



有限单元法三维电阻率最小二乘反演中存在问题的研究

黄俊革^{1,2}, 阮百尧¹, 鲍光淑²

(1. 桂林工学院资源与环境工程系, 桂林 541004; 2. 中南大学信息物理学院, 长沙 410083)

[摘要]针对有限单元法在三维电阻率最小二乘反演中关于深部单元的反演能力、反演稳定性和速度问题进行了讨论与改进。首先构造了全新的“体积因子”作为先验信息加入到电阻率反演中,使地质体赋存区域的电阻率变化更符合实际情况,提高了深度较大的地质体的分辨能力。反演计算中对实测电阻率数据和模型正演数据分别取对数,并改进迭代修正量的计算方法,将以前的加减修正量改为与修正量指数之积,这样,不但可以改进电阻率模型出现负值的缺陷,提高反演计算的稳定性,而且还可减少迭代次数;针对反演时间过长的缺陷,将三维全域反演改为三维局域反演,使每次迭代的时间由4 h减少到目前的15 min;对模型的反演计算表明,以上改进是非常有效的。

[关键词]有限单元法 三维 电阻率 最小二乘 反演

[中图分类号]P631.3 **[文献标识码]**A **[文章编号]**0495-5331(2004)04-0070-06

随着找矿程度的不断深入,浅部易于发现和利用的矿产日趋减少,对寻找深部有色金属矿藏的方法研究已构成当今整个地质界的重要课题之一。在过去的几十年中,电阻率法在金属矿探测方面取得了很好的找矿效果,但是目前实际中采用的资料解释方法还相对落后;虽然采用二维反演方法可以解决一些野外实际问题,但与实际三维介质相比其计算精度和整体反演效果仍然不能满足实际的需要。国内外的地球物理学家对三维反演技术进行了努力探索,但反演的精度和速度还不能满足快速定位、分析的需求。基于有限单元法的三维地电断面的反演计算中,由于网格剖分多、计算量大,会遇到很多棘手的问题,这些问题可以归结为以下三点:深部单元分辨能力、反演稳定性问题、反演速度和迭代次数问题。这些问题如果得不到解决,基于有限单元法的三维地电断面的反演将很难走向实用化。

在最小二乘反演方法中,为了解决多解性问题、提高反演精度,需要在线性代数方程组中加入先验信息,比较成功的做法是将光滑度系数加入到最小二乘反演中(Lytle and Dines^[1], 1980; Constable et al^[2], 1987; Sasaki^[3,4], 1989, 1994; Ellis 等^[5], 1994;

Oldenburg 等^[6], 1994; 阮百尧等^[7], 1999),其物理意义就是使地下模型尽量简单光滑,相邻网格间的电阻率没有突然的变化;该方法在二维反演中获得比较成功的应用;在三维反演中,只加入光滑度矩阵的反演效果并不理想,尤其对于埋深较大的地质体,反演电阻率值与模型电阻率的差别较大(Sasaki^[4], 1994),使得最后的拟合均方误差保持在百分之十几。本文从三维地电断面的有限元剖分特点出发,构造了全新的“体积因子”作为先验信息加入到电阻率反演中,使地质体赋存区域的电阻率变化更符合实际情况,提高了深部网格的分辨能力。在反演中对实测电阻率数据和模型正演数据分别取对数,可以提高反演计算的稳定性;将模型修正量与起始模型的加法运算改为乘法运算,消除了反演结果中的不合理因素,并减少了迭代次数,经过小于10次的迭代,观测数据与拟合数据的均方误差小于5%。将三维地电断面全域反演改为三维局域反演,大大提高了三维反演的速度,迭代一次的计算时间由原来的4.5 h左右减少到15 min左右。三维全域反演与局域反演方法的计算结果表明,局域反演的效果要好于全域反演。对矿山生产实例的反演结果来

[收稿日期]2003-03-24; **[修订日期]**2003-06-06; **[责任编辑]**曲丽莉。

[基金项目]国家自然科学基金项目(编号:40064001)、广西自然科学基金项目(编号:桂科自0007024)、教育部高等学校骨干教师资助计划项目、广西培养新世纪学术和技术带头人专项资金联合资助。

