

46-50, 54 Lasky 关系的统计地球化学背景

蒋 志

(黄金指挥部·北京·100012)

p624.7

A 从统计地球化学出发,给出了矿石量品位吨位的经验关系理论表示;同时给出了金属量品位吨位关系的理论表示。这种解释比分维解释更贴近常人的经验。

关键词 Lasky 关系, 储量的统计公式, 矿石量品位吨位关系, 金属量品位吨位关系

地球化学

1950年, S. G. Lasky 发表了区域上工业矿石品位吨位的经验关系^[1]:

$$\ln Q = A - k \ln C \quad (1)$$

式(1)中, Q 为平均品位大于等于 C 的工业矿石量; A 和 k 为待定常数。这个关系被许多地区的实际资料所证实(图1是个典型例子), 并陆续被讨论和应用^[2], 以至于被称为 Lasky 定律, 但一直未从理论上做出令人满意的解释。近年来又从分维的角度进行了解释。例如 De Wijs 和 D. L. Turcotte 先后提出了两个工业矿物形成模型。Wijs 的模型导致了矿石品位吨位关系被表示为对数正态分布; Turcotte 模型虽与 Wijs 模型类似, 但考虑工业矿石是区域上元素含量高的岩石部份, 导致了工业矿石品位吨位的幂指数关系:

$$\frac{C}{\bar{C}} = \left(\frac{M_0}{Q}\right)^{D/3} \quad (2)$$

这是一种分形关系。式中, Q 为平均品位大于等于 C 的矿石量; M_0 是平均品位的 $\bar{C}$ 的岩石量; D 是分维。

实际上式(1)和式(2)是一个公式, 只不过取 $A = \ln M_0 + \frac{3}{D} \ln \bar{C}$; $k = \frac{3}{D}$ 而已。但从统计地球化学观点看, 式(1)或式(2)不过是一种近似关系, 可称为 Lasky 关系, 而不必升

为定律。如果一定要赋予分形的含义, 则有可能把一个明白直观的问题变得抽象模糊而不易理解。为此讨论如下:

在统计地球化学中, 区域上工业矿石的品位和吨位关系可以一般地表示为下式^[3]:

$$Q = M_0 \int_{\epsilon \geq C} f(\epsilon) d\epsilon \quad (3)$$

式中, Q 、 M_0 和 C 的含义与式(2)相同; $f(\epsilon)$ 是区域上元素含量 ϵ 的概率分布密度函数, 其典型表达式如下^[3]:

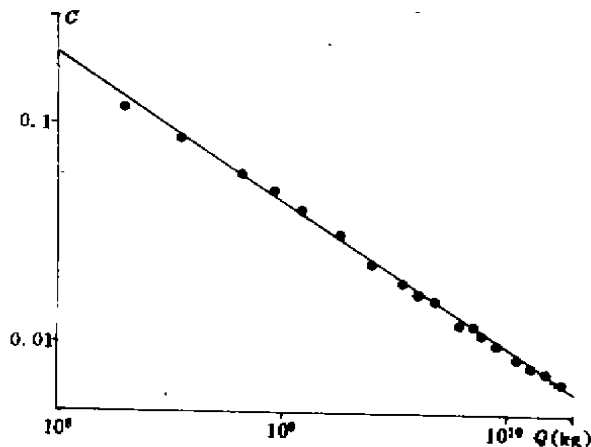


图1 美国水银生产中的 $Q-C$ 关系
(据 Corgill 等, 1981)
 C —平均品位, Q —矿石量

本文 1994 年 5 月收到, 张启芳编辑。

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{(\xi - C_0)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\ln(\xi - C_0) - m]^2}{2\sigma^2}\right\}, & \bar{C} \rightarrow C_0; \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\xi - m)^2}{2\sigma^2}\right\}, & \bar{C} \rightarrow \frac{C_0 + C_1}{2}; \\ \frac{1}{(C_1 - \xi)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[\ln(C_1 - \xi) - m]^2}{2\sigma^2}\right\}, & \bar{C} \rightarrow C_1. \end{cases} \quad (4)$$

