

39-48

# 协同克立格法及其在矿产储量计算中的应用

王志民 侯景儒  
(北京科技大学地质系)

p624.7

A

协同克立格法是多元地质统计学的主要方法,该法能充分利用多元信息,有效地提高块段(块体)平均品位及矿产储量估计的精度。介绍了协同区域化理论和协同克立格法及其在我国某优质锰矿床储量计算的实例。

关键词 地质统计学 多元地质统计学 互变异函数 互协方差函数 协同克立格法 储量计算

矿产资源



数学地质

地质统计学是数学地质领域内一个发展迅速且有广阔应用前景的学科,它不仅在储量计算、找矿勘探、采矿设计及矿山地质等领域显示出强大的生命力,而且已经成为能表征和估计各种自然资源的工程学科。就矿产储量计算而言,地质统计学是以矿石品位和储量的精确估计为主要目的,以矿化的空间结构为基础,以区域化变量理论为核心,以变异函数为基本工具,在估计方差极小的条件下,通过对待估块段影响范围内的所有样品品位值进行加权来估计待估块段的平均品位和矿石储量。在理论和实践上已证明,应用地质统计学方法计算的某待估块段的平均品位值是一种最佳、无偏估计量。但是传统的地质统计学方法(如普通克立格法、泛克立格法等),只限于对单变量的研究,并未能充分考虑空间尺度对区域化变量研究的影

响。为解决此问题,近年来又提出了多元地质统计学理论及方法。所谓多元地质统计学即以协同区域化理论为基础,以互变异函数为基本工具,研究那些定义于同一空间域中,既有统计相关又具有空间位置相关的多元信息空间结构的地质统计学。多元地质统计学的基本方法是协同克立格法,本文仅就该法的若干基本理论、方法及其在某锰矿床储量计算中应用进行讨论。

## 1 协同区域化理论与协同克立格法

协同区域化变量可用一组  $K$  个相关区域化变量  $\{Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_k(x)\}$  来表示,观测前,协同区域化变量是  $K$  维区域化变量的向量,即是一个随机场;观测后,协同区域化变量则是一个空间点函数。

对于  $K$  个区域化变量中每一个区域化变量  $Z_k(x)$  与  $Z_{k'}(x)$ ,其互协方差函数定义为

$$C_{kk'}(h) = E\{Z_k(x) \cdot Z_{k'}(x+h)\} - m_k \cdot m_{k'} \quad (1)$$

$$(k, k' = 1, 2, \dots, K) \forall x$$

其互变异函数定义为

本文 1993 年 11 月收到,于纯烈编辑。

$$\gamma_{kk'}(h) = 1/2 E\{[Z_k(x+h) - Z_k(x)] \cdot [Z_{k'}(x+h) - Z_{k'}(x)]\} \quad (2)$$

$$(k, k' = 1, 2, \dots, K) \forall x$$

当协同区域化变量  $Z_k(x)$  的期望  $E[Z_k(x)] = m_k$  及互协方差函数存在且平稳时,称该协同区域化变量服从二阶平稳假设。

当协同区域化变量的增量的均值  $E[Z_k(x) - Z_k(x+h)] = 0$  及互变异函数存在且平稳时,称该协同区域化变量服从二阶内蕴假设。

应指出,在普通克立格法中,当区域化变量服从二阶平稳假设时,其变异函数  $\gamma(h)$ 、协方差函数  $C(h)$  及样本方差之间的关系是  $\gamma(h) = C(0) - C(h)$ ,但当协同区域化变量服从二阶平稳假设时,其互变异函数  $\gamma_{kk'}(h)$ 、互协方差函数  $C_{kk'}(h)$  之间的关系式如下式所示

$$\gamma_{kk'}(h) = C_{kk'}(0) - \frac{1}{2} [C_{kk}(h) + C_{k'k'}(h)] \quad (3)$$

$$(k, k' = 1, 2, \dots, K) \forall x$$

应用协同克立格法对待估块段中某元素(主元素)的平均品位及储量进行估计时,要用若干相关元素值参加估计,以便提高其估计精度。例如,在某金矿床中,金、银、砷的含量值呈正相关,当将它们选为协同区域化变量同时进行研究时,若一些样品中金品位值缺少,则可用银和砷所提供的信息(品位)来进行金品位的估计。此时,金就是用协同克立

格法估计的主变量。即设  $k_0$  为诸区域化变量  $k(k=1, 2, \dots, K)$  中某一特定的需要研究或计算平均品位的主变量,现要估计中心点在  $x_0$  处的待估域  $V(x_0)$  上主变量  $Z_{k_0}$  的平均值  $Z_{V_0}$  的估计量  $Z_{V_0}^*$ ,而  $Z_{V_0}^*$  表征为估计邻域内定义于支撑  $\{v_{\alpha_i}\}$  上的有效数据  $\{Z_{\alpha_i}, \alpha_i = 1, 2, \dots, n_k\}$  的线性组合

$$Z_{V_0}^* = \sum_{k=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{n_k} \lambda_{\alpha_i} \cdot Z_{\alpha_i} \quad (4)$$

