地质与勘探
第30卷 第3期 GEOLOGY AND PROSPECTING 1994年5月

49-52

迭代有限元法数值模拟若干问题的讨论

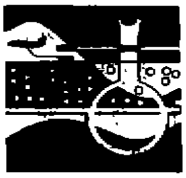
杨 进 傅良魁
（中国地质大学·北京）

p631.12

A、
以点源二维地电断面为例，着重讨论迭代有限元法数值模拟的边界条件、网格剖分以及模拟精度等问题。

关键词 迭代有限元法，数值模拟

地球物理勘探



物探与化探

迭代有限元法对地球物理模型进行数值模拟，主要是通过场变分问题的离散化、区域网格剖分、内外区矩阵的合成、高阶线性方程组的求解，以及傅氏逆变换等过程来实现。但在这些过程中，各个环节的处理方法不同，对数值模拟的精度、计算速度和占用计算机内存的影响也不同。为了进一步认识迭代有限元法的特点，更好地应用迭代有限元法数值模拟的方法，我们以点源二维地电构造中迭代有限元法数值模拟为例，讨论边界条件的应用、网格剖分方法以及模拟精度。

1 边界条件的应用

在三维笛卡尔坐标系中，假设供电点位于 $A(x_A, y_A, z_A)$ 点上，电流强度为 I，那么稳定电流场电位满足微分方程：

$$\nabla \cdot \sigma \nabla U = -I\delta(x-x_A)\delta(y-y_A)\delta(z-z_A) \tag{1}$$

对于二维地电断面，取 y 轴平行于地质体的走向，即：$\sigma=\sigma(x,z)$。对(1)式沿 y 轴作余弦傅氏变换有：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma\frac{\partial V}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial z}(\sigma\frac{\partial V}{\partial z})-\sigma\lambda^2 V=f \tag{2}$$

$$f=-\frac{1}{2}I\delta(x-x_A)\delta(z-z_A)$$

式中，V 为 U 的傅氏变换函数（简称傅氏电位），对于若干个 λ 值分别求解其 $V(x,\lambda,z)$ 后，可通过傅氏逆变换计算空间电位 U。而求 U 的关键是求傅氏电位 V，计算 V 必须给定定解问题的边界条件。在地面上(Γ_1)，电场强度的法向分量为零，相应的边界条件：

$$\frac{\partial V}{\partial n}|_{\Gamma_1}=0 \tag{3}$$

对于其他边界 Γ_2 上，有3类边界条件：

1.1 第一类边界条件（强加边界条件）

$$V|_{\Gamma_2}=0 \tag{4}$$

1.2 第二类边界条件（自然边界条件）

$$\frac{\partial V}{\partial n}|_{\Gamma_2}=0 \tag{5}$$

1.3 第三类边界条件（混合边界条件）

$$(\frac{\partial V}{\partial n}+\eta V)|_{\Gamma_2}=0 \tag{6}$$

$$\eta=\lambda K_1(\lambda r)\cos(r \cdot n)/K_0(\lambda r)$$

式中，K_0、K_1 分别为零阶、一阶修正贝塞尔函数。为了计算地下无限半空间稳定电流场的电位分布，必须把无限区域中场的分布限定在有限的区域中。J. H. Coggon 等人用有限单元法的计算结果表明，采用(4)式的边界条件计算 V 和 U 值偏小，采用(5)式的边界条

本文1993年5月收到，林镇泰编辑。

件计算 V 和 U 值偏大。周熙襄等人沿用 A. Dey 和 H. F. Morrison 的作法，从均匀半空间中单点电流源电场的性质出发，导出了混合边界条件。采用(6)式的边界条件计算 V 和 U 值，比前两类边界条件精度较高。因此，采用有限区域来对开区场问题求解，边界条件的选择是至关重要的。边界条件选取合适，计算精度较高；边界条件选取不合适，数值计算精度较低，甚至得出错误的结果。对于迭代有限元法而言，由于采用了物理上的无限区域来模拟实际地球物理模型的无限区域，加之方法本身的性质决定了它进行数值计算对边界条件的要求不太苛刻。不论是采用强加边界条件、自然边界条件，还是混合边界条件，它都能够得到精度较高的计算结果。采用不同的边界条件只是在程序设计上和计算时间上不同而已。当采用自然边界条件和强加边界条件时，程序简单，不需计算零阶、一阶修正贝塞尔函数，但外区处理时间长；采用混合边界条件时，程序变得复杂，而外区处理时间短。