[第一作者简介]黄俊革(1966年-),男,2003年7月毕业于中南大学信息物理工程学院,博士学位,副教授,现主要从事地球物理数值模拟与成像研究工作。

看,反演解释与已知地质断面吻合得非常好,反演方法可以应用到实际中。

1 有限单元法三维电阻率最小二乘反演中存在的问题

有限单元法三维地电断面电阻率最小二乘反演计算步骤大致是这样的,首先对预测模型进行正演计算,然后求取偏导数矩阵,最后利用最小二乘法进行反演,这样的反演存在的问题有:

问题一:目标体深部单元反演能力

最小二乘的原理是将线性化得到的方程组

$$\Delta d = A\Delta m \quad (1.1)$$

正则化为法方程

$$A^T A \Delta m = A^T \Delta d \quad (1.2)$$

式中 A 为偏导数矩阵, A^T 为 A 的转置矩阵, Δm 为模型参数修正量, Δd 为正演视电阻率与实测视电阻率的数据差矢量;或者构造目标函数 Ψ :

$$\Psi = \|\Delta d - A\Delta m\|^2$$

将上述目标函数对 Δm 求导并令其等于0,也可得到线性方程组(1.2);

求解(1.2)的前提是,偏导数矩阵 A 的各列线性无关,即 A 为满秩矩阵。这时, $A^T A$ 对称且满秩,即 $A^T A$ 是正定的,方程(1.2)有惟一解。但有时参数之间会出现较强的相关性,或观测数据带来的参数信息不足,以及不可避免的观测误差,导致矩阵 A 的某些奇异值很小,使矩阵 A 的条件数非常大, $A^T A$ 的条件数更是增至 A 的条件数的平方,所以矩阵 $A^T A$ 是严重病态的。为了抑制病态,通常采用阻尼最小二乘法,它需要在每次迭代中反复调整阻尼系数,降低了效率,而且阻尼系数只是一个人为的常数,其中不含任何有用信息,其目的只是为了获取最小二乘法的解,因此,使用阻尼最小二乘法解的真实可靠性是没有考虑的,多解性问题很难得到有效解决。

Sasaki^[4](1994)在方程组中加入光滑度参数,其物理意义就是使地下模型尽量简单光滑,相邻网格间的电阻率没有突然的变化。具体定义为:

$$r_j = (\Delta m_j^E + \Delta m_j^W + \Delta m_j^N + \Delta m_j^S + \Delta m_j^U + \Delta m_j^D - 6\Delta m_j)/6 \quad (1.3)$$

式中 Δm_j 为第 j 个模型的电阻率修正量,上标 E, W, N, S, U 和 D 表示与第 j 个模型相邻的前后、左右和上下单元,写成矩阵的形式:

$$r = C\Delta m \quad (1.4)$$

这里, C 为光滑度算子,取值为 $1/6, -1$ 或者 0 。采用(1.3)和(1.4)计算的光滑度矩阵加入到方程组

中,浅部网格得到比较好的结果,但对于深部单元,其灵敏度还不够,反演能力较差。

问题二:最小二乘反演稳定性问题

在对三维地电断面进行反演计算时,如果起始模型的选择不当,那么起始模型的三维正演值与观测值之间的差就会非常大,数据差矢量 Δd 中有较大的元素,如果同时又有较小的元素存在,在求解线性方程组(1.2)时的误差增大,有时甚至会导致解线性方程组(1.2)不收敛,反演的稳定性受到极大影响,从而得不到正确的结果。

其次,起始模型的选择与地下真实模型的差别太大,求解线性方程组(1.2)后就会得到比较大的模型修正量 Δm ,如果 Δm 大于起始模型,就有可能在新的模型中出现网格电阻率为负的情况,得到明显错误的结果。

问题三:反演速度和迭代次数问题

在进行三维地电断面的反演计算时,计算时间大概分为以下几个部分之和,当然,计算时间与网格剖分、观测数据量有密切关系,本文中,反演采用的网格剖分数为 $48 \times 38 \times 20 = 36480$,观测数据个数950个,以比较普通的奔腾 III - 866 型计算机为例;首先是正演计算时间,大约为 15 min;然后是偏导数矩阵的计算时间,大约为 5 min;偏导数矩阵正则化(矩阵乘)时间,大约为 1.5 h;最后是线性方程组求解模型修正量的时间,这个过程所耗费的时间最多,大约为 2.5 h;计算时间总计约为 4.5 h。这个时间只是迭代一次的结果。

