二维声波方程稳健迭代速度反演

高尔根[1],徐果明[1],李光品[1],贺传松[2],刘同庆[3]
(1.中国科学技术大学,合肥 230026;2.中国地震局地球物理研究所,北京 100081;3.安徽省地质调查院,合肥 230022)

[摘 要]从二维声波方程初、边值问题出发,通过引进一个广义幂指数误差分布函数,以及对波动方程的Lippman - Schwinger方程的解进行Born近似,导出一个残差加权迭代最小二乘(稳健迭代)算法,进而实现对地下介质剖面的速度结构反演计算。模拟计算表明,本方法具有较高的精度和较强的抗干扰能力,是求解声波方程反演问题的一种有效方法,同时也为地下介质的速度分布成像提供一种新的技术。

[关键词]声波方程 误差分布函数 反演 成像
[中图分类号]P313.2 [文献标识码]A [文章编号]0495 - 5331(2000)05 - 0054 - 05

技术·方法

1 引言

利用地震勘探资料反演地下结构和物性参数,一直是地震资料数据处理的重要研究内容,它是一个十分复杂的理论和应用问题。地震反问题可广义地归结为反散射方法和基于迭代的间接反演方法。反散射方法的基本原理是散射理论,它是由Cohen和Bleistein(1977)首先在Geophysics杂志上发表的应用反散射理论研究常速背景下,零偏移距地震资料反演速度小摄动方法而发展起来的。后来又经Beylkin(1985)和Bleistein(1986,1987)等人的进一步完善,最终形成了反散射方法类。而间接方法是以Tarantola(1982,1984,1986,1987,1988)的最小二乘准则下的优化算法为代表,其专著Inverse Problem Theory(1987)是对这一方法体系的系统总结。

国内对于反演问题的研究相对较晚一点。黄光远等人(1985,1986)从微分方程的边值问题出发,利用特征线理论,给出了快速反演波阻抗的方法。后来,刘家琦等人(1991,1994)在其基础上,对波阻抗反演问题进行了深入地研究,使得一维波动方程的反演方法较为成熟,并在石油勘探中获得了实际应用,得到了较好的效果,对整个物探研究带来了深远的影响。

然而,实际工作中为了详尽地查明地下地质构造和岩性参数,一维反演方法远不能满足要求,因此,需要加强二维乃至多维波动方程反演方法的研究。在二维研究方面,Crase等人(1990)曾利用 P 波和 S 波对弹性波方程的非线性波形反演问题进行过详细研究,并取得了很好的反演结果。黄联捷等(1991a,1991b)和杨文采(1995)则从逆散射理论出发,通过对介质模型进行一定的假设后,导出了声波方程逆散射问题的解析表达式,实现对地下介质结构的反演计算。陈小宏等(1996)则采用最小平方拟合修正模型参数,对二维波动方程进行反演,并对加噪稳定性问题进行了研究。王守东等人(1995)从二维声波方程出发,用最小二乘和正则化方法相结合的办法,成功地模拟了利用垂直入射时的反射地震记录,反演地下介质的速度分布。以上这些方法为我们提供了较好的数值模拟结果。

本文则从二维声波方程初、边值问题出发,结合Born近似和广义幂指数误差分布函数,给出了二维声波方程反演的稳健迭代算法。该方法具有较强的抗噪能力,是求解声波方程反演问题的又一种行之有效的数值方法。

2 数学模型

对于二维地质体模型,横向 x 为地表坐标,纵向 z 为深度坐标,描述地震波传播的二维声波方程为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2(x,z)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_i F_i(t)\,\delta(z-z_i) \quad (1)$$

上式 $F_i(t)$ 为震源函数,$v(x,z)$ 为速度变量,速度变量在 $\Omega=[0,X]\times[0,Z]$ 区域上变化,在区域 Ω 之外,认为它是一个常速度,即 $v(x,z)=v_0$。