式中, C_0 和 C_1 分别为区域上元素含量背景值和上限值; 对其中第 1 式来说, m 和 σ^2 分别为元素含量对数 $\ln(\xi - C_0)$ 的平均值和方差; 对其中的第 2 式来说, m 和 σ^2 分别为元素含量 ξ 的平均值和方差; 对其中的第 3 式来说, m 和 σ^2 分别为元素含量对数 $\ln(C_1 - \xi)$ 的平均值和方差; $\bar{C}$ 为区域上元素含量平均值, 与式(2)同。

考虑高品位情况对式(4)来说, 第 1 式和第 2 式相当 $\ln(\xi - C_0)$ 或 ξ 趋于正无穷; 第 3 式相当 $\ln(C_1 - \xi)$ 趋于负无穷。为了统一计算这 3 种情况, 令

$$x = \begin{cases} \frac{\ln(C - C_0) - m}{\sigma}, & \bar{C} \rightarrow C_0; \\ \frac{C - m}{\sigma}, & \bar{C} \rightarrow \frac{C_0 + C_1}{2}; \\ \frac{m - \ln(C_1 - C)}{\sigma}, & \bar{C} \rightarrow C_1. \end{cases} \quad (5)$$

把式(4)和式(5)代入式(3)的积分项中, 整理后得

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (6)$$

$$A = \begin{cases} \frac{M_0}{x_0\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{x_0^2}{2} + \frac{mx_0}{\sigma}\right), & \bar{C} \rightarrow C_0 \text{ 或 } \bar{C} \rightarrow \frac{C_0 + C_1}{2}; \\ \frac{M_0}{x_0\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{x_0^2}{2} - \frac{mx_0}{\sigma}\right), & \bar{C} \rightarrow C_1. \end{cases} \quad (10)$$

式(9)就是本文从统计地球化学出发, 从理论上求得的矿石储量的品位吨位关系。应当指出的是, 从统计地球化学出发, 还可以从理论上求得金属储量的品位吨位关系, 讨论如下。

根据统计地球化学, 与式(3)类似, 金属

高品位情况相当 $x \rightarrow \infty$ 。令 $x = x_0 + \Delta$, 则有

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} &= e^{-\frac{(x_0 + \Delta)^2}{2}} \\ &\approx e^{-\frac{x_0^2}{2} - x_0\Delta} \\ &= e^{-\frac{x_0^2}{2} - x_0(x - x_0)} \\ &= e^{\frac{x_0^2}{2}} \cdot e^{-x_0x} \end{aligned} \quad (7)$$

把式(7)代入式(6)得

$$\begin{aligned} F(x) &\approx \frac{e^{\frac{x_0^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-x_0t} dt \\ &= \frac{e^{\frac{x_0^2}{2}}}{x_0\sqrt{2\pi}} e^{-x_0x} \end{aligned} \quad (8)$$

把式(5)代入式(8), 分别得式(9)的表达式:

$$Q = \begin{cases} A(C - C_0)^{-\frac{x_0}{\sigma}}, & \bar{C} \rightarrow C_0; \\ Ae^{-\frac{x_0}{\sigma}C}, & \bar{C} \rightarrow \frac{C_0 + C_1}{2}; \\ A(C_1 - C)^{\frac{x_0}{\sigma}}, & \bar{C} \rightarrow C_1; \end{cases} \quad (9)$$

式(9)中, A 为如下常数:

储量 η 的统计公式是^[3]:

$$\eta = M_0 \int_{\xi \geq c} \xi f(\xi) d\xi \quad (11)$$

在式(4)和式(5)的条件下分别计算式(11), 有

$$\begin{aligned}
& \int_C^{\infty} \frac{\xi}{(\xi - C_0)\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(\xi - C_0) - m)^2}{2\sigma^2}} d\xi \\
&= \frac{e^{m+\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-\sigma}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{C_0}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&\approx \frac{\exp(m + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{x_1^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-\sigma}^{\infty} e^{-x_1 t} dt + \frac{C_0 \exp(\frac{x_0^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x_0 t} dt \\
&= A(C - C_0)^{-x_1/\sigma} + A_0 C_0 (C - C_0)^{-x_0/\sigma} \\
&= A[1 + \frac{A_0}{A} C_0 (C - C_0)^{-(x_0 - x_1)/\sigma}] (C - C_0)^{-x_1/\sigma} \quad (12)
\end{aligned}$$

式(12)中, A 和 A_0 分别为如下常数:

$$A = \frac{1}{x_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left[m + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1(m + \sigma^2)}{\sigma}\right] \quad (13)$$

$$A_0 = \frac{1}{x_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0 m}{\sigma}\right] \quad (14)$$

