

视电阻率对模型电阻率的偏导数矩阵计算方法

阮百尧

(桂林工学院, 桂林 541004)

[摘 要] 按 Tripp et al. (1984) 提出的理论, 给出了一种视电阻率对模型电阻率的偏导数矩阵简便计算方法, 它的核心是互换定理。只要得到所有供电和测量电极节点分别供单位电流时各有限元网格节点上的电位, 通过线性组合就可得到视电阻率对模型电阻率的偏导数。

[关键词] 电阻率 有限元 偏导数 互换定理

[中图分类号] P631.3 [文献标识码] A [文章编号] 0495-5331(2001)06-0039-03

0 引言

直流电阻率的最优化反演中, 常遇到求偏导数矩阵问题。对一维反演问题来说, 可通过差分法求解, 而对于二维和三维反演, 尤其是三维反演, 如若用差分法求解, 则计算工作量相当巨大。如 $10 \times 10 \times 10$ 网格的三维模型, 模型参数共 1000 个, 则用差分法解偏导数矩阵, 需进行 1001 次三维正演模拟计算, 在 PIII50 计算机上按每次正演计算 30min 计算, 共需时间约 500h, 这是不切实际的。为此, 国外 Tripp et al. (1984) 和 Sasaki (1994) 介绍了用互换定理来计算偏导数矩阵方法^[1,2]; 作者曾利用上述方法在直流电阻率/激发极化二维最优化反演方法进

行了应用^[3,4], 另外万乐也在博士论文中介绍了上述方法^[5]。本文将在此基础上, 给出这个方法在三维反演中偏导数矩阵计算的详细过程。用此方法, 直流电阻率测深最优化反演中的偏导数矩阵计算, 仅仅需要分别对所有供电和测量电极节点作为电源点进行正演模拟计算, 然后对所有网格节点上的电位线性组合即可, 大大减少了计算工作量。

1 视电阻率的正演计算

对四极测量装置(包括地面偶极—偶极、对称四极以及井地、井井等四极测量), 视电阻率的表达式为:

$$\rho_s(A, B, M, N) = K(A, B, M, N) [V(A, M) - V(A, N) - V(B, M) + V(B, N)] \quad (1)$$

对三极测量装置, 视电阻率的表达式为:

$$\rho_s(A, M, N) = K(A, M, N) [V(A, M) - V(A, N)] \quad (2)$$

对二极测量装置, 视电阻率的表达式为:

$$\rho_s(A, M) = K(A, M) V(A, M) \quad (3)$$

上述各式中, 供电电流 I 都假设为 1A, $K(A, B, M, N)$ 、 $K(A, M, N)$ 和 $K(A, M)$ 分别为四极、三极和二极装置的装置系数, 仅与供电电极 A 、 B 和测量电极 M 、 N 位置有关; $V(A, M)$ 、 $V(A, N)$ 、 $V(B, M)$ 和 $V(B, N)$ 分别为 A 点供电 M 、 N 处电位和 B 点供电 M 、 N 处电位。由此可见, 任何装置的视电阻率 ρ_s 的计算, 都可归结到点电流源场的电位 V 的计算。

点电流源场电位的计算, 可用有限元方法进行。假设有限元网格节点总数为 M 个, 所有供电电极和测量电极都位于网格节点上, 我们可用 $V(i_A, j_M)$ 来表示 $V(A, M)$ 、 $V(A, N)$ 、 $V(B, M)$ 和 $V(B, N)$, 其

中 i_A 表示供电电极 A 或 B 所在的有限元网格节点编号, j_M 表示测量电极 M 或 N 所在的有限元网格节点编号。则由有限元数值模拟方法知, $V(i_A, j_M)$ 可由下面的线性方程组求得:

$$KV = S \quad (4)$$

式中 K 为 $M \times M$ 阶对称系数矩阵, 其各项元素与模型电阻率分布和网格剖分有关, 当无穷远边界使用二类齐次边界条件时, 元素与电流源点位置无关; V 为 M 个网格节点的电位向量; S 为电流源向量, 其元素 S_k 除含电流源的网格节点处等于 1 外, 其它均等于零。这样 $V(i_A, j_M)$ 实际上是当时电位

[收稿日期] 2001-01-15; [修订日期] 2001-04-16; [责任编辑] 曲丽莉。

[基金项目] 国家自然科学基金项目(40064001)、广西自然科学基金项目(桂科自 0007024)、教育部高等学校骨干教师资助计划项目、广西培养新世纪学术和技术带头人专项资金资助项目部分研究成果。

$$s_k = \begin{cases} 1, & k = i_A \\ 0, & k \neq i_A \end{cases}, k = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