(4)式中  $k=1, 2, \dots, K$  为变量数,  $\alpha_i=1, 2, \dots, n_k$  为第  $k$  个变量的样品数,  $Z_{\alpha_i}$  为第  $\alpha$  个样品第  $k$  个变量的品位值,  $\lambda_{\alpha_i}$  为第  $\alpha$  个样品第  $k$

个变量的权系数,求解  $\lambda_{\alpha_i}$  的协同克立格方程组是

$$\begin{cases} \sum_{k'=1}^K \sum_{\beta_{k'}=1}^{n_{k'}} \lambda_{\beta_{k'}} \bar{C}_{k'k}(v_{\beta_{k'}}, v_{\alpha_i}) - \mu_k = C_{k_0k}(V_{k_0}, V_{k_0}) \\ \sum_{\alpha_i=1}^{n_{k_0}} \lambda_{\alpha_i} = 1 & \forall (\alpha_i = 1, 2, \dots, n_{k_0}) \\ \sum_{\alpha_i=1}^{n_k} \lambda_{\alpha_i} = 0 & (k = 1, 2, \dots, K) \end{cases} \quad (5)$$

相应的协同克立格方差为

$$\sigma_{V_{k_0}}^2 = \bar{C}_{k_0k_0}(V_{k_0}, V_{k_0}) + \mu_{k_0} - \sum_{k=1}^K \sum_{\alpha_i=1}^{n_k} \lambda_{\alpha_i} \cdot \bar{C}_{k_0k}(V_{k_0}, v_{\alpha_i}) \quad (6)$$

必须指出,要使(5)式具有唯一解的条件是:①互协方差矩阵  $[\bar{C}_{k'k}(v_{\beta_{k'}}, v_{\alpha_i})]$  严格正

定;②没有一个数据相对于另一数值是完全多余的,即  $v_{\alpha_i} \neq v_{\beta_{k'}} (\forall \alpha_i \neq \beta_{k'})$ ;③待估主变

量  $Z_{ik}$  的观测值的个数不为 0, 即  $n_{ik} \neq 0$ 。

应用协同克立格法计算矿石储量的基本方法步骤如图 1 所示。

## 2 协同克立格法在某锰矿储量计算中的应用

### 2.1 矿床地质特征

该矿床位于一东西向褶皱带的次一级向斜北翼。地层产状浅部较陡(倾角  $31 \sim 65^\circ$ ), 深部较缓, 倾角变化为  $6 \sim 35^\circ$ 。向斜呈东西向延伸, 且东窄西宽, 向东倾伏, 其倾伏角为  $5 \sim 10^\circ$ , 矿区内无断层和岩体、岩脉侵入。

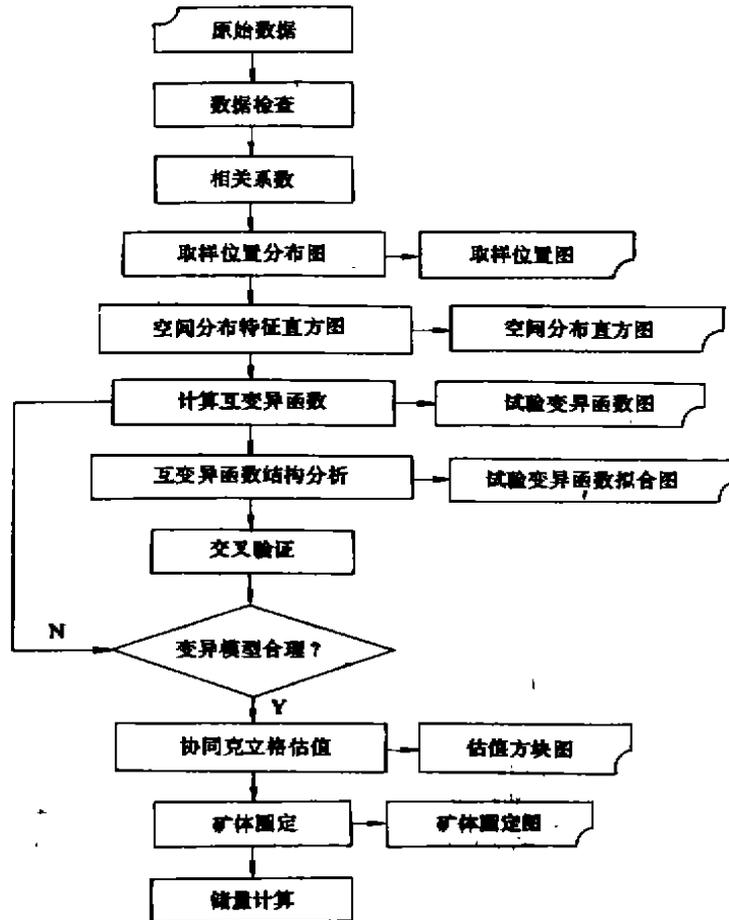


图 1 协同克立格储量计算流程图

含矿岩系由条带状页岩、黑色页岩、含锰灰岩、碳酸锰矿及粘土岩组成。含矿岩系与矿层厚度呈正相关关系。最佳含矿岩系由黑色页岩、含锰碳酸岩和粘土岩组成。一般具有完整韵律层的地段均有锰矿层存在, 多韵律层的地段内常赋存有多层中富和富矿; 单韵律层的地段内赋存中富和贫矿, 且仅有一层矿, 在主矿层的上、下部位见有扁豆状矿体。

