

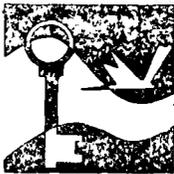
地质界面三点拟合法及其计算

周渝峰

(成都地质学院)

凭借三测点数据建立的插值公式，在空间上一般只能拟合平面。本文所介绍的用 3 点数据作曲面拟合的方法，由于所需数据包含测点斜率，故适宜作地质界面的拟合。文中还对此法的微机计算及作图程序作了说明。

关键词：地质界面；插值公式；拟合；微机应用程序



地质界面拟合的基本思想

单一地质体界面（如地层面、矿层面、构造面），不论在空间上形态多么复杂，都可把它看作是一弯曲程度不等的连续变化的曲面。曲面上任意一点 P_i 的空间位置，可由一组三维坐标 X_i, Y_i, Z_i 数据确定。这种曲面在一定范围内的空间展布，实际上存在某种规律，即遵循一定的函数关系 $Z = f(X, Y)$ 。尽管这种函数关系的解析式未知，但采用计算数学的插值方法总可以找出一函数 $F(X, Y)$ ，使其与 $f(X, Y)$ 的差值在该范围内小于误差要求。这样，便可用 $F(X, Y)$ 近似替代这一范围内实际存在的地质界面函数 $f(X, Y)$ 。函数 $F(X, Y)$ 被称为插值函数，并常以多项式作为表达式，如二元三次插值多项式就可表示为

$$Z = A_0 + A_1X + A_2Y + A_3X^2 + A_4XY + A_5Y^2 + A_6X^3 + A_7X^2Y - A_8XY^2 + A_9Y^3 \quad (1)$$

根据插值函数的理论和构造特点，三次插值多项式是分段函数逼近、曲线拟合的理想解析式。因为它具备灵活适应来自观测的

数据或函数的性能，并具变形能极小性质，保证插值过程收敛、计算稳定^[1]。鉴此，笔者选择了二元三次多项式来逼近曲面函数。从式 (1) 可知，一个完整的二元三次多项式具有 10 个系数，因此必须获得 10 个条件，即获得 10 个测点数据才可建立此插值多项式。然而，对于地质界面而言，常由于岩、矿体的隐伏、断层深延、地形恶劣或植被覆盖以及财力、物力有限等原因，无法满足建立插值多项式在数据点数量上的要求。那么，减少部分数据点，是否仍有可能构造一个较好逼近实际函数的插值多项式呢？通过尝试，笔者认为这是完全可能的。

三点拟合法插值多项式的确定

在计算数学中，一种称为埃尔米特 (Hermite) 插值多项式的函数 $H(X)$ ，不仅要求其函数值通过已知测点 P_i ，同时还要求在测点上若干阶导数值与被插函数的导数值相等^[2]，即满足条件：

$$\begin{cases} H(X_i) = Y_i \\ H'(X_i) = Y'_i \end{cases} \quad (i=0, 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2)$$

本文 1992 年 4 月收到，1992 年 5 月改回，于纯烈编辑。

因此, 插值多项式来逼近实际函数, 既能够弥补一般插值公式的拟合的缺陷, 如插值函数曲线与被函数曲线在测点上不一定重合 (图 1), 又能利用较少测点达到较高的拟合程度。

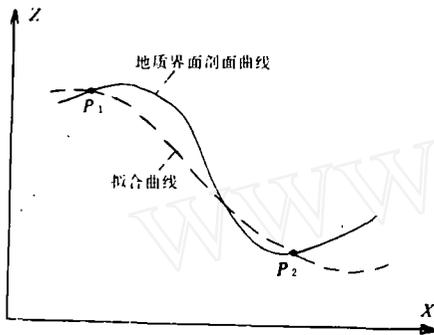


图 1 地质界面剖面曲线与拟合曲线示意图

按埃尔米特插值多项式的要求, 若把相邻两测点 (X_i, X_{i+1}) 区间作为独立坐标系看待, 即令 $X_i = 0$, 则 $X_{i+1} = 1$, 便可整理出两测点区间内拟合实际函数 Y 的近似表达式*, 即

$$Y \approx H(X) = A_0 + A_1X + A_2X^2 + A_3X^3 \quad (3)$$

其中

$$A_0 = Y_i$$

$$A_1 = Y'_i$$

$$A_2 = -\frac{1}{l_i^2} [l_i(2Y'_i + Y'_{i+1}) + 3(Y_i - Y_{i+1})]$$

$$A_3 = \frac{1}{l_i^3} [l_i(Y'_i + Y'_{i+1}) + 2(Y_i - Y_{i+1})]$$

由 (3) 式看出, 用于近似替代一元函数 Y 的 埃尔米特插值多项式是个完整的一元三次多项式, 其系数可直接或通过一定的计算从测点的函数值、导数值和两测点距离中得到。

