

47-49 筒柱体新型快捷算法及应用简介

曹玉聘

陈战杰

(河南省地矿厅地勘一院·南阳·473003) (国土资源部·北京·100035)

将各类筒柱体(含拟柱体)的内插面积和体积计算通式表示为一个简单的二次三项式及其定积分形式,实现了一式多用和有关的直接复合运算,可使常规的复杂定积分近似计算转化为简单的精确计算。

关键词 筒柱体 新型快捷算法

体积计算 储量计算

在已往数学公式中,尚无拟柱体内插横断面积的通用算式,鉴于此,笔者探求了一种快捷算法。

多面体,其侧棱或侧线均为直线,侧面可为平面或扭面,柱高或柱长等于两平行底面的距离。筒柱体包括几何学中的各类锥体、柱体、拟柱体等,而且可为凸面体和凹面体。主要类型有5种(图1)。

1 要点简述

筒柱体为两底和所有顶点均在两平行平面上的

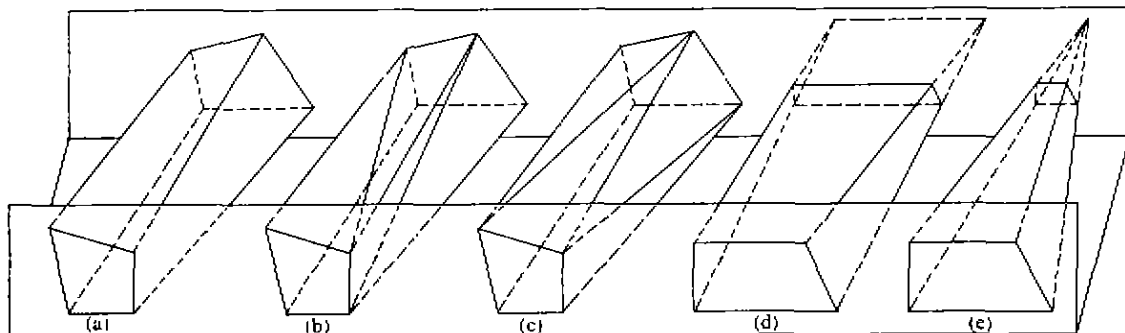


图1 筒柱体主要类型示意图

(a)一扭面体;(b)一拟柱体;(c)一凸面体;(d)一拟层体;(e)一截锥体

设某筒柱体的两底面积为 S_1 和 S_2 , 柱高和中位面积为 L 和 S_3 。这里引入一个常数因子 Q :

$$Q = 4S_3 - S_1 - S_2, \text{ 或 } S_3 = (S_1 + S_2 + Q)/4 \quad (1)$$

L 上任意位置(x)所对应的横断面积为:

$$S(x) = A + Bx + Cx^2 \quad (2)$$

式中, $A = S_1$,

$$B = (Q - 2S_1)/L = (4S_3 - 3S_1 - S_2)/L,$$

$$C = (2S_1 + 2S_2 - 4S_3)/L^2;$$

式(2)为二次抛物线,而且具有广义性(可包括延长的虚棱部分),故可由任意三个异位横断面积运用待定系数法求出各项系数。

由式(2)可得区间 $[a, b]$ 的体积为:

$$V = \int_a^b S(x) dx = V(x) \Big|_a^b =$$

$$[Ax + Bx^2/2 + Cx^3/3]_a^b \quad (3)$$

$$\text{或: } V = V(b) - V(a) \quad (4)$$

当 $L = x_2 - x_1$ 时, (2)、(3)两式中的 x 可由 $x - x_1$ 代替。利用(2)、(3)两式易于求出 L 上任意内插

位置的横断面积和任意内插区间 $[a, b]$ 的体积。当 $a = 0, b = L$ 时, 则:

$$V = L(S_1 + S_2 + 4S_3)/6 = L(2S_1 + 2S_2 + Q)/6 \quad (5)$$

此为常规的拟柱体体积公式。

当横断面积 $S(x)$ 与另一函数相乘或复合时,

$$\text{即: } F(x) = G(x)S(x) \text{ 或 } F(x) = G[S(x)] \quad (6)$$

则任意内插区间 $[a, b]$ 的复合值为:

$$F = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b G(x)S(x) dx \quad (7)$$

$$\text{或: } F = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b G[S(x)] dx \quad (8)$$