矿体主要为碳酸锰矿石。有用矿物为菱锰矿, 次为锰方解石, 脉石矿物为方解石、石英及粘土等。锰矿石可分为 4 类, 即薄层状及假鲕状(或粗斑点状)碳酸锰矿石和致密块状及斑点状含锰灰岩等。

### 2.2 协同区域化变量的选择及统计分析

根据锰矿矿石的元素地球化学特征和计算锰矿床平均品位及矿石储量的具体要求,

选择元素锰(Mn)、二氧化硅(SiO<sub>2</sub>)、磷(P)、铁(Fe)、真厚度(ZHD)以及锰品位乘以厚度(Mn×H)为本次研究的协同区域化变量,其中锰和真厚度作为主变量,其他作为参与变量来进行研究。

矿体中各协同区域化变量的平均值及方差见表1。

表1 协同区域化变量均值、方差分析表

变 量	ZHD	Mn	Fe	P	SiO <sub>2</sub>	Mn×H
平均值(%)	0.7	17	2.3	0.076	13	12
方差	0.22	6.1	0.44	0.0015	28	78

各协同区域化变量之间的相关系数如表2所示。

表2 协同区域化变量相关系数分析

	ZHD	Mn	Fe	P	SiO <sub>2</sub>	Mn×H
ZHD	1.0000	0.1159	0.0987	-0.0372	0.0552	0.9744
Mn	0.1159	1.0000	-0.1519	-0.1493	-0.3647	0.2679
Fe	0.0987	-0.1519	1.0000	-0.0392	0.0132	0.0769
P	-0.0372	-0.1493	-0.0392	1.0000	-0.3298	-0.0764
SiO <sub>2</sub>	0.0552	-0.3647	0.0132	-0.3298	1.0000	0.0062
Mn×H	0.9744	0.2679	0.0769	-0.0764	-0.0062	1.0000

各协同区域化变量之间的协方差函数如表3所示。

表3 协同区域化变量协方差分析

	ZHD	Mn	Fe	P	SiO <sub>2</sub>	Mn×H
ZHD	0.22	0.13	0.032	-0.00069	0.14	4
Mn	0.13	6.1	-0.24	-0.014	-4.8	5.9
Fe	0.032	-0.24	0.44	-0.001	0.046	0.48
P	-0.00069	-0.014	-0.001	0.0015	-0.067	-0.027
SiO <sub>2</sub>	0.14	-4.8	0.046	-0.067	28	0.29
Mn×H	4	5.9	0.48	-0.027	0.29	78

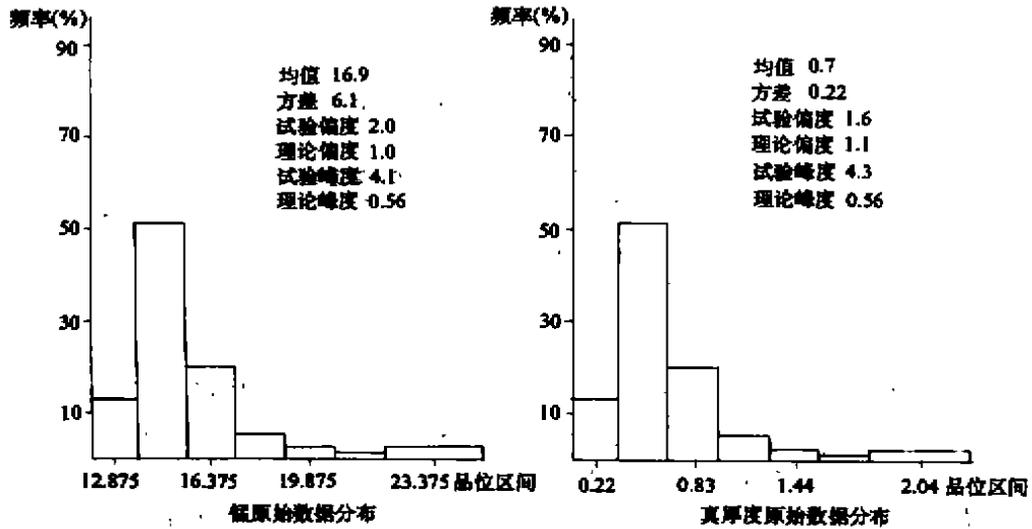


图2 锰与真厚度原始数据分布直方图

上述6个协同区域化变量的分布律的研究对于应用协同克立格法进行储量计算是十分重要的,因为一个变量的分布特征不仅表

征了该变量的统计学特征,而且可指出在进行变异函数计算及其他地质统计学研究时,是否要对原始数据进行预处理,以符合所用

方法对数据的要求。对以上 6 个协同区域化变量进行详细的统计分布律研究,采用的方法是绘制各变量分布直方图,并进行偏度及峰度检验,观察其是否服从方法要求的正态分布。图 2 是锰与真厚度的原始数据分布直方图,显然呈左偏分布。

