

基于灰色理论的基坑变形预测

王平卫^{1,2}, 彭振斌¹, 何忠明¹

(1. 中南大学地学与环境工程学院, 长沙 410083;

2. 有色金属矿产地质调查中心, 北京 100012)

[摘要] 基坑变形系统具有一定的不确定性, 实际上是一个灰色系统, 其监测变形值具有一定的灰色特征, 利用灰色理论建立了等步长与非等步长基坑监测变形值 GM(1,1) 预测模型是可行的。工程应用表明, 本文建立的基坑变形灰色预测模型具有较好的适用性, 对指导基坑开挖和支护具有一定的作用。

[关键词] 基坑变形 GM(1,1) 模型 预测

[中图分类号] TU473.2 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 0495-5331(2006)06-0094-04

1 前言

随着建筑行业施工的日益规范化, 基坑工程开挖过程中采用信息化施工必然将成为一个发展趋势^{[1][2]}。基坑在开挖施工过程中由于受基坑土质、基坑开挖深度及尺寸、周围荷载、支护系统及施工方法等诸多因素影响, 不可避免的会产生变形。尽量减少基坑开挖对周边环境的影响, 对基坑周边建筑物、基坑土体及支护桩的位移等进行变形监测, 尽可能的对它们在后续施工中的变形进行预测, 了解其有无较大的不均匀沉降, 以便采取有效的补救措施, 是现代建筑基坑施工中所面临的重要问题。

灰色系统理论将一些随机上下波动时间序列离散数据序列进行累加生成有规律的数据序列, 然后进行建模预测。基坑变形系统具有一定的灰色性、不确定性, 实际上是一个灰色系统, 因此采用灰色系统预测理论对基坑变形进行预测是可行的。本文主要针对基坑变形监测数据具有一定的灰色特征, 建立了适用于基坑变形监测数据预测的等步长及非等步长的预测模型, 并结合了工程实例分析了灰色预测模型的预测精度及实用性。

2 灰色预测模型

2.1 模型的建立

记原始变形数据序列为^[3-5]:

$$\{S^{(0)}(i) \mid i=1, 2, \dots, n\} \quad (1)$$

对原始变形数据序列进行一次累加生成, 得到新序列:

$$\{S^{(1)}(i) \mid i=2, 3, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\text{其中: } S^{(1)}(i) = S^{(0)}(i) + S^{(0)}(i-1)$$

$$i=2, 3, \dots, n \quad (3)$$

按灰色系统建模方法, 可得到一个关于 $S^{(1)}(i)$ 的白化形式的一阶线性动态微分方程, 记为 GM(1, 1):

$$\frac{dS^{(1)}}{dt} + aS^{(1)} = b \quad (4)$$

式中: a 、 b 为系数。

按最小二乘法解, 得到:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y_n \quad (5)$$

式中:

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[S^{(1)}(1) + S^{(1)}(2)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[S^{(1)}(2) + S^{(1)}(3)] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}[S^{(1)}(n-1) + S^{(1)}(n)] & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_n = \{S^{(0)}(2), S^{(0)}(3), \dots, S^{(0)}(n)\}^T \quad (6)$$

从式(5)求出系数向量 a 、 b 后, 代入式(4), 考虑到模型的边界条件 $S^{(1)}(1) = S^{(0)}(1)$, 从而可得

[收稿日期] 2006-04-21; [修订日期] 2006-10-12; [责任编辑] 陈仁俊。

[第一作者简介] 王平卫(1961年-), 男, 1982年毕业于中南大学, 在读博士生, 高级工程师, 主要从事岩土工程的研究工作。

灰色预测模型 GM(1,1) 的离散响应为:

$$S^{(1)}(i) = [S^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-a(i-1)} + \frac{b}{a} \quad (7)$$

还原数列得到沉降预测值为:

$$S^{(0)}(i) = S^{(1)}(i) - S^{(1)}(i-1) \quad (i=2,3,\dots,n) \quad (8)$$

但是,对于基坑工程周边变形监测来说,由于监测相隔日期受暴雨等多方面的影响使得间隔日期有时候为非等步长的。对于时间为非等步长的变形数据序列,其模型建立与等步长有些不同,其建模过程如下:

记原始沉降变形序列为:

$$S^{(0)} = \{S^{(0)}(P_i) | P_i \in R^+, i=1,2,\dots,n\} \quad (9)$$

设 i_p 为小于 P_i 且接近 P_i 的正整数,用内插法计算 i_p 的值(仅计算正整数中缺失的点),则

$$S^{(0)}(i_p) = S^{(0)}(P_{i-1}) + \frac{i_p - P_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} [S^{(0)}(P_i) - S^{(0)}(P_{i-1})] \quad (10)$$