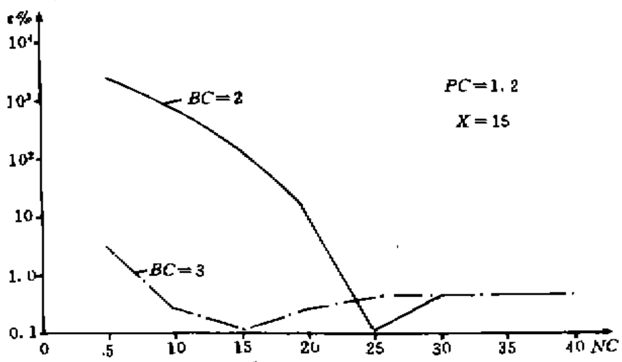


图 1　不同边界条件下均匀大地半空间模拟计算误差曲线图

图 1 给出了自然边界条件($BC=2$)和混合边界条件($BC=3$)迭代有限元法对均匀地下半空间模拟计算的相对误差曲线图。由图可见，对于剖分比例因子 $PC=1.2$，在 $x=15$ 的点上，两条误差曲线随着外区环数 NC 的增大，误差变小。当 NC 一定时，误差降到最低。随着 NC 继续增大，误差达到稳定。取自然边界条件，外区环数达到 30 时，误差达到稳定；取混合边界条件，外区 NC 取 20 时，误差达到稳定。稳定时相对误差 $\varepsilon\% \leqslant 0.5222\%$。

2　网格剖分方法

迭代有限元法对地球物理模型正演模拟时需进行网格剖分，而剖分方法不同，对其场的模拟精度亦不同。

一般说，网格区域越大越好。这是因为泛函积分域就是网格区域。对该区域变分问题求解，必须给定正确的边界条件。然而，对于非均匀地球物理模型，边界条件、尤其是地下边界条件均无法正确求出，常常采用自然边界条件和混合边界条件来近似。只有网格区域边界远离非均匀体、即网格区域足够大时，才能保证模拟精度。另一方面，如果网格单元不变，增大网格区域势必大量地增加节点数，以致增加计算机内存和计算量。对于网格单元而言，当然是越小越好。因为我们对变分问题线性化时，假设了单元内随坐标呈线性变化和单元内物性均匀。如果单元大，前提条件得不到满足，使得计算误差增大。因此，在网格区域不变的情况下，网格单元愈小，模拟精度愈高。然而网格单元小，则网格剖分节点数大，导致线性方程组的阶数较高，占用计算机内存量和计算量较大，给微机上数值模拟带来困难。为了克服网格区域、单元大小、模拟精度和计算量之间的矛盾，我们采用了非均匀网格。在内区选取较小的网格单元，在外区采取从小到大逐渐过渡的网格单元。在这个剖分原则的基础上，结合迭代有限单元法的特点，我们设计了外区网格剖分的 3 种方案。这 3 种剖分方案中，内区都采用矩形—三角形网格剖分法。至于外区，不同的网格剖分方案有其不同的特点。

第一方案(图 2)，以网格中心点和内区边界点向外延伸作射线与按一定比例放大的

环形边界相交构造成大小不同的四边形，再用四边形的对角线自身剖分，形成了外区四边形—三角形剖分网格。这种网格外环节点数目相同，在迭代消环处理时，系数矩阵的阶数不变，所需计算机内存量不变。这种网格剖分方法类似于 P. P. Silvester 的剖分方法(Charlos W. Steel，1987)。这种网格适应于外区较均匀的介质。