图 3 表明锰与真厚度呈三参数对数正态分布。由偏度、峰度检验可知, Mn、Mn×H、SiO<sub>2</sub>和 ZHD 均不服从正态分布,但通过对其进行数据变换处理,绘制其直方图,再做偏度、峰度检验后发现均服从三参数对数正态分布,其模型及检验情况见表 4。

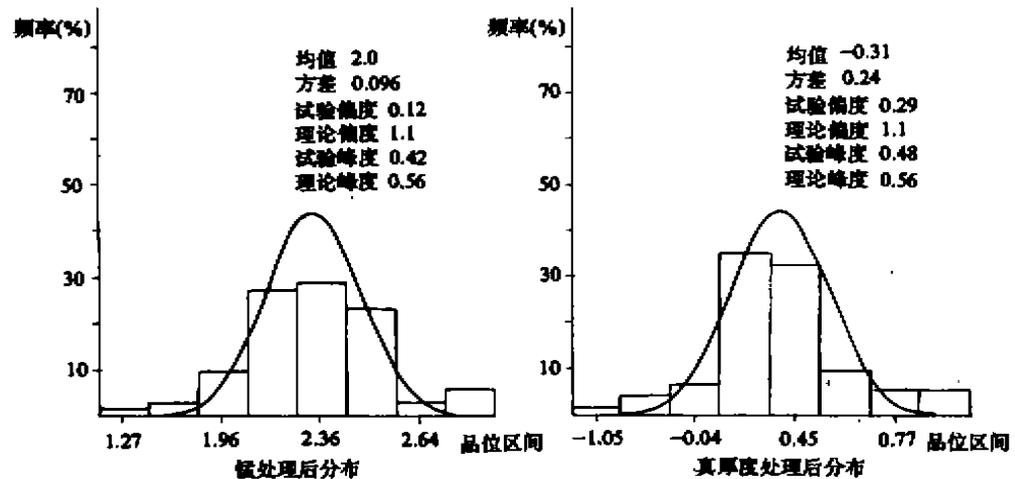


图 3 锰与真厚度数据处理分布直方图

表 4 变量分布模型及检验

变量	分布模型	常数 C	试验偏度	偏度限	试验峰度	峰度限
Mn	Ln(X-C)	9.3	0.12	1.1	0.42	0.56
SiO <sub>2</sub>	Ln(X-C)	-4.0	-0.21	1.1	0.25	0.56
Mn×H	Ln(X-C)	-1.0	0.35	1.1	0.55	0.56
ZHD	Ln(X-C)	-0.13	0.29	1.1	0.40	0.56

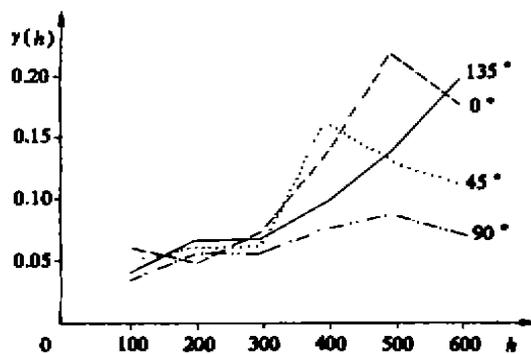


图 4 Mn 试验变异函数曲线

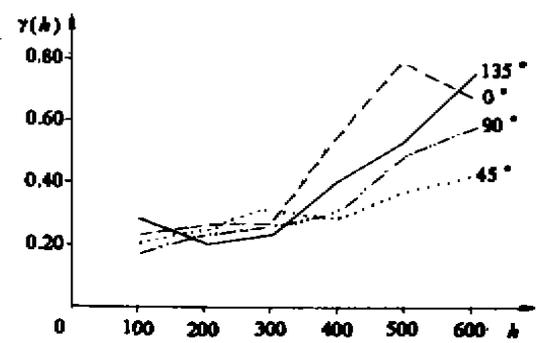


图 5 ZHD 试验变异函数曲线

### 2.3 互变异函数及结构分析

计算协同区域化变量的变异函数和互变异函数并进行结构分析得到其变异性特征参数是协同克立格法计算储量的重要内容。考

虑本区勘探工程间距为 200m×250m,因此在计算试验变异函数及试验互变异函数时的基本滞后距为 100m,滞后距误差限为 50m,搜索角为 22.5°。为尽可能真实反映协同区域