三维地电断面反演计算所需的总时间,等于反演迭代一次所需时间与迭代次数之积,如何在保证反演精度的同时,有效减少迭代次数,才能使三维反演所需的时间真正得到减少,才能真正使三维反演从理论走向实践。

2 解决问题的办法

2.1 提高深部单元的反演能力

构造全新的先验信息使反演更符合实际情况;在三维地电断面的正演计算中,整个区域可以划分为边界区和目标区^[8],边界区网格电阻率是均匀的,网格单元的边长以指数关系递增,以模拟无穷远边界;目标区为不均匀体的赋存区域,其网格剖分均匀但电阻率是非均匀的;由于边界区的电阻率均匀,对计算结果的影响很小,因此在反演计算中可假定边界区网格电阻率的变化较小,而目标区为目标体的赋存区域,网格电阻率的变化较大,这两个区域的

网格体积有较大区别,因此可在目标函数中加入体积因子,使单元网格的体积越大,电阻率变化越小,这样就使模型具有了先验信息,体积因子的定义为:

$$C_{ji} = \begin{cases} \lambda \cdot v_j, & i \text{ 为网格 } j \text{ 相邻前后上下左右网格,} \\ 0, & i \text{ 为其他非相邻网格.} \end{cases}$$

$$C_{jj} = -\lambda \cdot v_j, j = 1, 2, \dots, M,$$

式中 v_j 为单元格 j 的体积, λ 为拉格朗日乘数。构造目标函数

$$\Psi = \|\Delta d - A\Delta m\|^2 + \|C_m(m - m_b + \Delta m)\|^2 \quad (2.1)$$

将上述目标函数对 Δm 求导并令其等于 0, 也可得到如下线性方程组:

$$(A^T A + \lambda C_m^T C_m)\Delta m = A^T \Delta d \quad (2.2)$$

求解以上方程组, 便可以得到模型修正量 Δm , 将这个向量加到起始预测模型向量中, 得到新的预测模型; 起始模型正演值与观测值之间的均方误差可以用以下计算公式得到:

$$rms = \sqrt{\Delta d^T \Delta d / N} \quad (2.3)$$

式中 N 为观测数据量。实践表明(见本文算例 1), 利用体积因子作为先验信息加入到反演计算中, 提高了深部网格电阻率反演能力。

2.2 提高反演稳定性和减少迭代次数问题

分别对预测模型的正演数据和实际观测数据取对数, 那么, 数据差矢量 Δd 为实际观测数据的对数值与起始模型正演数据的对数值之差, 即

$$\Delta d_i = \ln(\rho_{si}) - \ln(\rho_{ai}), i = 1, 2, \dots, N,$$

式中, ρ_{si} 为第 i 个观测视电阻率数据, ρ_{ai} 为预测模型的第 i 个正演视电阻率值, N 为观测视电阻率数据量; 经过以上处理, 数据差矢量 Δd 中元素的差别就不会太大, 这样一来, 起始模型的设计基本上不会受到限制。将偏导数矩阵的形式改为^[9]

$$A = [a_{ij}], a_{ij}, a_{ij} = \frac{\partial \ln \rho_{si}}{\partial \ln \rho_j} = \frac{\rho_j \partial \rho_{si}}{\rho_{si} \partial \rho_j}, i = 1, 2, \dots,$$

$$N, j = 1, 2, \dots, M$$

式中, ρ_{si} 为第 i 个观测视电阻率数据, ρ_j 为预测模型的第 j 个单元的电阻率, 模型中共有 M 个单元; 以上处理, 恰好与数据差矢量 Δd 的处理相一致; 这样, 方程(1.2)中所有项均为对数形式, 那么相应地, 方程的解, 即模型参数修正量矢量 Δm 也应该是对数形式, 即

$$\Delta m_j = \ln(\rho'_j) - \ln(\rho_j) = \ln\left(\frac{\rho'_j}{\rho_j}\right), j = 1, 2, \dots, M,$$