由于

$$x_0 - x_1 = \frac{\ln(\xi - C_0) - m}{\sigma} - \frac{\ln(\xi - C_0) - m - \sigma^2}{\sigma} = \sigma \quad (15)$$

得到

$$\frac{A_0}{A} = \frac{x_1}{x_0} \quad (16) \quad \frac{x_1}{\sigma} = \frac{x_0}{\sigma} - 1 \quad (17)$$

把式(15)~(17)代入到式(12)和式(11), 得到

$$\eta = M_0 A (1 + \frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{C_0}{C - C_0}) (C - C_0)^{-\frac{x_0}{\sigma} + 1} \quad (18)$$

类似的计算, 可得

$$\begin{aligned}
& \int_C^{\infty} \frac{\xi}{(C_1 - \xi)\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(C_1 - \xi) - m)^2}{2\sigma^2}} d\xi \\
&= \frac{C_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{e^{m+\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x-\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&\approx \frac{C_1 \exp(\frac{x_0^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x_0 t} dt - \frac{\exp(m + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{x_1^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-\sigma}^{\infty} e^{-x_1 t} dt \\
&= AC_1 \frac{x_1}{x_0} (C_1 - C)^{x_0/\sigma} + A_1 (C_1 - C)^{x_1/\sigma} \\
&= A[\frac{x_1}{x_0} C_1 (C_1 - C)^{(x_0 - x_1)/\sigma} - \frac{A_1}{A}] (C_1 - C)^{x_1/\sigma} \quad (19)
\end{aligned}$$

式中, A 和 A_1 为如下常数

$$A = \frac{\exp(\frac{x_0^2}{2} - \frac{mx_0}{\sigma})}{x_1 \sqrt{2\pi}} \quad (20)$$

$$A_1 = \frac{\exp\left[m + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1(m + \sigma^2)}{\sigma}\right]}{x_1 \sqrt{2\pi}} \quad (21)$$

由于

$$x_1 - x_0 = \frac{m + \sigma^2 - \ln(C_1 - \xi)}{\sigma} - \frac{m - \ln(C_1 - \xi)}{\sigma} = \sigma \quad (22)$$

因此,

$$A = A_1 \quad (23)$$

$$\frac{x_1}{\sigma} = \frac{x_0}{\sigma} + 1 \quad (24)$$

把式(22)~(24)代入式(19)和式(11),得

$$\eta = M_0 A \left[\frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{C_1}{C_1 - C} - 1 \right] (C_1 - C)^{\frac{x_0}{\sigma} + 1} \quad (25)$$

同样的计算可得

$$\begin{aligned} & \int_C^\infty \frac{\xi}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}} d\xi \\ &= \int_x^\infty \frac{t\sigma + m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{\ln(x_0 + \Delta) - \frac{(x_0 + \Delta)^2}{2}} dt + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{(x_0 + \Delta)^2}{2}} dt \\ &\approx \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty x_0 e^{(\Delta/x_0 - x_0^2/2 - x_0\Delta)} dt + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{x_0^2}{2} - x_0\Delta} dt \\ &= \frac{\sigma x_0}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{x_0^2-1}{x_0}t - \frac{x_0^2}{2}-1} dt + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-x_0t + \frac{x_0^2}{2}} dt \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{x_0^2}{x_0^2-1} \exp\left(\frac{x_0^2}{2} + \frac{m(x_0^2-1)}{\sigma x_0} - 1 - \frac{x_0^2-1}{\sigma x_0} C\right) \\ &\quad + \frac{m}{x_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{x_0^2}{2} + \frac{mx_0}{\sigma} - \frac{x_0}{\sigma} C\right) \\ &= A(1 + A_0 e^{C/\sigma x_0}) e^{-x_0 C/\sigma} \end{aligned} \quad (26)$$

式(26)中, A 和 A_0 为如下常数:

$$A = \frac{m}{x_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{x_0^2}{2} + \frac{mx_0}{\sigma}\right) \quad (27)$$

$$A_0 = \frac{\sigma x_0^3}{m(x_0^2-1)} \exp\left(-\frac{m + \sigma x_0}{\sigma x_0}\right) \quad (28)$$