化变量的空间变异性,对于每一变量分别计算其等间隔的 8 个方向上的试验变异函数及试验互变异函数,其中  $M_n$ 、ZHD、 $M_n \times H$ 、 $M_n-ZHD$ 、 $M_n-M_n \times H$  的试验(互)变异函数分别如图 4、5、6、7、8(文中提供  $0^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $135^\circ$  等 4 个方向上的变异曲线及互变异曲线)所示。

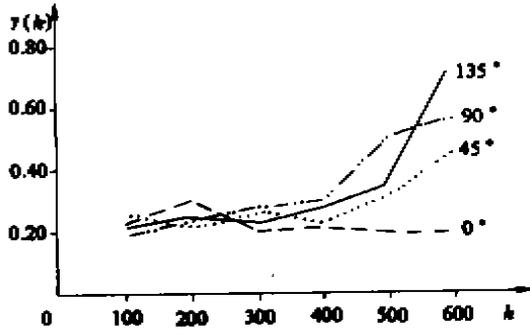


图 6  $M_n \times H$  试验变异函数曲线

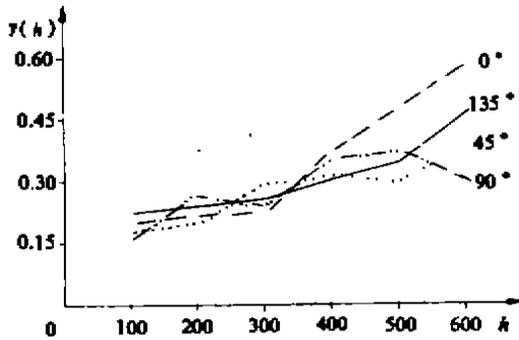


图 7  $M_n-ZHD$  试验变异函数曲线

对于每一方向的试验变异函数进行拟合,可得到各方向的拟合结果,表 5 为真厚度试验变异函数拟合结果。通过绘制变程方向图、基台方向图及块金常数方向图并进行适当拟合,得到任一变量的空间变异模型参数。图 9、10、11 分别为锰的基台、变程及块金效应方向拟合图。表 6 为有关试验变异函数及互变异函数的变异模型参数表。

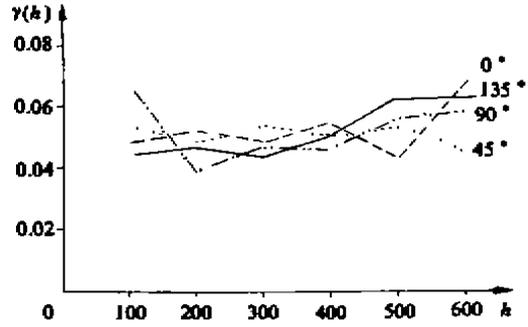


图 8  $M_n \times H$  试验互变异函数曲线

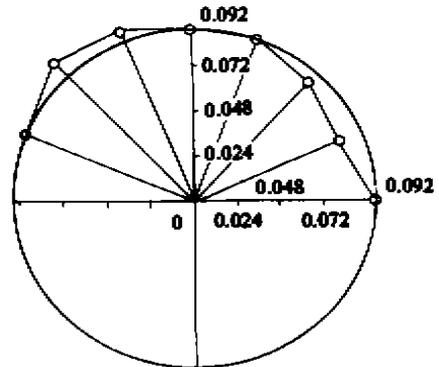


图 9 基台方向拟合图

变量名:  $M_n$ ; X 轴长: 0.09, 最大值: 0.1; Y 轴长: 0.09, 最小值: 0.08; 旋转角:  $0^\circ$ ; 方向数: 8; 相对偏度: 4.17%

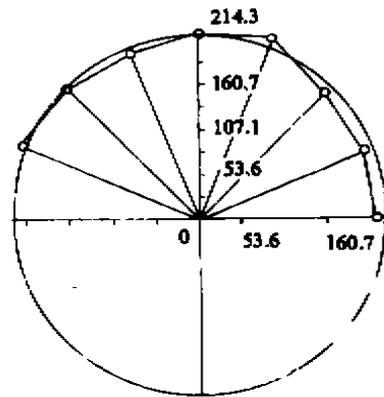


图 10 变程方向拟合图

变量名:  $M_n$ ; X 轴长: 220, 最大值: 250; Y 轴长: 220, 最小值: 200; 旋转角:  $0^\circ$ ; 方向数: 8; 相对偏度: 3.37%

表 5 ZHD 试验变异函数拟合结果

	0°	22.5°	45°	67.5°	90°	112.5°	135°	157.5°
模型	球状	球状	球状	球状	球状	球状	球状	球状
块金常数	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
总基台值	0.23	0.235	0.126	0.235	0.235	0.235	0.235	0.235
变程	230	200	200	250	230	225	200	230