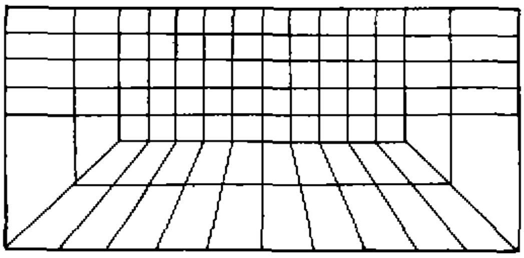


图 2　网格类型 A 示意图

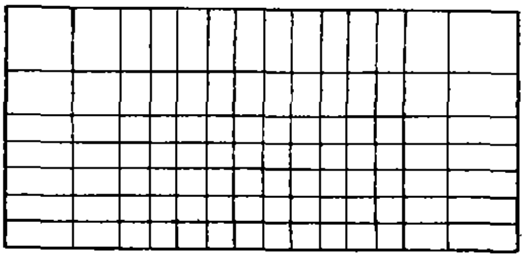


图 3　网格类型 B 示意图

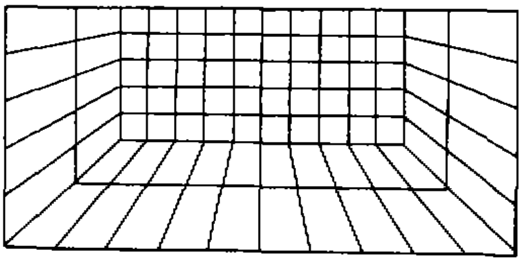


图 4　网格类型 C 示意图

第二方案(图 3)，外区采用矩形—三角形网格剖分方法。这种网格类似于常规的有限单元法网格，它不仅模拟精度较高，而且适应于水平层状介质的地球物理模型。但是，这种网格外区各环节点数目不同，这样外区迭代消环过程中所需计算机内存随着迭代次数的增加而增加。

第三方案(图 4)，综合了前两类网格的长处，既能适应地球物理模型水平层状的特点，又能在迭代消元过程中，不增加所需内存量。

以上 3 种网格剖分方案中，网格内、外区的大小、网格剖分密度、节点数目以及节点间距均是可变的。实际模拟计算时，可根据实际问题的需求来确定这些参数。

3　数值模拟精度的检验

为了对点源场二维地电构造中迭代有限元法数值模拟结果的精度进行检验，我们对具有解析解，且易于分析对比的水平二层、水平三层地电断面采用常用装置在一定范围内进行了试算。试算采用第三类网格剖分方案，内区采用均匀网格，网格步长为 1 个单位长度，供电电流取 2πA，其他有关参量由图表给出。为便于对比，图表中同时给出解析解计算结果和数值模拟计算结果。

表 1　水平二层地电断面上对称四极测深曲线的数值计算结果

No.	$AB/2$	$\rho_s(T)$	ρ_s(IFEM)	RE%
1	1.50	106.4727	109.15	2.5145
2	2.50	122.9028	122.31	0.4823
3	3.50	145.6614	145.89	0.1569
4	4.50	169.9040	170.75	0.4979
5	5.50	193.0996	194.35	0.6475
6	6.50	214.4238	215.60	0.5485
7	7.50	233.7787	234.64	0.3684
8	8.50	251.3052	251.82	0.2049
9	9.50	267.1989	267.44	0.0902
10	10.50	281.6497	281.76	0.0392
11	11.50	294.8268	294.95	0.0418
12	12.50	306.8764	307.00	0.0696
13	13.50	317.9241	318.26	0.1057
14	14.50	328.0785	328.53	0.1376
15	15.50	337.4332	338.00	0.1680
16	16.50	346.0699	346.70	0.1821
17	17.50	354.0600	354.71	0.1836
18	18.50	361.4659	362.13	0.1837
Note	LAYER NUMBER $N=2$ LAYER PARAMETER $P(1)=100$ $H(1)=2.0$ $P(2)=500$		IFEM: $NX=41$, $NZ=10$ $NC=50$, $PC=1.1$	