假设介质在激发前为静止状态,则有:

$$u(x,z,0)=\frac{\partial u(x,z,0)}{\partial t}=0 \quad (2)$$

考虑到地震波在地表接近垂直出射和接收的为

[收稿日期]1999 - 09 - 18;[责任编辑]王延忠
[基金项目]国家自然科学基金94274203与49974008项目及教育部研究基金和中国科技大学青年基金联合资助课题。

垂直分量,自由表面边界条件近似为:

$$\frac{\partial u(x,0,t)}{\partial z}=0 \tag{3}$$

为了模拟计算地震波在半无穷介质中的传播情况,在区域 Ω边界上采用吸收边界条件:

$$\left(\frac{1}{v_0}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)u(0,z,t)=0 \tag{4}$$

$$\left(\frac{1}{v_0}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)u(X,z,t)=0 \tag{5}$$

$$\left(\frac{1}{v_0}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)u(x,Z,t)=0 \tag{6}$$

对于给定速度 $v(x,z)$ 的分布,求取波场分布 $u(x,z,t)$ 问题,为正演问题。在实际地震勘探中,要求通过地表观察资料,推算地下速度分布,这为反演问题。

对于反演问题来说,上述边值问题(1)～(6)需要补充附加条件:地表地震记录 $u(x,0,t)=f(x,t)$ 。

3　反演问题

反演是指在已知地震记录的情况下,反算地下结构或速度分布问题。本文中就是已知 $u(x,0,t)$ 的分布,求取 $\Omega=[0,X]\times[0,Z]$区域内的速度分布。这样,从初、边值问题(1)～(6)出发,首先对(1)～(6)关于时间 t 作 Fourier 变换,令 $\alpha(x,z)=v_0^2/v^2(x,z)$、$k=\omega/v_0$、$\hat{u}=\hat{u}(x,z,k)$,可得:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2}+\alpha(x,z)k^2\hat{u}=\sum\limits_i\hat{u}_i(k)\,\delta(z-z_i)\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{u}(x,0,k)=0\\ \left(jk+\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\hat{u}(x,Z,k)=0\\ \left(jk-\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\hat{u}(0,z,k)=0\\ \left(jk+\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\hat{u}(X,z,k)=0\end{cases} \tag{7}$$

令 $\alpha(x,z)=\alpha_0(x,z)+\triangle\alpha(x,z)$,则(7)的第一个方程变为:

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2}+\alpha_0(x,z)k^2\hat{u}=\sum_i\hat{u}_i(k)\,\delta(z-z_i)-\triangle\alpha(x,z)k^2\hat{u} \tag{8}$$

它的 Lippman - Schwinger 方程解为:

$$\hat{u}(x,z,k,\alpha)=\hat{u}_0(x,z,k,\alpha_0)-k^2\iint_0^{X\,Z}G(x,\xi,z,\zeta,k,\alpha_0)\cdot\hat{u}(\xi,\zeta,k,\alpha)\triangle\alpha(\xi,\zeta)\,d\xi d\zeta \tag{9}$$

等式中 $\hat{u}_0(x,z,k,\alpha_0)$ 是边值问题(7) 对 $\alpha(x,z)=\alpha_0(x,z)$ 情况下的解,$G(x,\xi,z,\zeta,k,\alpha_0)$ 为 Green 函数,对上式进行反 Fourier 变换(关于时间 t),并用 $g(x,\xi,z,\zeta,t,\alpha_0)$ 表示 $G(x,\xi,z,\zeta,k,\alpha_0)$ 的反 Fourier 变换。可得:

$$u(x,z,t,\alpha)=u_0(x,z,t,\alpha_0)+\iint_0^{X\,Z}v_0^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t g(x,\xi,z,\zeta,t',\alpha_0)\cdot u(\xi,\zeta,t-t',\alpha)\,dt'\triangle\alpha(\xi,\zeta)\,d\xi d\zeta \tag{10}$$