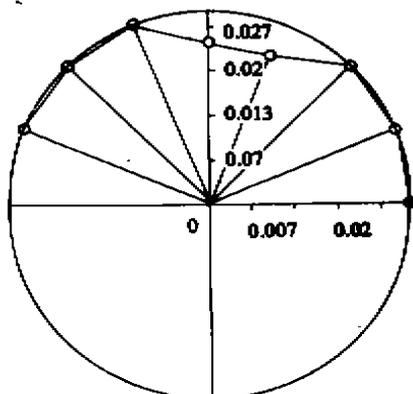


图 11 块金效应方向拟合图

变量名: Mn; X 轴长: 0.03, 最大值: 0.03; Y 轴长: 0.03, 最小值: 0.0258; 旋转角: 0°; 方向数: 8; 相对偏度: 4.17%

为检验变异函数及互变异函数表征的变异模型的正确性, 可利用交叉验证法对其进行检验, 检验结果均令人满意。对锰进行交叉验证的分组统计见表 7, 图 12 是锰交叉验证偏差分布直方图。

表 6 (互)变异函数模型参数

	块金常数 $C_0$		总基台 $C$		变程 $a(m)$	
	0°	90°	0°	90°	0°	90°
Mn	0.03	0.03	0.09	0.09	220	220
SiO <sub>2</sub>	0.02	0.02	0.075	0.075	220	220
Mn×H	0.1	0.1	0.27	0.27	230	230
ZHD	0.1	0.1	0.23	0.23	230	230
Mn-SiO <sub>2</sub>	-0.09	-0.09	-0.035	-0.035	400	400
Mn-Mn×H	-0.042	-0.042	0.045	0.04	400	400
SiO <sub>2</sub> -Mn×H	0.008	0.008	0.037	0.037	250	250
ZHD-Mn	-0.098	-0.098	0.23	0.23	230	230
ZHD-Mn×H	0.1	0.1	0.28	0.28	350	350

#### 2.4 锰品位及矿体厚度的协同克立格法估计及储量计算

由于该矿床呈层状分布, 因此采用二维协同克立格法进行品位及真厚度的估计。根

据(互)变异函数的变异特征及勘探工程间距、矿山开采等实际情况, 待估块段定为 50m×50m, 估计邻域为 150m×150m, 需计算储量的范围共划分为 1892 个 50m×50m 的待估块段, 用协同克立格法估计每一待估块段的 Mn 平均品位及平均厚度, 其等值线见图 13、14。

表 7 交叉验证分组统计表

组号	区间	频数	频率(%)	累积频度(%)
1	-5.0~-4.0	2	2.90	2.90
2	-4.0~-3.0	1	1.45	4.35
3	-3.0~-2.0	1	1.45	5.80
4	-2.0	1	1.45	7.25
5	-1.0~0.0	25	36.23	50.73
6	0.0~1.0	27	39.12	89.85
7	1.0~2.0	5	7.25	97.10
8	2.0~3.0	1	1.45	98.55
9	3.0~4.0	0	0.00	98.55
10	4.0~5.0	1	1.45	100.00