其中, ρ'_j 为新的预测模型的第 j 个单元的电阻率。那么, 新的预测模型可以表示为:

$$\rho'_j = \rho_j \cdot e^{\Delta m_j}, j = 1, 2, \dots, M,$$

即新的预测模型电阻率值等与原先的模型电阻率值与模型修正量的指数的乘积。式中, 如果 Δm_j 的取值为正, 上式将对起始预测模型进行放大处理, 如果 Δm_j 取值为负, 上式将对起始预测模型进行缩小处理。这样, 不但消除了新的预测模型中电阻率取负值的隐患, 保证迭代过程的稳定性, 而且上述处理对迭代具有加速的功能, 经过反演实例计算表明, 迭代次数由原来的 10 次左右, 减少到目前的 5 次即可达到要求。图 1 为反演迭代次数与拟合均方误差的关系图。从图中可以看到, 在进行上述处理之前, 当迭代次数达到 5 次以后, 均方误差的下降趋势已经明显减缓, 迭代次数的增加已经不能使数据的拟合程度有太大改善了。而经过上述处理之后对数据的拟合程度的改善是非常明显的, 在第五次迭代后, 均方误差已经小于 5%, 在第十次迭代后, 均方误差只有 2.8%。由于均方误差的减小速度在第五次迭代后明显变小, 一般反演计算只需要 5 次便足够了。

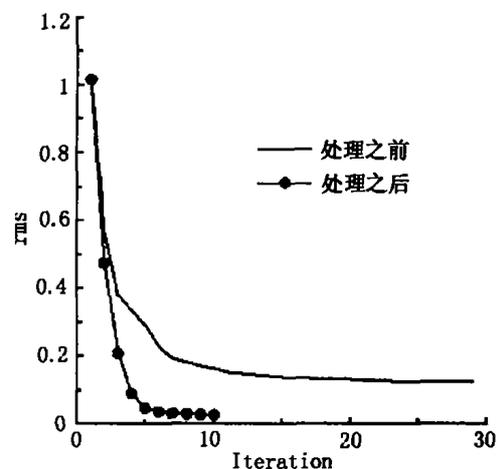


图 1 迭代次数与均方误差的关系

2.3 反演速度问题

从上一节对反演计算时间的分析可以知道, 反演时间主要与偏导数矩阵正则化(矩阵乘)时间和线性方程组求解的时间有关, 这两个部分所耗的时间约占反演计算时间的 90%, 因此只要有效减少这两个部分花费的时间, 就可以大幅度提高计算速度。

与矩阵的乘和方程组求解时间成正比的是矩阵元素的数量或方程的数量。在前面反演方法的论述中, 反演的地下网格是所有的剖分网格, 包括了边界区非均匀网格, 而在实际的反演中, 首先是假设边界区网格电阻率的变化非常小; 既然如此, 那些电阻率变化很小的模型网格就可以不用参加三维反演计算, 如果仅仅关心观测区的网格电阻率的变化, 那么其他的非观测区的网格可以全部不用考虑, 反演网

格的数量将大大减少,以每条剖面 20 个供电点、共 5 条剖面、剖面线距是点距的两倍来计算,地下需要反演的网格数量由以前的 $48 \times 38 \times 20 = 36480$ 个,缩减为现在的 $24 \times 10 \times 20 = 4800$ 个,观测数据个数 = 950 个,计算时间的构成也发生了很大变化:正演计算时间大约为 15 min;然后是偏导数矩阵的计算时间,大约为 20 s;偏导数矩阵正则化(矩阵乘)时间,大约为 30 s;最后是线性方程组求解模型修正量的时间,这个过程所耗费的时间为 2 min 左右;迭代一次的计算时间总计约为 18 min。与原来的 4.5 h 相比,速度的提升是显而易见的。如果以 5 次迭代来算的话,三维地电断面反演时间总共约为 1.5 h。这个速度,只是相对于普通的奔腾 III - 866 型计算机为例的。

为了缩短计算时间而缩小反演计算的范围,这种处理方式,会对反演的准确性和反演精度带来什么影响,这是问题的焦点所在;为了检验这种方式,本文采用了一系列比较典型的模型进行大量的反演试验,并利用野外实测数据进行反演。