在地震勘探中,通常所采集到的是 $z=0$ 处的地表地震记录 $f(x,t)$,并且在地表以下的深度处,波场是未知的,用 $u_0(x,z,t,\alpha_0)$ 代替 $u(x,z,t,\alpha)$,从而可以获得一个一级 Born 逼近的线性近似式子:

$$f(x,t)=u_L(x,0,t,\alpha)=u_0(x,0,t,\alpha_0)+\iint_0^{X\,Z}K(x,\xi,\zeta,t,\alpha_0)\triangle\alpha(\xi,\zeta)\,d\xi d\zeta \tag{11}$$

式中 $K(x,\xi,\zeta,t,\alpha_0)$ 为核函数:

$$K(x,\xi,\zeta,t,\alpha_0)=v_0^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t g(x,\xi,0,\zeta,t',\alpha_0)\cdot u_0(\xi,\zeta,t-t',\alpha_0)\,dt' \tag{12}$$

上述方程(12)为二维第一类 Fredholm 积分方程,在一般情况下,由于测量数据 $f(x,t)$ 是不精确的,并且其积分核也可能是病态的。为此,我们把误差函数表示为 $\varepsilon(x,t)=f(x,t)-u_L(x,0,t,\alpha)$,并且定义一个广义似然函数,使误差分布满足模型参数的优化选择时,广义似然函数取极大值。这个误差函数可以通过广义幂指数在概率分布族中适当地表示为:

$$f(\varepsilon,\beta,P)=\frac{P}{2\beta\Gamma(1/P)}e^{-(|\varepsilon|^P/\beta)} \tag{13}$$

这里 $\Gamma(\cdot)$ 是伽玛函数,β和 P 都是正参数。

上式中,当 $P=1$ 时,它简化为二项指数分布;而当 $P=2$ 时,它变为具有 $\beta^2=2\sigma^2$ (σ^2 是方差)的普通高斯分布,这时 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$;对于 P 接近无穷时($P\to\infty$),则变为均匀分布。它的优点在于:它所描述的误差分布不仅仅是高斯分布,而是一个常见的地震噪音的宽频带分布,它同时也提供了一个误差概率分布情况下,获得优化模型参数的准则。在本方法中,这个广义似然函数具体为:

$$f(u_L,\beta,P)=\frac{P}{2\beta\Gamma(1/P)}exp\left(-\left\{\sum_{i=1}^{Nx-1}\sum_{j=1}^{Nt}|f(x_i,t_j)-u_L(x_i,0,t_j,\alpha)|^P\triangle x\triangle t/\beta\right\}\right) \tag{14}$$

上式中 Nx, Nt 分别是对地表位置和时间变量的离散总段,$N_x=X/\triangle x$, $N_t=T/\triangle t$. 这个似然函数取极大值等价于:

$$\sum_{i=1}^{Nx-1}\sum_{j=1}^{Nt}\left| f(x_i,t_j)-u_L(x_i,0,t_j,a)\right|^{P}=\min \qquad (15)$$

为了从上式中推得模型参数的变换量修正值 $\triangle a(\xi,\zeta)$,我们把线性化波场(11)进行离散化,考虑到 $\Omega=[0,X]\times[0,Z]$ 区域之外波速为常速 v_0 ,应有 $\triangle a_{l,m}$ 为 0 ,并令 $D_{ij}=f(x_i,t_j)-u_0(x_i,0,t_j,a_0)$, $\omega_{ilmj}=K_{ilmj}\triangle x\triangle z$ 和 $r_{ij}=D_{ij}-\sum_{l=1}^{Nx-1}\sum_{m=1}^{Nz-1}\omega_{ilmj}\triangle a_{lm}$,最终可推得:

$$\sum_{i=1}^{Nx-1}\sum_{j=1}^{Nt}\frac{\omega_{inqj}D_{ij}}{|r_{ij}|^{2-P}}=\sum_{i=1}^{Nx-1}\sum_{j=1}^{Nt}\frac{\omega_{inqj}\sum_{l=1}^{Nx-1}\sum_{m=1}^{Nz-1}\omega_{ilmj}\triangle a_{lm}}{|r_{ij}|^{2-P}} \qquad (16)$$