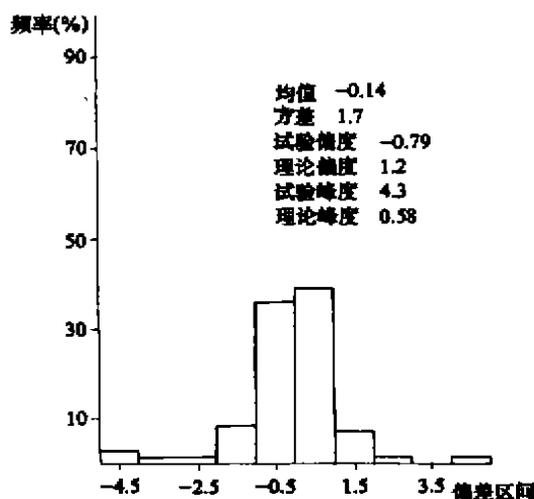


图 12 交叉验证偏差分布直方图

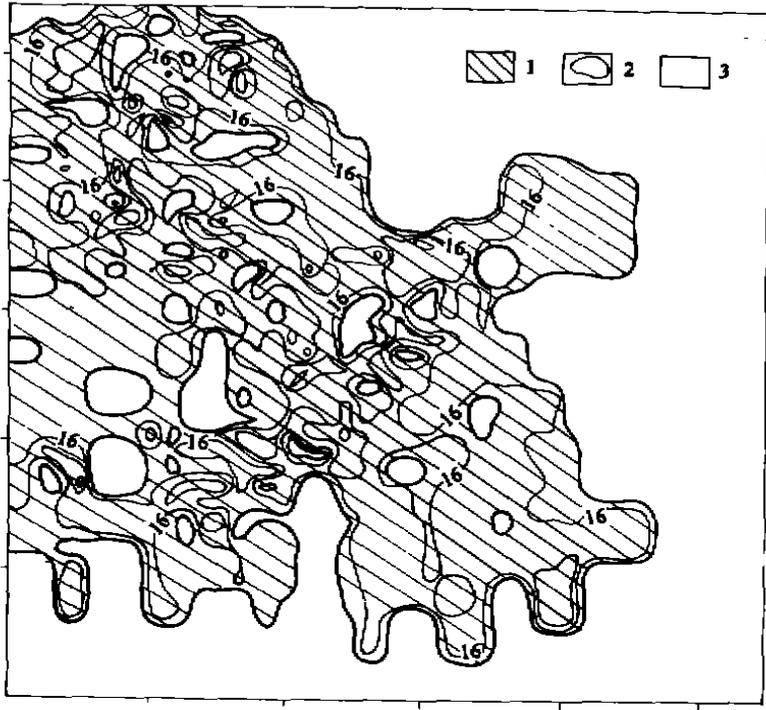


图 13 锰品位分布等值线图  
1—矿体; 2—品位等值线; 3—废石

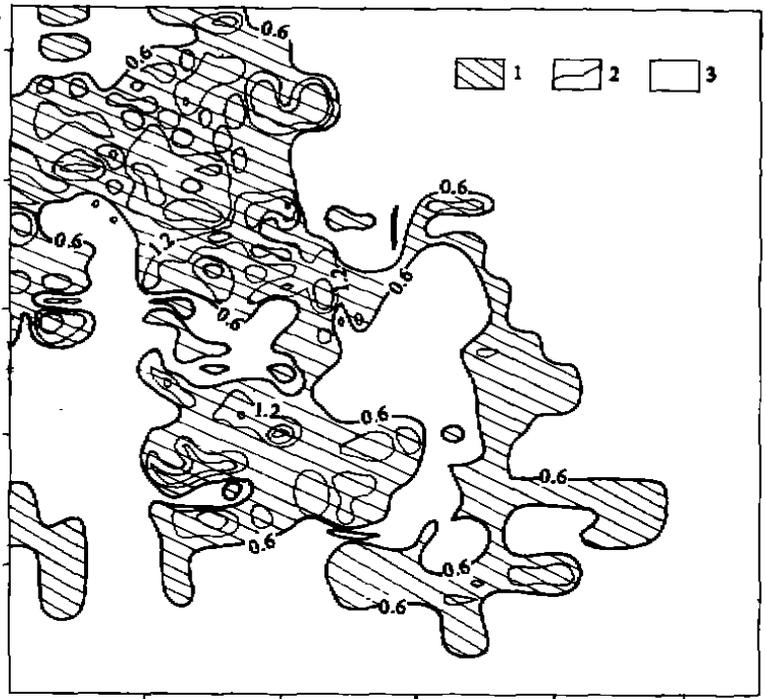


图 14 真厚度分布等值线图  
1—矿体; 2—品位等值线(边际值 0.6m); 3—废石

据有关规范,该矿区技术经济指标定为 Mn 边界品位为 12%,Mn 工业品位为 16%,贫矿的锰品位为 16%~18%,中锰矿品位为

18%~22%,富矿品位为 >22%,依此指标圈定表内、外矿矿体的总体边界(图 15)。

为了准确估计矿石储量,采用不同品位

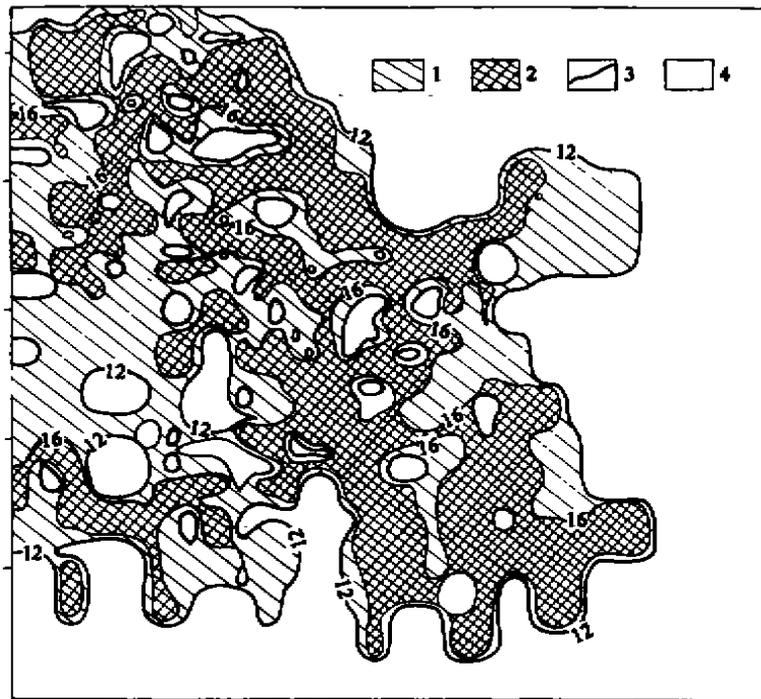


图 15 表内、表外矿体圈定图

1—表外矿;2—表内矿;3—矿体边界;4—废石  
(边际值 12%,边界品位 12%,工业品位 16%)