3 反演算例

算例 1:均匀半空间中一个 $6\text{m} \times 6\text{m} \times 6\text{m}$ 低阻立方体,围岩电阻率为 $10\Omega \cdot \text{m}$,立方体电阻率为 $1\Omega \cdot \text{m}$,埋深 2m,采用二极装置测量,测量点距 1 m,线距 2 m,每条剖面上 20 个供电点,共设计剖面 5 条,图 2(a)所示为实际的模型,图 2(b)为采用文献^[4]中的光滑度系数进行反演的结果,图 2(c)为采用体积因子作为先验信息反演得到的结果,图中结果对比可以看出,体积因子反演目标体下部单元的能力相对较好。

算例 2:均匀半空间中一个 $6\text{m} \times 6\text{m} \times 6\text{m}$ 高阻立方体,围岩电阻率为 $10\Omega \cdot \text{m}$,立方体电阻率为 $50\Omega \cdot \text{m}$,埋深 2m,采用二极装置测量,测量点距 1 m,线距 2 m,每条剖面上 20 个供电点,共设计剖面 5 条,图 2(a)为实际的模型,图 2(b)为全区域所有网格均参加反演计算得出的结果,网格总数为 $48 \times 38 \times 20 = 36480$ 个,迭代次数为 5 次,实际电阻率与反演得到的电阻率均方误差为 9.4%,计算时间约