向量中的第 j_M 个元素。由互换原理, 我们还可得到:

$$V(i_A, j_M) = V(j_M, i_A) \quad (6)$$

即网格节点 i_A 供电节点 j_M 处的电位等于在网格节点 j_M 供电节点 i_A 处的电位。

2 视电阻率对模型电阻率的偏导数矩阵计算方法

直流电阻率数据最小二乘反演时, 其偏导数矩阵 A 的形式为^[3]:

$$A = [a_{ij}], a_{ij} = \frac{\partial \log \rho_{si}}{\partial \log \rho_j} = \frac{\rho_i}{\rho_{si}} \frac{\partial \rho_{si}}{\partial \rho_j}, \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, M_s, j = 1, 2, \dots, M_m$$

这里, ρ_{si} 是预测模型的视电阻率数据, 它与 M_s 个实测视电阻率数据相对应, 从 (1) (2) (3) 式知, 它由 $V(i_A, j_M)$ 所组成; ρ_j 是预测模型的第 j 个模型参数, 共 M_m 个模型参数。考虑到电阻率的变化范围过大, 视电阻率和模型参数电阻率都取对数。这样, 视电阻率对模型电阻率的偏导数矩阵的计算, 就归结到网格节点电位对模型电阻率偏导数计算的问题,

即求解: $\frac{\partial V(i_A, j_M)}{\partial \rho_j}$ 。由 (4) 式, 注意到源向量 S 与模型电阻率分布无关, 可得:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_j} (K V) = \frac{\partial K}{\partial \rho_j} V + K \frac{\partial V}{\partial \rho_j} = 0 \quad (8)$$

$$K \frac{\partial V}{\partial \rho_j} = d_1 \{1, 0, 0, \dots, 0\}^T + d_2 \{0, 1, 0, \dots, 0\}^T + \dots + d_M \{0, 0, \dots, 0, 1\}^T \quad (10)$$

由此得:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_j} = d_1 K^{-1} \{1, 0, 0, \dots, 0\}^T + d_2 K^{-1} \{0, 1, 0, \dots, 0\}^T + \dots + d_M K^{-1} \{0, 0, \dots, 0, 1\}^T \quad (11)$$

从 (4) 式知, $d_1 K^{-1} \{1, 0, 0, \dots, 0\}^T$ 实际上为在第 1 个网格节点上供电电流强度为 d_1 时各网格节点上的电位向量, $d_2 K^{-1} \{0, 1, 0, \dots, 0\}^T$ 为在第 2 个网格节点上供电电流强度为 d_2 时各网格节点上的电位向

$$\frac{\partial V(i_A, j_M)}{\partial \rho_j} = d_1 V(1, j_M) + d_2 V(2, j_M) + \dots + d_M V(M, j_M) = \sum_{k=1}^M d_k V(k, j_M)$$

引用互换原理 (6), 上式可写为:

$$\frac{\partial V(i_A, j_M)}{\partial \rho_j} = \sum_{k=1}^M d_k V(j_M, K) \quad (12)$$

即网格节点 i_A 供电, 网格节点 j_M 上的电位对模型电阻率参数的偏导数 $\frac{\partial V(i_A, j_M)}{\partial \rho_j}$, 等于在网格节点 j_M 处供电时, 所有网格节点上电位的线性组合。

上式中, 系数矩阵 K 和电位向量 V 已在正演计算中求得, 而 $\frac{\partial K}{\partial \rho_j}$ 矩阵的元素等于系数矩阵 K 中的元素对第 j 个模型参数电阻率 ρ_j 的导数, 所以很容易计算得到, 并且根据有限元网格剖分规律, 由于 K 中仅几个元素与 ρ_j 有关, 所以 $\frac{\partial K}{\partial \rho_j}$ 矩阵中大部分元素是 0。因此, $\frac{\partial K}{\partial \rho_j} V$ 是已知的, 我们令它等于 $-D$, 这里 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_M\}^T$ 是向量。这样式 (8) 可写为:

$$K \frac{\partial V}{\partial \rho_j} = D \quad (9)$$

上式形式与方程 (4) 完全相同, 若在求解方程 (4) 过程中, 使用乔累斯基分解法, 并保留分解结果, 则很容易用顺代和回代的方法求出所有节点上电位对 ρ_j 的导数。

3 视电阻率对模型电阻率的偏导数矩阵简便计算方法

由于反演过程中的偏导数矩阵仅需要对测量电极节点上电位的偏导数计算, 因此上节的计算方法还不是最理想的计算方案。下面我们仅关心对测量

电极节点上电位的偏导数 $\frac{\partial V(i_A, j_M)}{\partial \rho_j}$ 的计算, 将 (9) 式右端项展开:

量; $d_M K^{-1} \{0, 1, 0, \dots, 0\}^T$ 则为在第 M 个网格节点上供电电流强度为 d_M 时各网格节点上的电位向量。因此, 对 $\frac{\partial V(i_A, j_M)}{\partial \rho_j}$, 即第 j_M 个元素, 我们有:

因此, 若在作正演计算时, 依次计算和存储了各供电和测量节点供单位电流时所有网格节点的电位, 则可计算任何电极装置视电阻率 ρ_s 的雅可比矩阵。如果在正演计算时, 无穷远边界使用二类齐次边界条件, 则系数矩阵 K 与电流源点位置无关, 因此只要进行一次分解 (或消元)。就能计算得到所有电极点供电所有网格节点上的电位。而电位对模型参数

电阻率的偏导仅仅是这些电位的线性组合,因此计算工作量很少。

下面我们列出偏导数矩阵的计算步骤:

1) 解线性方程 $KV = S$, 其中

$$S = [S_1, S_2, \dots, S_{M_e}]^T,$$

M_e 为所有供电和测量电极数, S_i 为 M 维列向量, 除第 i 个电极 ($i = 1, 2, \dots, M_e$) 的网格节点号 j_M 对应的元素等于 1 外, 其它元素都等于 0。这样解一次线性方程就可得到所有电极节点供电时, 所有网格节点上的电位 $V(j_m, k)$;

2) 根据模型参数分布计算 $\frac{\partial K}{\partial \rho_j}$;

3) 计算各电流电极供电时的 $D = -\frac{\partial K}{\partial \rho_j} V$;

4) 按公式(12)计算 $\frac{\partial V(i_A, j_M)}{\partial \rho_j}$;

5) 按公式(1)(2)(3)(4)(7)计算得偏导数矩阵。

[参考文献]

- [1] Tripp A C, Hohmann G W and Swift C M. Two - dimensional resistivity inversion[J]. Geophysics, 1984, 49:1708 ~ 1717.
- [2] Yutaka Sasaki. 3 - D Resistivity inversion using the finite - element method[J]. Geophysics, 1994, 59:1839 ~ 1848.
- [3] 阮百尧, 村上裕, 徐世浙. 电阻率/激发极化法数据的二维反演程序[J]. 物探化探计算技术, 1999, 21:116 ~ 125.
- [4] 阮百尧, 村上裕, 徐世浙. 电阻率/激发极化法数据的二维反演方法[J]. 地球科学, 1999, 24:619 ~ 624.
- [5] 万 乐. 我国南方岩溶石山地区地下水勘查的新方法新技术[A]. 中国地质大学博士论文, 2000, 116 ~ 122.

A GENERATION METHOD OF THE PARTIAL DERIVATIVES OF THE APPARENT RESISTIVITY WITH RESPECT TO THE MODEL RESISTIVITY PARAMETER

RUAN Bai - yao

Abstract :Base on Tripp et al. (1984) sensitivity theorem, a generation method of the partial derivatives of the apparent Resistivity with respect to the model resistivity parameters by is given. The key point is that because of the reciprocity relationship between the source and receiver locations. The partial derivatives of the apparent Resistivity with respect to the model resistivity parameters equal to a linear combination of the forward electric potential responses in all net points of finite element method resulting from sources placed at the receiver sites.

Key words : Resistivity, Finite element method, Partial derivative, Reciprocity theorem.



[作者简介]

阮百尧(1962年-),男,1985年毕业于中南工业大学地质系,获硕士学位,1995年在青岛海洋大学获博士学位,1997年10月至1998年9月被日本地质调查所聘为特别研究员,现为桂林工学院教授,主要研究方向为电磁法数值模拟和反演成像工作。

通讯地址:广西桂林市建干路12号 桂林工学院 邮政编码:541004

《中国地质》(季刊)征订征稿启事

《中国地质》是国土资源部主管、中国地质调查局主办的综合性地质学术刊物。该刊以基础性、公益性、学术性为特色,倾力展示国家层次、高水平的学术科研成果,着重反映地质大调查和国家级科研项目(如国家自然科学基金项目、国家科技攻关项目、973和863计划项目等)中具有创新性、前沿性、综合性、导向性的研究成果。内容涉及基础地质(包括地层、古生物、构造地质、岩石、矿物等)、矿床地质、能源地质、海洋地质、水文地质、环境地质(含生态地质和灾害地质)、遥感地质、应用地球物理、地球化学、地质信息等研究成果。原《中国区域地质》(季刊)的内容也将在《中国地质》(季刊)上反映。

《中国地质》为季刊,大16开本,每期112页,

逢季中月25日出刊。国内统一刊号:CN11-1167/P,国际标准刊号:ISSN1000-3657。国内外公开发行人,邮发代号:2-112。每本定价20元,全年80元。欢迎广大读者到当地邮局订阅。如误时漏订,请直接与本刊编辑部联系。

同时,热忱欢迎各路地学精英踊跃投稿!

《中国地质》编辑部地址:

北京海淀区学院路31号中国地质调查局发展研究中心《中国地质》编辑部

邮政编码:100083

联系电话:(010)82327346

传真:(010)82329008

电子信箱:zhgdzh@chinaren.com