参数 c 、 φ 取对数分布或者对数正态分布时,确定滑动面的安全系数呈正态分布,且分布类型对于安全系数的平均值 μ_{F_s} 、方差 σ_{F_s} 、可靠指标 β 均无显著影响;

2) 用蒙特卡洛法评价边坡可靠度,受问题条件限制的影响略小,其收敛性与极限状态方程的非线性、变量分布的非正态性无关,适应性强。就可靠度计算而言,若随机变量的变异系数大于 30%,可靠指标法的计算结果往往远离精确解。然而,蒙特卡洛法却不受这个约束。而且,因为蒙特卡洛法的计算是通过大量而简单的重复抽样实现的,因此方法和程序都比较简单。

[参考文献]

- [1] 祝玉学. 边坡可靠性分析[M]. 北京:冶金工业出版社,1993.
- [2] Brzakala W., Pula W., A Probabilistic Analysis of Foundation Settlements, Computer and Geotechnics, 18(4), 1996: 291-309.
- [3] 高大钊. 土力学可靠性原理[M]. 北京:中国建筑工业出版社, 1989.
- [4] 谭晓慧. 边坡稳定可靠度分析方法的探讨[J]. 重庆大学学报(自然科学版)2001, 16: 40-44.
- [5] 黄志全, 陈尚星, 李华晔, 等. 溪洛渡电站软弱夹层剪切强度分析研究[J]. 地质与勘探, 2005, 41(4): 98-101.
- [6] 张社荣, 贾世军, 郭怀志. 岩石边坡稳定的可靠度分析[J]. 岩土力学, 1999, 20(2): 57-62.
- [7] 任 锋. 结构可靠性分析中蒙特卡洛模拟的应用[J]. 济南大学学报, 2000, 10(2): 68-70.
- [8] 傅旭东, 赵善锐. 用蒙特卡洛(Monte-Carlo)方法计算岩土工程的可靠度指标[J]. 西南交通大学学报, 1996, 31(2): 164-168.
- [9] 刘卫国, 陈昭平, 张 颖. MATLAB 程序设计与应用[M]. 北京:高等教育出版社, 2002.
- [10] 王 琦, 徐式蕴, 赵睿涛. MATLAB 基础与应用实例集粹[M]. 北京:人民邮电出版社, 2007.

Monte Carlo Simulation of Homogeneous Soil-Slope Reliability Based on Matlab

YANG Ming^{1,2}, ZHANG Ke-neng¹, LIU Yu-fei³, YANG Qing-guang⁴

(1. *School of Geosciences and Environmental Engineering, Central South University, Changsha 410083;*

2. *Guangzhou-Nansha Construction Quality & Safety Supervision Station, Guangzhou 511455;*

3. *School of Civil Engineering and Architectural, Central South University, Changsha 410075;*

4. *Research Institute of Geotechnical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412008*)

Abstract: The paper establishes the calculation model by bishop slices method, then calculates the stability reliability of homogeneous soil-slope by Monte Carlo simulation programming by MATLAB, draw the conclusion that normal distribution or lognormal distribution of c , φ of soil parameter has no evident effect on the soil-slope's reliability. Finally, the conclusion is applied in the project, and proves that the reliability analysis method is the beneficial supplement of conventional deterministic method.

Key words: Reliability, Monte Carlo simulation, MATLAB