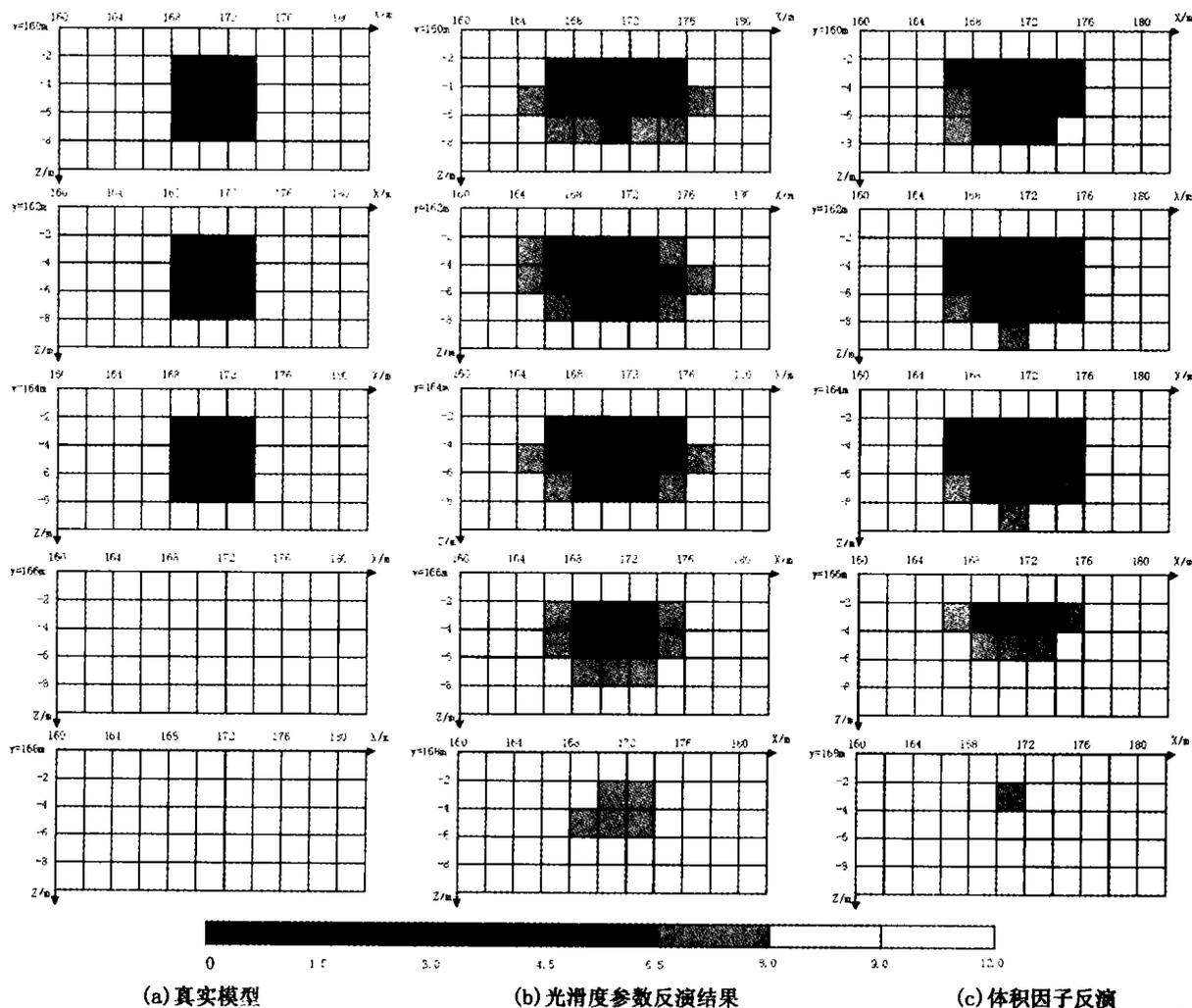


图 2 低阻体反演效果对比

为 24 h。从三维反演的结果中,可以看到在高阻立方体周围的高阻晕圈,大小为 $14 \times 10 \times 10$ 。晕圈中央与高阻立方体的位置相对应,但是中心的最大电阻率仅为 $28\Omega \cdot m$,最小电阻率为 $13\Omega \cdot m$,与真实模型的电阻率相差很多。虽然反演结果反映了立方体的位置和电性,但对于量的反演效果有待加强。

同样的模型,采用部分区域网格参加反演计算的算法,得到的结果见图 3(c),参加反演的有 $24 \times$

$10 \times 20 = 4800$ 个网格,即在 X 方向有 24 个网格,稍大于供电点的个数,Y 方向取 10 个网格,Z 方向为全部网格。迭代 5 次,计算时间总计为 90 min,与全域网格反演计算时间相比,速度提高了 10 几倍,反演结果也有不同之处,即晕圈中心的最大电阻率为 $59\Omega \cdot m$,最小电阻率为 $28\Omega \cdot m$,高阻晕的范围也略小,也就是说,反演结果无论在空间位置还是电性与实际模型更为接近。