表 2　水平三层地电断面上对称四极测深曲线的数值计算结果

No.	AB/2	ρ_s(T)	ρ_s(IFEM)	RE%
1	15	128.19	137.83	7.51
2	25	164.39	166.17	1.08
3	35	189.98	191.93	1.02
4	45	203.08	204.55	0.72
5	55	206.16	207.43	0.61
6	65	201.91	202.97	0.52
7	75	192.68	193.58	0.46
8	85	180.34	181.14	0.43
9	95	166.33	167.02	0.41
10	105	151.71	152.26	0.36
11	115	137.23	137.60	0.26
12	125	123.40	123.54	0.10
13	135	110.53	110.43	0.09
14	145	98.77	98.45	0.33
15	155	88.21	87.70	0.57
16	165	78.82	78.18	0.81
17	175	70.56	69.84	1.03
18	185	63.36	62.60	1.20
Note	LAYER NUMBER $N=3$　IFEM: LAYER PARAMETER $NX=41, NZ=10$ $P(1)=100.00$ $H(1)=10.00$ $NC=50, PC=1.1$ $P(2)=400.00$ $H(2)=30.00$ $P(3)=20.00$			

表 1 给出了二层 G 型视电阻率曲线理论值 ρ_s(T)和模拟值 ρ_s(IFEM)。从表中可知，除了第一点外，其他各点上视电阻率值百分相对误差均小于 0.7%。

表 2 给出了三层地电断面上 K 型电阻率曲线的理论计算值 ρ_s(T)和数值模拟值 ρ_s(IFEM)。由表可见除第一点外，其他各点相对误差均小于 1.2%。

为了直观，我们采用非均匀网格 41×10，取外区 $PC=1.2$，$NC=40$，分别对 G 型、

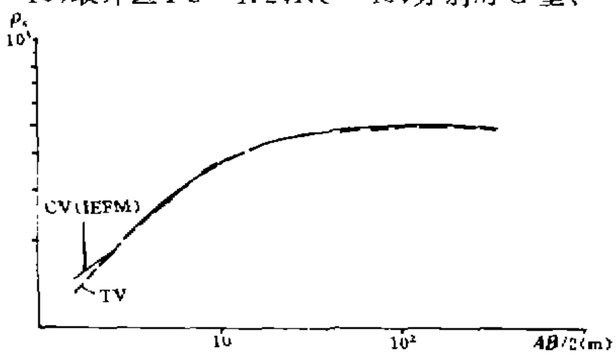


图 5　水平二层地电断面上对称四极测深的理论曲线和模拟曲线

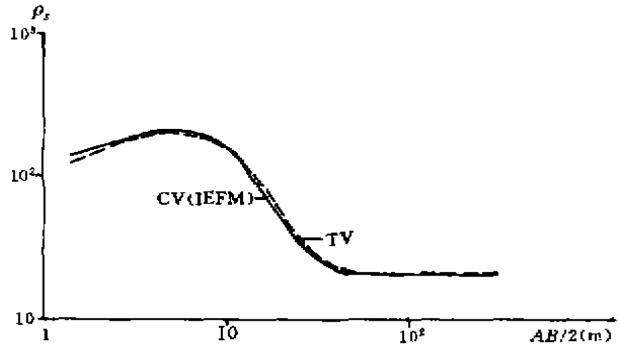


图 6　水平三层地电断面上对称四极测深的理论曲线和模拟曲线

K 型进行了模拟，其模拟结果与其相应的理论值由图 5、图 6 给出。从图中不难看出，理论曲线和模拟曲线重合较好。

参考文献

1　傅良魁主编. 应用地球物理教程．北京：地质出版社，1991.
2　周熙襄等编著. 电法勘探数值模拟技术．重庆：四川科学出版社，1986.
3　杨进、傅良魁. 二维地电构造中点源场的迭代有限元法. 物探与化探技术，1993，(1).

The Discussion about Problems on IFEM Modeling

Yang Jin, Fu Liangkui

Taking IFEM modeling of 2-D geoelectric section for example, the boundary condition, network setting and modeling accuracy of the numerical simulation are discussed.