写成矩阵形式为:

$$\vec{\omega}^{T}\vec{R}\vec{\omega}\triangle a=\vec{\omega}^{T}\vec{R}D \qquad (17)$$

通过求解上述(17)式,可以获得模型参数的修正矢量 $\triangle a$,这样就可以获得新的模型矢量 $a=a_0+\triangle a$ 。为了更好地获得一个接近于真实模型参数的估计值,我们采用迭代方法:即以每次迭代中获得的新的模型参数,作为下次迭代的初始值,通过反复地分配权矩阵 $\vec{R}$ 给 $\vec{\omega}^{T}\vec{\omega}$ 和 $\vec{\omega}^{T}D$ 实现加权,一直迭代到该模型参数满足一定的精度要求为止。这一迭代过程又叫做迭代加权最小二乘法,或叫做稳健方法。这一算法,在当 $\|r_{ij}\|<\varepsilon$ (收敛条件),或达到迭代的最大次数时结束。

Byrd 和 Dyne(1979)表明:迭代加权最小二乘法,当范数 $P(1<P<2)$ 在满足相当弱的条件下是完全收敛的,特别地, $\|r_{ij}\|$ 必须满足条件:1)非增的,2)有界的。对于这样两个条件,我们是通过下列修改权系数的办法达到的:

$$r_{ij}=\begin{cases}|r_{ij}(k)|^{P-2} & |r_{ij}(k)|>\delta\\ |\delta|^{P-2} & |r_{ij}(k)|<\delta\end{cases}$$

δ 是某个给定的小正数, k 是迭代次数。通过这样修改,这个算法完全地收敛到某个固定点 $\triangle a$ 。原则上, P 可以取 1 到 2 之间的任意值,都可保证迭代加权最小二乘法收敛,即保证稳健迭代反演实现;考虑到我们所加的噪声是采用伪随机数模拟的,为了防止离群点问题,计算中取 $P=1.35$,这样,使数据误差既体现高斯分布,又体现二项分布。

4　数值模拟

下面分别对水平层状介质、向斜构造和二维介质中含有异常体模型进行反演计算,图 1(a)为一个水平层状介质网格模型,第一层速度为 2600 m/s,第二层速度为 3000 m/s,其横向长度 $X=120$ m,地下深度为 $Z=60$ m,取空间网格为 $\triangle x=10$ m, $\triangle z=5$ m,时间步长为 $\triangle t=1.5$ ms。图 1(b)为其震源函数 $F_i(t)$,震源位于 $z=5$ m 处;反演时,初值取为 2400 m/s, $P=1.35$,反演最终结果的等值线图为图 1(c)所示,图 1(d)为其反演的网格点数据,图中数值表示其左上角离散网格点的反演值。从上述反演的网格点数据与原模型数据比较,可以看出:在无噪情况下本方法可以精确地反演地下速度分布;图 1(c)、1(d)的比较结果也提示我们,在等值线图 1(c)中所出现的等值线速度梯度问题是由于数据稀疏和选取等值线间距所造成的,为了减少这种问题,提高分辨率,就需要加大数据量,这对方法本身的检验来说,关系不大。上述比较结果同时说明,等值线图形的分辨率与数据的疏密有关,而与反演结果本身无关。