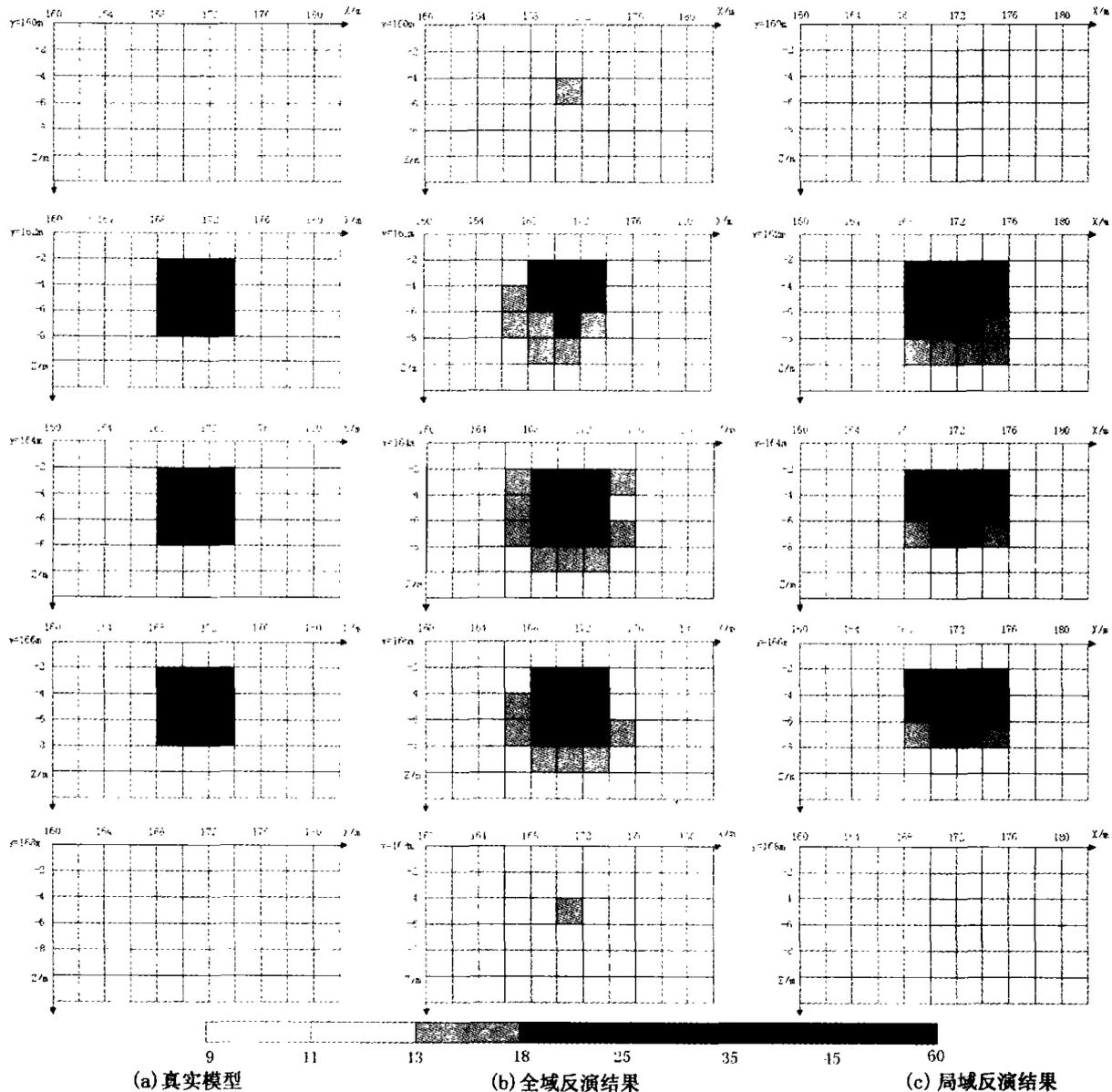


图 3 全域反演与局域反演结果对比

算例 3: 地下三维模型设计为电阻率为 $10\Omega \cdot m$ 的半空间中两个地质体,大小和电阻率值均不相同,空间位置分布见图 4(a),小一点的长方体为高阻,电阻率为 $100\Omega \cdot m$,大小为 $4m \times 6m \times 4m$;大一点的立方体为低阻,电阻率为 $1\Omega \cdot m$,大小为 $6m \times 6m \times 6m$;反演结果见图 4(b),高阻地质体对应的高阻晕和低阻晕的大小范围略有缩小,最大电阻率为

$101\Omega \cdot m$,在高阻晕下方出现了低阻信息,电阻率在 $7\Omega \cdot m$ 左右,但并没有影响到对高阻体空间位置和电性的判断。低阻晕在 X 方向和 Z 方向分布的范围较大,这可能与高阻体在旁边的影响所导致的,低阻体的空间位置和电性与模型吻合非常好。证明反演计算对多个地质体也是有效的。