(7)、(8)两式比原有定积分近似计算方法大为简便和实用,以本法为基础的《储量计算积分法》已获得较好的应用效果。

$$\text{更一般地,若 } F'(x) = f(x) \quad (9)$$

$$\text{则: } F = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b \quad (10)$$

对筒柱体来说,常可直接求出 F , 即:

$$F = F(b) - F(a) \quad (11)$$

在具体应用中, S_3 和 Q 常用图解法、位形法或

座标法求出。图解法和座标法可用常规方法先求出 S_3 而后得 Q , 此不赘述。下面对位形法作一说明。

位形法可先直接求出 Q , 而后得 S_3 , 适用于平行四边形底面的各种平面类凸面简柱体。当两底面为矩形时(图2), 其简化形式如下:

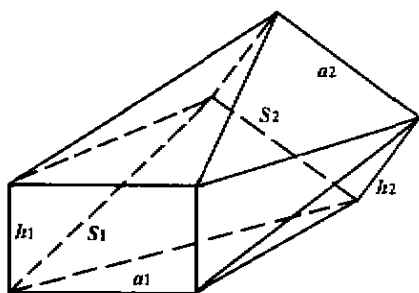


图2 矩形底面拟柱体示意图

$$Q = \sin\varphi(a_1a_2 + h_1h_2) + \cos\varphi(a_1h_2 + a_2h_1) \quad (12)$$

式中 a_1 、 a_2 和 h_1 、 h_2 分别为两底面的宽和高, φ 为 a_1 与 a_2 或两底面对应边中线的异面交角, 主值区间 $[0, \pi]$ 。两底面积分别为: $S_1 = a_1h_1$, $S_2 = a_2h_2$ 。

当 $\varphi > 0$ 时, 则如式(12), 此为矩形底面的拟柱体; 特殊情况下, 若 $a_1a_2 = 0$ 或 $h_1h_2 = 0$, 则 $Q = a_1a_2\sin\varphi$ 或 $Q = h_1h_2\sin\varphi$ (13)

此为表示斜四面体;

当 $\varphi = 90^\circ$ 时, 则(13)式变为: $Q = a_1a_2$ 或 $Q = h_1h_2$ (14)

此为正四面体(属拟层类)。

当 $\varphi = 0$ 时, 则(12)变为: $Q = a_1h_2 + a_2h_1$ (15)
此为拟层体; 特殊情况下, $Q = a_1h_2$ 或 $Q = a_2h_1$ (16)

此为正四面体。上述斜四面体公式若令 $h_2 = a_2\sin\varphi$ 或 $a_2 = h_2\sin\varphi$, 亦可化为 $Q = a_1h_2$ 或 $Q = a_2h_1$, 故斜四面体又可视作拟层体。

当 $\varphi = 0$ 且 $a_1h_2 = a_2h_1$ 时, 此为截锥体, 则:

$$Q = 2a_1h_2 = 2a_2h_1 \text{ 或 } Q = 2\sqrt{S_1S_2} \quad (17)$$

由上可知: 当 Q 和两底面的 a 、 h 或 S 已知时, 可由上述公式判别简柱体类型; 反之, 当简柱体类型(φ 角)和 a 、 h 或 S 已知时, 可简便求出 Q 而后得 S_3 (适合于截锥体、拟层体和矩形断面的拟柱体)。

对任一简柱体来说, 当 $Q < 2\sqrt{S_1S_2}$ 时, 则必为四面体; 否则, 当 $Q \geq 2\sqrt{S_1S_2}$ 时, 可以是任一类型, 且常可在降维等积条件下实现与矩形底面的拟柱体、拟层体或截锥体类型的相互转换以及同类异形转换(当转换成截锥体时, 两底面可为任意的同位相