对 $S^{(0)}(i_p)$ 作一次累加生成(当 P_i 为整数时, $P_i = i_p$),得到

$$S^{(0)}(i_p) = \sum_{k=1}^{i_p} S^{(0)}(k) \quad (11)$$

然后计算 P_i 为非正整数时的一次累加生成数:

$$S^{(1)}(P_i) = S^{(1)}(i_p) + (P_i - i_p)S^{(0)}(P_i) \quad (12)$$

定义 $S^{(1)}(P_i)$ 的灰导数 $dL(S^{(1)}(P_i))$ 为

$$dL(S^{(1)}(P_i)) = \frac{S^{(1)}(P_i) - S^{(1)}(i_p)}{P_i - i_p} \quad (13)$$

其中:

$$dL(S^{(1)}(P_i)) = S^{(0)}(P_i) \quad (14)$$

用 $\frac{1}{2}(S^{(1)}(i_p) + S^{(1)}(P_i))$ 作为 P_i 的灰数值。

于是,当 P_i 不为正整数时,灰微分方程为

$$S^{(0)}(P_i) + \frac{1}{2}a(S^{(1)}(P_i) + S^{(1)}(i_p)) = b \quad (15)$$

按最小而乘法估计

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y_n \quad (16)$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(S^{(1)}(1) + S^{(1)}(2)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(S^{(1)}(2) + S^{(1)}(3)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(S^{(1)}(N-1) + S^{(1)}(N)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(S^{(1)}(P_1) + S^{(1)}(i_{p1})) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(S^{(1)}(P_m) + S^{(1)}(i_{pm})) & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

(P_i 为非整数, P_i 为整数的部分已在 i_p 之中)

$$Y_n = \begin{Bmatrix} S^{(0)}(2), S^{(0)}(3), \dots, S^{(0)}(n), \\ S^{(0)}(P_1), \dots, S^{(0)}(P_m) \end{Bmatrix}^T \quad (18)$$

其响应函数为

$$\bar{S}^{(1)}(i) = [S^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-a(i-1)} + \frac{b}{a} \quad (i=2,3,\dots,n) \quad (19)$$

2.2 模型精度的检验

由于非等步长与等步长的灰色预测模型其检验方法及模型修正方法类似,故本文仅介绍等步长灰色预测模型的检验及模型修正方法。GM 模型一般可采用以下三种检验方法:残差大小的检验、后验差检验和关联度检验,具体运算是可根据预测精度需要选用一到三种方法进行检验^[6-7]。残差大小检验是按点检验,后验差检验是残差分布统计特性的检验,关联度检验是建立的模型与指定的函数之间近似性的检验。

(1) 残差检验

$$\text{残差 } \varepsilon(i): \varepsilon(i) = S^{(0)}(i) - \hat{S}^{(0)}(i), i=1,2,\dots,n \quad (20)$$

$$\text{相对误差 } e(i): e(i) = \varepsilon(i)/S^{(0)}(i) \cdot 100\% \quad (21)$$

从 $e(i)$ 值可以直观地看出预测值精度的高低。

(2) 后验差检验

$$\text{记残差均值 } \bar{\varepsilon}: \bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon(i) \quad (22)$$

$$\text{残差方差 } R_1^2: R_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon(i) - \bar{\varepsilon})^2 \quad (23)$$

$$\text{原始数据均值 } \bar{S}: \bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S^{(0)}(i) \quad (24)$$

原始数据方差 R_2^2 :

$$R_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S^{(0)}(i) - \bar{S})^2 \quad (25)$$

$$\text{后验差比值 } C: C = \frac{R_1}{R_2} \quad (26)$$

小误差概率 P :

$$P = \{ \varepsilon(i) - \bar{\varepsilon} \mid < 0.6745R_2 \} \quad (27)$$

指标 C 越小越好; C 越小, 表示 R_2 越大而 R_1 越小; R_2 越大, 表明原始数据方差大, 原始数据离散程度大; R_1 小, 表明残差方差小, 残差离散程度小。 C 小, 表明尽管原始数据很离散, 而模型所得计算值与实际值之差并不太离散。

指标 P 越大越好, P 越大, 表明残差与残差平均值之差小于给定值 $1.6745R_2$ 的点越多。

按上述 C 与 P 两个指标, 可以评定预测模型的精度, 具体的标准见表 1。若与均在允许的范围之内, 就可以根据建立的模型预测公式进行预测, 否则必须进行残差的修正, 直到满足所需要的精度为止。

表 1 预测精度检验表

预测精度	好	合格	勉强	不合格
P	> 0.95	> 0.80	> 0.70	≤ 0.70
C	< 0.35	< 0.50	< 0.65	≤ 0.65

(3) 关联度检验

关联度检验中, 以所得预测值曲线与实测值曲线间差值的大小, 作为关联程度的衡量尺寸。关联度以 r_i 为标记。通常当分辨率 ρ 取值为 0.5 时, 预测模型精度的评定标准为 (见表 2):