若进一步将插值逼近思想推广到二元函数, 把平面上三测点所围三角域 ψ (图 2) 视为最小拟合二元函数 $Z = f(X, Y)$ 的区间, 使由三测点构造的插值多项式 $F(X, Y)$ 相对于原函数 Z 满足条件

$$\begin{cases} F(X_i, Y_i) = Z_i \\ F'_X(X_i, Y_i) = Z'_{Xi} \\ F'_Y(X_i, Y_i) = Z'_{Yi} \end{cases} \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

式中: i —测点编号; Z_i —测点高程; Z'_{Xi} 、 Z'_{Yi} —分别为测点在 X 轴和 Y 轴方向的斜率; $F'_X(X_i, Y_i)$ 、 $F'_Y(X_i, Y_i)$ —分别为插值多项式在测点的 X 轴和 Y 轴方向的偏导数。(4) 式的几何意义是: 插值多项式 $F(X, Y)$ 与被插函数 $Z = f(X, Y)$ 的图象在测点 P_i 处相切。反映到地质界面上, 就是插值多项式的图象与地质界面在测点 P_i 处完全重合。

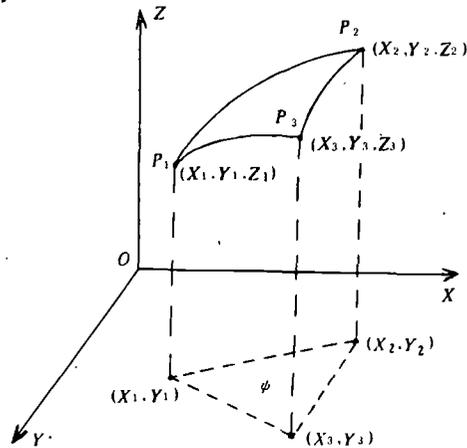


图 2 三测点空间位置示意图

但是, 从 (4) 式中不难发现, 代入三测点数据至多仅能获取 9 个条件, 即由平面坐标点 (X_1, Y_1) 、 (X_2, Y_2) 、 (X_3, Y_3) 对应的高程 Z_1 、 Z_2 、 Z_3 及其在 X 轴和 Y 轴方向上的斜率 Z'_{X1} 、 Z'_{X2} 、 Z'_{X3} 、 Z'_{Y1} 、 Z'_{Y2} 和

* 文林, 用埃尔米特插值公式圈定矿体计算储量和确定探矿工程间距, 1978。

Z'_{y3} 等 9 个值 (图 2)。因此, 无法构造一个具 10 个系数的完整二元三次多项式。考察 (1) 式不难看出, 舍去式中的 XY 交叉乘积项后, 原式仍能既保证其对称性, 又满足任一方向均为一元三次多项式的条件。因而建立一个缺 XY 项的二元三次插值多项式, 依然能够满足地质界面近似拟合的需要。

这样, 用三测点逼近原函数的插值多项式形式便确定为

$$Z \approx F(X, Y) = A_0 + A_1X + A_2Y + A_3X^2 + A_4Y^2 + A_5X^3 + A_6X^2Y + A_7XY^2 + A_8Y^3 \quad (5)$$

进而, 得

$$Z'_X \approx F'_X(X, Y) = A_1 + 2A_3X + 3A_5X^2 + 2A_6XY + A_7Y^2 \quad (6)$$

$$Z'_Y \approx F'_Y(X, Y) = A_2 + 2A_4Y + A_6X^2 + 2A_7XY + 3A_8Y^2 \quad (7)$$

插值多项式的建立步骤

1. 获取原始数据

在单一连续地质界面上取得三测点的 X 、 Y 、 Z 坐标值及倾向 λ 和倾角 β 数据;

2. 变换水平坐标

为避免求插值多项式系数解 9 个联立方程的求繁杂计算, 特将原水平坐标作如下变换

$$\text{令 } \alpha = \arctg\left(\frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}\right) \quad (8)$$

$$X_i = (\bar{Y}_i - \bar{Y}_1)\sin\alpha + (\bar{X}_i - \bar{X}_1)\cos\alpha \quad (9)$$

$$Y_i = (\bar{Y}_i - \bar{Y}_1)\cos\alpha + (\bar{X}_i - \bar{X}_1)\sin\alpha \quad (10)$$

式中: α 为新坐标相对原坐标的旋转角, 顺时针旋为正, 反之为负; X_i 、 Y_i 和 \bar{X}_i 、 \bar{Y}_i 分别为测点 P_i 的新、旧平面坐标。

这样处理后, 点 (\bar{X}_1, \bar{Y}_1) 为新坐标系 XY 平面上的原点, 由此点向点 (\bar{X}_2, \bar{Y}_2) 的水平射线为 X 轴正向, 由此顺时针旋