区间赋予不同的体重(表 8)计算出不同品位指标下的矿石储量(表 9),并以此绘制出该

矿区锰品位与储量关系曲线图(图 16)。不同储量计算方法结果对比示于表 10。

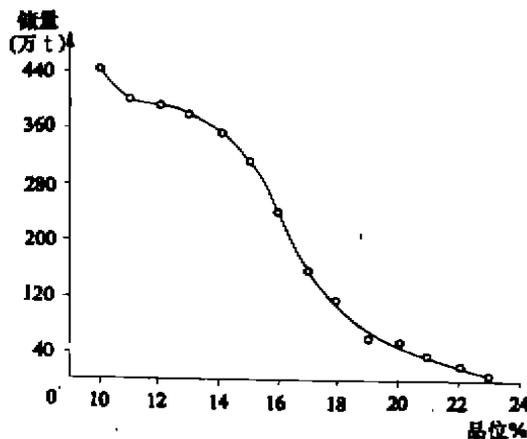


图 16 协同克里格法储量吨位—品位曲线

### 3 结 论

(1)应用协同克里格法计算矿产储量能充分利用多元信息,与其他方法计算出的品位及储量相比,更为可靠。

(2)由于协同克里格法利用了多元信息,从而增大了克里格方程组的维数,需要计算机内存多,求解过程长,占用计算机 CPU 时间多。

(3)协同克里格法需要的变异性参数比普通克里格法多,而确定合理的参数模型是很重要的内容,因此必须认真地选择各种变异性参数以便提高估计精度。

表 8 碳酸锰矿石体重变化统计表

品位区间(%)	块数	体重变化范围(t/m <sup>3</sup> )	平均体重(t/m <sup>3</sup> )	品位变化范围(t/m <sup>3</sup> )	平均品位(%)
≥22.	23	2.97~3.19	3.084	22.35~27.32	24.24
18~22	24	2.91~3.12	3.035	18.10~21.94	19.71
16~18	18	2.86~3.10	2.967	16.18~17.89	15.86
≥16	65	2.86~3.19	3.030	12.18~27.52	20.24

表 9 协同克立格法不同品位指标下储量计算表

边界值(%)	矿石量(万 t)	金属量(万 t)	平均品位(%)
10	456.4223	73.8034	16.17
11	407.6792	68.7755	16.87
12	392.8067	67.4440	17.17
13	382.3386	65.7240	17.19
14	356.9278	62.2839	17.45
15	313.9153	56.0025	17.84
16	241.4663	44.7437	18.53
17	165.4808	32.2357	19.48
18	111.3639	22.7851	20.46
19	68.1636	14.8392	21.77
20	57.4661	12.7575	22.20
21	40.7002	9.3244	22.91
22	24.7701	5.9072	23.83
23	14.8740	3.6902	24.81

部分数据计算结果已处理。

表 10 不同储量计算方法结果对比

	储量		贫矿		中矿		平均品位	
	储量值(万 t)	相对误差(%)	贫矿值(万 t)	相对误差(%)	中矿值(万 t)	相对误差(%)	品位值(%)	相对误差(%)
普通克立格法	495.9547	22.64	370.73206	44.35	125.2364	15.15	17.17	-1.77
协同克立格法	392.8067	-2.87	281.4458	9.58	111.3636	-24.55	17.07	-2.35
传统方法	404.42	~	356.83	~	147.59	~	17.48	~

(4)协同克立格法是多元地质统计学的重要方法,对于该法的研究有助于其他多元地质统计学理论及方法的研究。

(5)协同克立格法不仅成功地应用于矿产储量计算,而且还可用于遥感、物化探数据处理、环境地质、水文地质、工程地质以及其他学科中的研究。

参考文献

- 侯景儒,郭光裕. 矿床统计预测与地质统计学. 北京:冶金工业出版社,1993.
- 侯景儒,黄竞先. 地质统计学的理论与方法. 北京:地质出版社,1990.
- 侯景儒,张树泉. 北京科技大学学报,1991,13(3).
- 侯景儒,潘汉军等. 北京科技大学学报,1992,14(2).
- Myers D E. Co-kriging: New developments, NATO Advance Study Institute Series. C; Mathematical and Physical Sciences 122. 1984.
- 侯景儒,王志民,张树泉等. 非参数地质统计学概论. 北京:冶金工业出版社,1993.

Cokriging and its Application in Estimation of Mineral Reserves

Wang Zhimin, Hou Jingru

Cokriging is a principal method of multivariate geostatistics. Cokriging make full use of the multivariate information for effective improve estimation precision of average grade and mineral reserves of the block (or the deposit). In this paper, the theory of coregionalization and cokriging are described. the ease of apply cokriging to estimation of mineral reserves of high-grade manganese deposit in China is presented in more detail, which involve four part; Statistical analysis of coregionalized variables; Calculation of crossvariogram and cross-covariance and structure analysis; Cokriging estimation of average grade of blocks; Estimation of ore reserves of deposit, and compared result obtained by cokriging with by other methods.