似形), 这些转换常可满足某些特殊需要。

在实际工作中, 有时需要求解已知面积、体积等的内插位置, 这时, 只需适当变换前述有关算式, 然后对方程求解即可。如:

求横断面积为 S_0 的内插位置, 可将(2)式变为:
 $A_0 + Bx + Cx^2 = 0$ (18)

式中, $A_0 = A - S_0$, 解出 x 便得所求之内插位置。

求体积为 V_0 的内插区间 $[a, b]$, 可先设定 $a = a_0$ 或 $b = b_0$, 而将(4)式变为: $A_0 + V(x) = 0$, 式中 $A_0 = -V(a) - V_0$ 或 $A_0 = -V(b) + V_0$

此为一元三次方程, 解出 x 便得 b 或 a 。

仿照上述, 还可求解其它内插位置, 如将(11)式变为: $A_0 + F(x) = 0$, 式中 $A_0 = -F(a) - F_0$ 或 $A_0 = -F(b) + F_0$, 然后求出 b 或 a 。

2 应用简介

2.1 图解法

可用常规的图解方法直接求出中位面积, 适用于两底面为任意形状的各类简柱体, 计算精度取决于图解精度。

例1 设某一储量计算块段(或其它简柱体)两断面(底面)的面积和某组分含量分别为 $S_1 = 6$, $S_2 = 9$, $P_1 = 22\%$, $P_2 = 11\%$, 且该含量呈线性过渡, 中位面积和块段长度分别为 $S_3 = 12$, $L = 10$ 。试求位置 a ($= 3$) 和 b ($= 6$) 处的横断面积及整块和 $[a, b]$ 区间的体积、该组分总量和平均含量。

按照题设由(1)式可得: $Q = 4S_3 - S_1 - S_2 = 33$, 由(2)式即: $S(x) = A_S + B_Sx + C_Sx^2$, 其中 $A_S = S_1 = 6$, $B_S = (Q - 2S_1)/L = 2.1$, $C_S = (S_1 + S_2 - Q)/L^2 = -0.18$

可得: $S(3) = 10.68$, $S(6) = 12.12$ 。

由(3)式即: $V = [A_Sx + B_Sx^2/2 + C_Sx^3/3]_a^b$ 可得区间 $[0, 10]$ 的体积为: $V_0 = V(x)|_0^{10} = 105$; 区间 $[3, 6]$ 的体积为: $V = V(x)|_3^6 = 35.01$

根据题设可知内插断面的组分含量为:

$P(x) = A_P + B_Px$, 其中, $A_P = P_1 = 0.22$, $B_P = (P_2 - P_1)/L = -0.011$

由(6)式可知内插面含量积为:

$$S_P(x) = S(x)P(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

其中, $A = A_SA_P = 6 \times 0.22 = 1.32$,

$$B = A_SB_P + B_SA_P = 0.396,$$

$$C = B_SB_P + C_SA_P = -0.0627,$$

$$D = C_SB_P = 0.18 \times (-0.011) = -0.00198$$

则 $[a, b]$ 区间的体含量积为:

$$V_P = [Ax + Bx^2/2 + Cx^3/3 + Dx^4/4]_a^b$$

故区间 $[0, 10]$ 的体含量积为:

$$V_{P0} = V_P(x)|_0^{10} = 17.05$$

区间 $[3, 6]$ 的体含量积为:

$$V_P = V_P(x)|_3^6 = 5.957325$$

此值为 $[a, b]$ 区间该组分所占体积,乘以体重后便得该组分的重量。

从而可得整块的平均含量为:

$$P_{V0} = V_{P0}/V_0 = 17.05/105 = 16.24\%$$

内插区间 $[3, 6]$ 的平均含量为:

$$P_V = V_P/V = 5.957325/35.01 = 17.02\%$$

此外,求内插位置或区间时,可先变换有关算式,然后求根,符合题设条件之根即为所求答案。如本例,若求 $S_0 = 7$ 的内插位置,可令 $S(x) = S_0$,将(2)式变为: $A_{S0} + B_{S0}x + C_{S0}x^2 = 0$,其中 $A_{S0} = A_S S_0 = 6 \cdot 7 = -1$,亦即: $-1 + 2.1x - 0.18x^2 = 0$,解得两根为: $x_1 = 0.49742$, $x_2 = 11.1693$ 。由题设可知 x_1 为所求内插位置, x_2 位于延长部分。求内插区间时,可先设定 a 或 b ,然后对 b 或 a 求根。上述求法适用于各类圆柱体及其复合问题。

2.2 位形法

位形法可直接求得 Q ,对两底面均为矩形的凸面圆柱体较为简便、实用。

例2 设某一凸面圆柱体两矩形底面的底和高分别为 $a_1 = 6, h_1 = 1$ 和 $a_2 = 2, h_2 = 4.5$,异面交角 $\varphi = 38.1^\circ$,其它同例1。

根据题设可知: $S_1 = 6, S_2 = 9$,由(12)式可得:

$$Q = 33$$

本例的圆柱体相当于例1的降维等积变换,后

续计算见例1。

2.3 坐标法

可由两底面各顶点坐标和侧棱的对应顶点求出两底和中位面积,而后求出 Q ,适用于侧棱较少的各类圆柱体。

例3 设某圆柱体两底面各顶点坐标顺次为: $A(1,1), B(5,1), C(5,3), D(1,3), E(3,3), F(9,3), G(9,7)$ 和 $H(3,7)$,四条棱的对应顶点顺次为: $A-F, B-G, C-H, D-E$;其它同例1。

由题设可得各侧棱中点坐标顺次为: $(5,2), (7,4), (4,5), (2,3)$ 。

由坐标法的面积公式(见《数学手册》)可得:

$$S_1 = (1 \times 1 - 5 \times 1 + 5 \times 3 - 5 \times 1 + 5 \times 3 - 1 \times 3 + 1 \times 1 - 1 \times 3)/2 = 8$$

$$S_2 = (3 \times 3 - 9 \times 3 + 9 \times 7 - 9 \times 3 + 9 \times 7 - 3 \times 7 + 3 \times 3 - 3 \times 7)/2 = 24$$

$$S_3 = (5 \times 4 - 7 \times 2 + 7 \times 5 - 4 \times 4 + 4 \times 3 - 2 \times 5 + 2 \times 2 - 5 \times 3)/2 = 8$$

$Q = 4S_3 - S_1 - S_2 = 0$,所以该圆柱体为扭面体。

后续算法同例1。

对同一圆柱体来说,三种算法的结果相同。

3 结语

圆柱体新型快捷算法实现了一式多用和直接与其它函数的复合运算。灵活运用有关算式不仅可以快速准确地完成各类有关计算,更使某些疑难问题迎刃而解。

参考文献

- 1 数学手册编写组. 数学手册. 北京:人民教育出版社,1977
- 2 曹玉聘,陈战杰. 储量计算积分法概要. 河南地质,1998

A NEW AND SPEEDY CALCULATION METHOD FOR SIMPLE COLUMN BODY AND ITS APPLICATION

Cao Yupin, Chen Zhanjie

The inserting area and cubic calculation formula of all kinds of simple column body are expressed as a simple quadratic - three - term formula. It enables one formula for many uses and relative direct compound calculation. It can also transfer the conventional complex definite integral approximate calculation into a simple accurate calculation.

Key words simple column body, a new type speedy calculation method



第一作者简介:

曹玉聘 男,1949年生,1975年毕业于成都地质学院普查找矿专业,1993年晋升为地质矿产高级工程师。现任河南省地质矿产厅第一地质勘查院副总工程师,长期从事矿产勘查的生产及科研工作。

通讯地址:河南省南阳市文化路218号 河南省地矿厅地勘一院 邮政编码:473003