设 $A = AM_0$, 把式(26)代入式(11), 同时改写式(18)和式(25), 得

$$\eta = \begin{cases} A(1 + \frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{C_0}{C - C_0})^{1/\sigma} (C - C_0)^{1/\sigma + 1}, & \bar{C} \rightarrow C_0; \\ A(1 + A_0 e^{C/\sigma x_0}) e^{-\frac{x_0}{\sigma} C}, & \bar{C} \rightarrow \frac{C_0 + C_1}{2}; \\ A(\frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{C_1}{C_1 - C} - 1)(C_1 - C)^{1/\sigma + 1}, & \bar{C} \rightarrow C_1. \end{cases} \quad (29)$$

式(29)即是求得的金属储量的品位吨位关系。比较式(9)和式(29)可知,从理论上讲,矿石储量的品位吨位关系和金属储量的品位吨位关系有些类似,总体上后者比前者稍复杂,并多一个品位乘子,这与通常情况下金属储量是矿石储量与平均品位的乘积有关。应指出的是,式(29)未见经验报道,是本文首次从理论上建立的。

现在来比较式(9)理论式与式(1)经验式的关系。

由于区域上大多数元素的含量服从式(4)的第1式,即服从对数正态分布;只有铝服从式(4)的第2式;硅服从式(4)的第3式,因此,式(29)与式(9)比较应主要是式(9)的第1式与式(1)比较。同时,对许多元素来讲,区域背景含量 C_0 与成矿区的含量比,相差千万倍,可将 C_0 看做零。这样,式(1)的 A 是式(9) A 的对数;式(1)的 k 为下式:

$$k = \frac{x_0}{\sigma} \quad (30)$$

相应的,式(29)第1式的同样情形只是式(9)乘以 C ,即:

$$Q = AC^{-x_0/\sigma} \quad (31)$$

$$\eta = AC^{-x_0/\sigma - 1} \quad (32)$$

式(30)~(32)与式(2)比,可得

$$\begin{aligned} D &= \frac{3}{k} \\ &= \frac{3\sigma}{x_0} \text{ (矿石储量情形)} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{3}{k-1} \\ &= \frac{3\sigma}{x_0 - \sigma} \text{ (金属储量情形)} \end{aligned} \quad (34)$$

如果视 D 为分维,则式(33)和式(34)表明,这样的分维是由元素含量对数的均方根

差 σ 决定的,并与人为取定的比较原点 x_0 有关。方差 σ^2 的变化和人为取定的比较原点 x_0 的变化会引起空间维数的变化,是很难令人理解的,不如就说成 σ^2 和 x_0 的变化引起品位吨位关系变化更明白了当。式(33)和式(34)的比较还表明,如果视 D 为分维,则矿石储量的品位吨位关系与金属储量的品位吨位关系是在不同维的空间中。本质上是一码事的矿石储量和金属储量,其品位吨位关系却在维数不同的两个空间中,也是令人难以理解的。而从统计地球化学出发建立的式(9)和式(29),则包含了更复杂情况,背景却是明白清楚的。因此,我们认为对品位吨位关系来说,统计地球化学这个背景要比分维空间这个背景更直观、更贴近实际。

图2是式(3)的直接计算与式(9)近似计

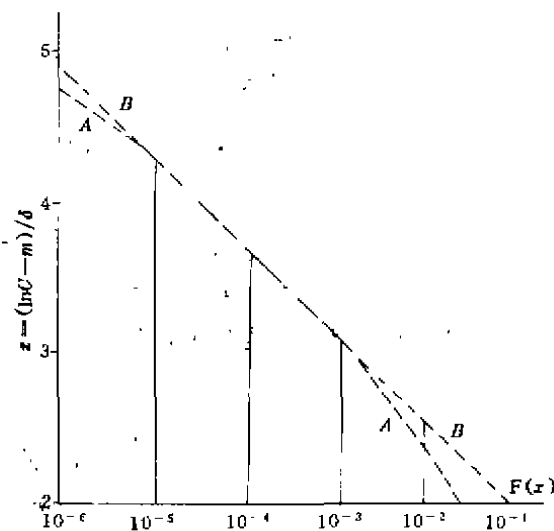


图2, $F(x) - C$ 两种计算比较

A—式(6)直接计算; B—式(31)计算; A和B符合范围在 $10^{-3} \sim 10^{-5}$ 成矿率上,包含了大多数元素的成矿情况(约 10^{-4})

(下转第54页)