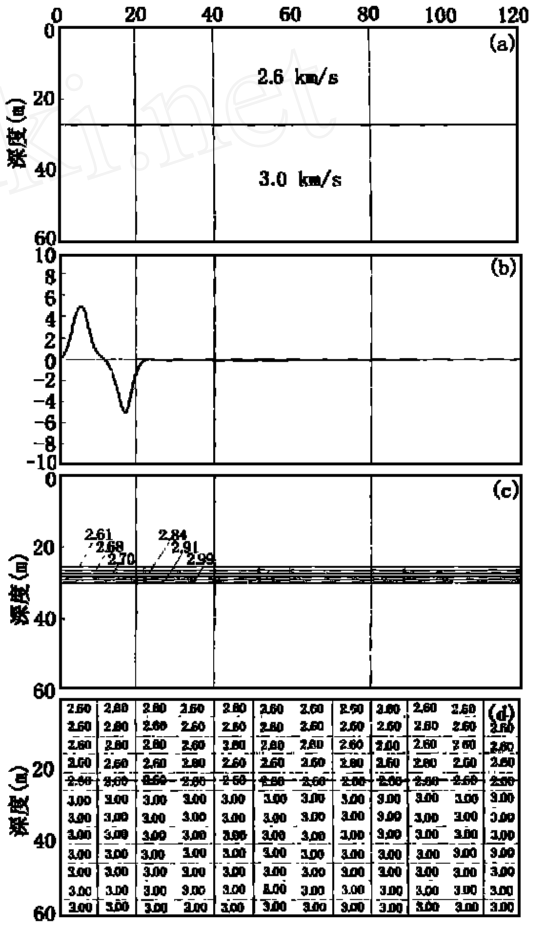

图 1　水平层状介质模型

(a) —模型;(b) —震源函数;(c) —反演的等值线图;(d) —反演的网格点数据

为了检验该算法的抗噪能力,我们在向斜构造和高速异常体模型的反演计算中,通过对反演数据

加 10 %和 20 %的随机噪声进行了反演计算,研究其有效性和稳定性;图 2(a)为向斜构造模型,其第一层速度为 2600 m/s,第二层速度为 3000 m/s,震源函数取为图 1(b)形式,反演时的初值和 P 的取值同上。图 2(b)为其无噪时反演的等值线图,图 2(c)和(d)为它们加噪 10 %和 20 %后的反演等值线图;图 3(a)为均匀背景中存在高速异常体网格模型,背景速度为 2600 m/s,异常体速度为 3000 m/s;图 3(b)、(c)和(d)分别为无噪和加噪 10 %及 20 %的反演等值线图。

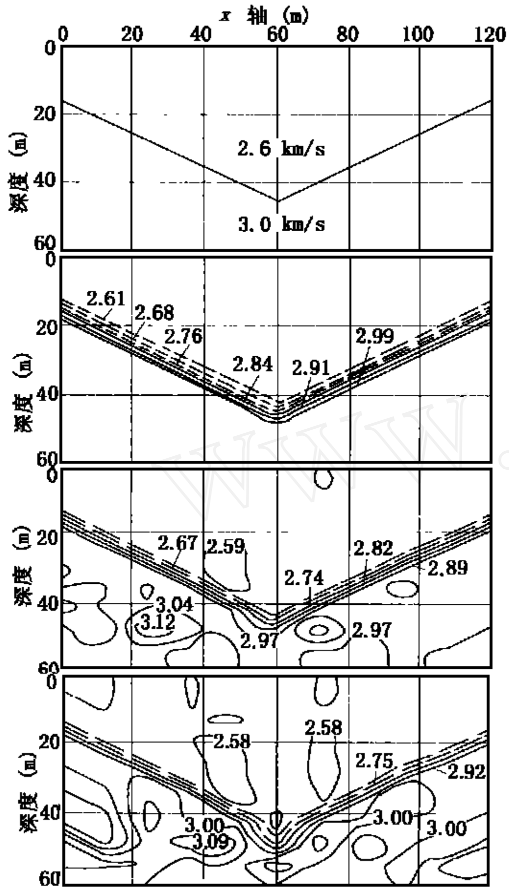

图 2　向斜构造模型

(a) —模型;(b) —无噪反演的等值线图;(c) —加噪 10 %反演的等值线图;(d) —加噪 20 %反演的等值线图

从上述的反演结果可以看出:本反演算法具有较高的精度和较好的抗噪能力,即使在达到 20 %的噪声水平下,仍可以获得较好的反演结果。

5　结论和讨论

本文所提出的反演方法是求解二维声波方程速度反演问题的一种稳健算法,是在计算过程中引进非整数范数,通过广义似然函数极大化,实现对反演时形成的矩阵方程自动加权,从而最终实现加权最小二乘迭代运算,克服了传统的求解过程中,仅用 l_1 范数或 l_2 范数的弊端,以及人为加权的盲目性。