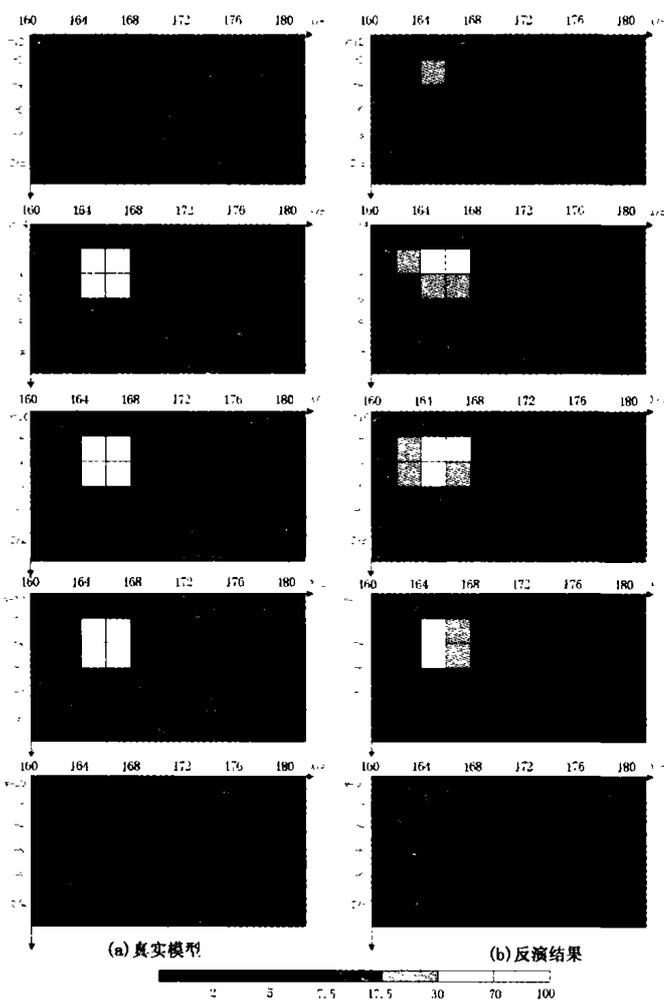


图4 两个地质体的三维反演结果

4 结论

1) 把体积因子作为先验信息,加入到最小二乘反演方法中,可以有效解决三维电阻率反演中的多解性问题的同时,提高深部目标体反演能力。

2) 对实测电阻率数据和模型理论正演数据分

别取对数,提高了反演计算的稳定性,起始模型的选择基本不受限制;将模型修正量与起始模型的加法运算改为乘法运算,彻底消除了反演结果不合理因素,并大大减少了迭代次数,经过小于10次的迭代次数,观测数据与拟合数据之间的均方误差小于5%。

3) 将三维地电断面的全域反演改为局域反演,大大提高了三维反演的速度,迭代一次的计算时间由原来的4.5 h左右减少到15 min左右。对比两种方法的计算结果,局域反演的效果要好于全域反演。

[参考文献]

- [1] Lytle R J, and Dines K A. Iterative ray tracing between boreholes for underground image reconstruction[M]. Inst. Elect. Electron. Eng. Trans. Geosci. Remote Sensing, 1980, GE - 18, 234 ~ 239.
- [2] Constable S C, Parker R L, and Constable C G. Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data[J]. Geophysics, 1987, 52: 289 ~ 300.
- [3] Sasaki Y. Two - dimension joint inversion of magnetotelluric and dipole - dipole resistivity data[J]. Geophysics, 1989, 54: 254 ~ 262.
- [4] Sasaki Y. 3 - D resistivity inversion using the finite - element method[J]. Geophysics, 1994, 59: 1839 - 1848.
- [5] Ellis R G, Oldenburg D W. Applied geophysical inversion[J]. Geophysical Journal International, 1994, 116: 5 ~ 11.
- [6] Oldenburg D W, Li Y. Inversion of induced polarization data [J]. Geophysics, 1994, 59: 1327 ~ 1341.
- [7] 阮百尧, 村上裕, 徐世浙, 电阻率/激发极化法数据的二维反演程序[J]. 物探化探计算技术, 1999, 21: 116 ~ 125.
- [8] 黄俊革, 阮百尧, 鲍光淑, 齐次边界条件下三维地电断面电阻率有限元数值模拟法[J]. 桂林工学院学报, 2002, 22: 11 ~ 14.
- [9] 阮百尧, 视电阻率对模型电阻率的偏导数矩阵计算方法[J]. 地质与勘探, 2001, 37: 39 ~ 41.
- [10] 张献民, 电阻率测深的自动直接解释法的若干技术问题[J]. 地质与勘探, 1996, 32: 42 ~ 45.

RESEARCH ON 3 - D RESISTIVITY LEAST - SQUARE INVERSION USING THE FINITE ELEMENT METHOD

HUANG Jun - ge^{1,2}, RUAN Bai - yao², BAO Guang - shu¹

(1. Institute of Information and Physics, Central - South University, Changsha 410083;

2. Department of Resources and Environment Engineering, Guilin Institute of Technology, Guilin 541004)

Abstract: The problems on inversional capability of deeper units, stability and speed in 3 - D resistivity least - square inversion based on FEM are discussed and improved in the paper. The addition of prior information made with volume gene in the least square can resolve effectively ill - posed problem in 3 - D inversion. Aiming at the restriction of inversion based on FEM, getting the logarithm of actual resistivity and theoretic resistivity can improve the stability of inversion. Using exponential form to correct value of the model can fetch up the defect which get minus resistivity and reduce the time of calculation from 2.5 hours to 15 minutes. The result of part inversion is better than that of full inversion. The inversional result of model and practice in field show that the work presented in the paper is effective.

Key words: the finite element method, 3 - D, resistivity, least - square, inversion