表 2 $\rho=0.5$ 时预测精度检验表

预测精度	好	合格	勉强	不合格
r_i	≤ 0.5	0.5 < r_i ≤ 0.6	0.6 < r_i ≤ 0.8	0.8 < r_i

若预测值不满足精度, 则需要建立残差 GM(1, 1) 模型, 对原模型进行修正。

2.3 残差 GM(1, 1) 模型

$$\hat{S}^{(1)}(i) = \hat{S}^{(0)}(i) - \hat{S}^{(1)}(i-1), i = 2, 3, \dots, n \quad (28)$$

表 3 沉降观测及预测数据表 (单位 mm)

序号	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
观测值	0.130	0.140	0.150	0.170	0.180	0.210	0.240			
预测值	0.130	0.142	0.154	0.179	0.192	0.225	0.257	0.286	0.302	0.324
残差	0	0.002	0.004	0.009	0.012	0.015	0.017			

通过对预测数据进行检验, 发现本次预测数据的预测精度能较好的满足预测要求, 因此没有对预测模型进行修正。

$$\text{令残差: } \varepsilon^{(1)}(i): \varepsilon^{(1)}(i) = S^{(1)}(i) - \hat{S}^{(1)}(i), i = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

作一次累加生成:

$$\varepsilon^{(2)}(i) = \sum_{k=1}^n \varepsilon^{(1)}(k) \quad (30)$$

与前面的建模方法相似, 可以得到:

$$\hat{\varepsilon}^{(2)}(i) = [\varepsilon^{(2)}(i) - \frac{b_{\varepsilon}}{a_{\varepsilon}}] e^{-a(i-1)} + \frac{b_{\varepsilon}}{a_{\varepsilon}} \quad (31)$$

与式(8)还原为原始数列并相加, 便可得到残差修正 GM(1, 1) 模型:

$$\hat{S}^{(1)}(i) = [S^{(1)(0)} - \frac{b_{\varepsilon}}{a_{\varepsilon}}] e^{-a(i-1)} + \frac{b_{\varepsilon}}{a_{\varepsilon}} + [\varepsilon^{(2)}(i) - \frac{b_{\varepsilon}}{a_{\varepsilon}}] e^{-a(i-1)} + \frac{b_{\varepsilon}}{a_{\varepsilon}} \quad (i \geq 1) \quad (32)$$

3 工程实例

某国际广场拟建场地位于湖南省长沙市芙蓉北路与展览路交叉的西南角, 松桂园 9 号, 净用地面积 11308.17m², 建筑面积约 10 万 m², 最高层数 30 层, 钢筋混凝土框—剪结构, 由毗邻的两座 30 层的塔楼组成, 两座塔楼之间及四周均设有五层的裙楼, 两楼范围内地面以下采用三层地下室互相贯通, 建筑物总高度为 99.8m, ±0.00 标高相当于绝对标高为 43.50m。基坑位于繁华的闹市区, 周边的环境复杂, 本工程重要性系数为一级。

为确保基坑支护结构及周围建筑物的安全, 实现信息化施工, 基坑施工时对基坑壁土体位移及周边建筑物、道路等沉降采用了全站仪进行观测, 监测相隔时间为 6 天。现选用基坑监测沉降 7 号点的原始数据来进行灰色预测。预测时选用监测数据中的 5 至 11 号数据作为原始数据列进行预测, 具体的运算过程见上文, 这里不在叙述, 其运算结果如表 3 所示。

5 结 论

(1) 灰色预测模型具有所需样本数据少, 预测

精度高,计算简单等优点。但为保证预测的精度,预测时间段一般不宜过长,应采用最新观测数据建模,每预测一步,参数作尽量作一次修正,使预测模型不断优化、更新。

(2) 基于基坑监测变形数据具有等步长和非等步长两种不同情况,本文分别建立了相应的 GM(1, 1) 预测模型。实践表明,本文所建立的灰色预测模型具有较好的实用性。

[参考文献]

- [1] 刘建航. 基坑工程手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997
- [2] 龚晓南. 深基坑支护设计手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999
- [3] 邓聚龙. 灰色预测与决策[M]. 华中理工大学出版社, 1986
- [4] 邓聚龙. 灰色系统理论教程[M]. 华中理工大学出版社, 1990
- [5] 严智渊, 戴玉生. 灰色系统预测与应用[M]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1989
- [6] 袁嘉祖. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1978
- [7] 傅立. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学技术出版社, 1992

PREDICTION OF DEFORMATION OF DEEP EXCAVATION BASED ON GREY THEORY

WANG Ping - wei^{1,2}, PENG Zhen - bin¹, HE Zhong - ming¹

(1. College of Geoscience and Environment Engineering, Central South University, Changsha 410083, china;

2. China Nonferrous Resource Geological Survey, Beijing 100012)

Abstract: As a Gray System, the monitoring deformation value of foundation pit engineering has a definite character of gray, and it establishes the equal step lengths and unequal step lengths of monitoring deformation value of deep excavation called GM(1, 1) predicting model, based on Grey Theory. The practical application demonstrates that the deformation of deep excavation - grey predicting model that the article established is better for application, and has a definite effect on guiding excavation and retaining of deep excavation.

Key words: deformation of deep excavation, GM(1, 1) model, prediction