从我们给出的广义似然函数公式中可以看出:当 P 从 1 变化到 2 的过程中,相当于误差从具有单纯的二项分布变化到具有单纯的高斯分布,这也提示出,P 取 1 与 2 之间的某个值时,它就可以代表两种分布同时存在时的情况。

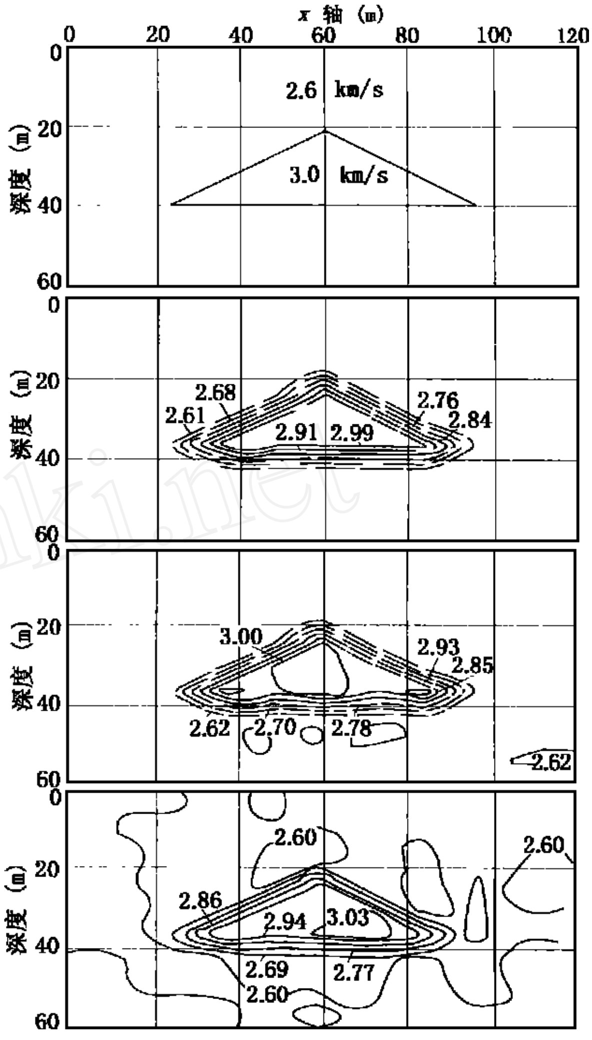

图 3　均匀背景中存在高速异常体模型

(a) —模型;(b) —无噪反演的等值线图;(c) —加噪 10 %反演的等值线图;(d) —加噪 20 %反演的等值线图

从反演结果的网格点数据与原模型网格点数据比较,可以看出:在无噪情况下,本方法可以精确地反演地下速度分布,为了减少在等值线图 1(c)中所出现的等值线速度梯度问题,提高分辨率,仅需要加大数据量,而与反演结果本身无关。

另外,模型计算还表明:该算法具有较强的抗干扰能力,如图 2(d)和 3(d)所示的反演结果,在噪声达到 20 %的水平下仍能获得令人满意的结果。

该算法由于采用时间域计算,并且每次迭代过

程中,需要反复计算 Green 函数,这就花费了大量时间,从而使该算法占用内存较大,计算效率不太高;但是我们知道,Green 函数的计算是高度并行的,随着并行机的发展,这一问题将会得到很好解决,计算效率将会大大提高。

[参考文献]

[1] Belkin G. Imaging of discontinities in inverse scattering problem by inversion of a causal generalized Radon transform[J].J Math Phys,1985,26:99～108.

[2] Bleistein N, Cohen J K, Hagin F G. Computational and asymptotic aspects of velocity inversion[J]. Geophysics, 1985,50:1253～1265.

[3] Bleistein N,Cohen J K,Hagin F G. Two - and - one - half dimensional Born inversion with an arbitrary reference[J]. Geophysics,1987,52:26～36.

[4] Byrd R A,Pyne D A. Convergence of the iteratively reweighted least - squares algorithm for robust regression[J]. Technical Rep (The Johns Hopkins Univ,1979(313).

[5] 陈小宏,牟永光. 二维地震资料波动方程非线性反演[J]. 地球物理学报,1996,39:401～408.

[6] Cohen J K,Bleistein N. Velocity inversion procedure for acoustic waves [J]. Geophysics,1979,44:1077～1087.

[7] Cohen J K,Hagin F G,Bleistein N. Three - dimensional Born inversion with an arbitrary reference[J]. Geophysics,1986,51:1552～1558.

[8] Crase E,Pica A,Noble M et al. Robust elastic nonlinear waveform inversion: Application to real data[J]. Geophysics,1990,55:527～538.

[9] 黄光远,等. 地震勘探的一维反射波成像[J]. 地球物理学报,1985,28:118～125.

[10] 黄光远. 地震勘探问题的一种新模型及其算法[J]. 地球物理学报,1986,(29):503～510.

[11] 黄联捷,杨文采. 参考波速线性变化时的声波方程逆散射反演[J]. 地球物理学报,1991,34:89～98.

[12] 黄联捷,杨文采. 声波方程逆散射反演的近似方法[J]. 地球物理学报,1991,34:626～634.

[13] 刘家琦,等. 波动方程的逐段折叠反演方法[J]. 哈尔滨工业大学学报(数学专刊),1991:23～27.

[14] 刘家琦,刘克安,等. 微分方程反演声阻抗剖面[J]. 地球物理学报,1994,37:101～107.

[15] Pica A,Diet J,Tarantola A. Nonlinear inversion of seismic reflection data in a laterally invariant medium[J]. Geophysics,1990,55:284～292.

[16] Tarantola A,Valette B. Generalized non - linear inversion problems solved using the least - squares criterion[J]. Rev of Geophys and Space Physics,1982,20:219～232.

[17] Tarantola A. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation[J]. Geophysics,1984,49:1259～1266.

[18] Tarantola A. A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data[J]. Geophysics,1986,51:1893～1903.

[19] Tarantola A. Inversion problem theory - methods for data fitting and model parameter estimate[J]. Elsevier Science Publ Co Inc,1987.

[20] Tarantola A,Jobert G,Trezeguet D,Denelle E. The nonlinear inversion of seismic waveforms can be performed either by time extropolation or depth extrapolation[J]. Geophys,1988,36:383～416.

[21] 王首东,刘家琦,黄文虎. 二维声波方程速度反演的一种方法[J]. 地球物理学报,1995,38:833～839.

[22] 杨文采. 地震波场反演的 B - G 逆散射方[J]. 地球物理学报,1995,38:358～366.

2 - D ROBUST ITERATIVE VELOCITY INVERSION OF ACOUSTIC WAVE EQUATION

GAO Er - gen,XU Guo - ming,LI Guoang - pin,HE Chuan - song,LIU Tong - qing

Abstract:2 - D velocity inversion of acoustic wave equation is studied. First,starts from initial condition and boundary condition of wave equation,and adopts Born approxmiation. Then,we introduce generalized exponential error distribution function to our model,and minimize it. One anto weighted robust iterative inversion of 2 - D acoustic wave equation is obtained: Iterative weighted least squares method. Further,the velocity inversion of media underground is solved. Numerical tests show that this method can give a result with accutacy and stability. It's an effective algorithm for 2 - D velocity inversion of wave equation. Meanwhile, it offers a new kind of method for tomography of velocity structure underground.

Key words:acoustic wave equation, error distribution function, inversion, tomography.

第一作者简介:

高尔根(1965 年 -),男。1991 年在长春地质学院应用地球物理专业获硕士学位,1999 年获中国科技大学博士学位。现任中国科技大学地球和空间科学系讲师,主要从事重、磁资料处理和解释工作及地震波传播理论和地震资料处理方法研究与教学工作。

通讯地址:安徽省合肥市　中国科技大学七系　邮政编码:230026