90° 后的正向为 Y 轴正向, Z 轴方向仍同原坐标系 (图 3)。故此, 新坐标系下有

$$X_1 = 0, Y_1 = 0, Z_1 = 0$$

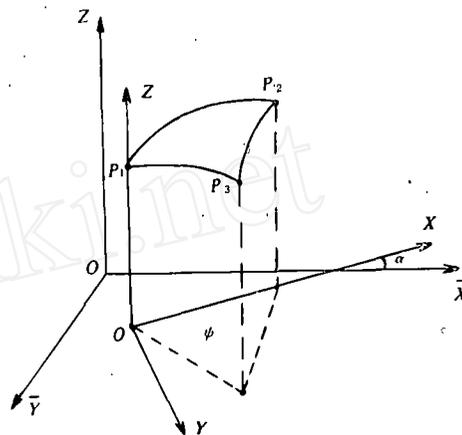


图 3 新旧坐标系示意图

3. 计算 Z'_{xi} 、 Z'_{yi} 值

将测点 P_i 的倾向 λ_i 、倾角 β_i 和新坐标旋转角 α 值代入式 (11)、(12) 中, 求出相应的一阶偏导数 Z'_{xi} 和 Z'_{yi} 值

$$Z'_{xi} = -tg\beta_i \cos(\lambda_i - \alpha) \quad (11)$$

$$Z'_{yi} = -tg\beta_i \sin(\lambda_i - \alpha) \quad (12)$$

4. 计算插值多项式系数 $A_0 \sim A_8$

将三测点 P_i 的新坐标值 X_i 、 Y_i 、 Z_i 及偏导数 Z'_{xi} 、 Z'_{yi} 代入式 (5) ~ (7) 中, 可获得 9 个方程, 解此方程组, 各系数分别为

$$\left\{ \begin{aligned} A_0 &= Z_1 \\ A_1 &= Z'_{x1} \\ A_2 &= Z'_{y1} \\ A_3 &= \frac{3}{X_2^2}(Z_2 - A_0) - \frac{1}{X_2}(2A_1 + Z'_{x2}) \\ A_4 &= \frac{1}{Y_3^2}(3Z_3 - Z'_{y3}Y_3 - Z'_{x3}X_3 \\ &\quad - 3A_0 - 2A_1X_3 - 2A_2Y_3 - A_3X_3^2) \\ A_5 &= \frac{1}{3X_2^2}(Z'_{x2} - A_1 - 2A_3X_2) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} A_6 = \frac{1}{X_2^2} (Z'_{y_2} - A_2) \\ A_7 = \frac{1}{Y_3^2} (Z'_{x_3} - A_1 - 2A_3X_3 - 3A_5X_3^2 - 2A_6X_3Y_3) \\ A_8 = \frac{1}{3Y_3^3} (Z'_{y_3} - A_2 - 2A_4Y_3 - A_6X_3^2 - 2A_7X_3Y_3) \end{cases} \quad (13)$$

将 $A_0 \sim A_8$ 值代入式 (5)，一个由三测点构造的插值多项式便可建立。

应用与计算机程序

1. 应用

(1) 较准确预测地质界面空间位置：在三测点围限的地质界面内，将我们希望获知点 P_d 的平面坐标值 X_d 、 Y_d 代入式 (5)，可求出该点的预测高程值 \hat{Z}_d ；

(2) 定量判定产状：在三测点范围内，将欲知点 P_d 的 X_d 、 Y_d 坐标代入式 (6)、(7)，获得偏导数 \hat{Z}'_{x_d} 、 \hat{Z}'_{y_d} ；进而代入式 (14)，求出该点倾角 $\hat{\beta}_d$

$$\hat{\beta}_d = \arctg \sqrt{\hat{Z}'_{x_d}{}^2 + \hat{Z}'_{y_d}{}^2} \quad (14)$$

随后把 \hat{Z}' / X_d 和 $\hat{\beta}_d$ 值按要求代入到式中，便可得到点 P_d 的倾向 λ_d 。

当 $\hat{Z}'_{y_d} < 0$ 时

$$\theta_1 = \alpha + \arccos\left(\frac{\hat{Z}'_{x_d}}{-\text{tg}\hat{\beta}_d}\right),$$

$$\lambda_d = \begin{cases} \theta_1 + 360 & (\theta_1 \leq 0) \\ \theta_1 & (0 < \theta_1 \leq 360) \end{cases} \quad (15)$$

当 $\hat{Z}'_{y_d} \geq 0$ 时

$$\theta_2 = 360 + \alpha + \arccos\left(\frac{\hat{Z}'_{x_d}}{-\text{tg}\hat{\beta}_d}\right),$$

$$\lambda_d = \begin{cases} \theta_2 - 360 & (\theta_2 > 360) \\ \theta_2 & (0 \leq \theta_2 \leq 360) \end{cases} \quad (16)$$

• 36 •

(3) 绘制剖面图：根据地质界面的插值多项式，即能得到任一方向近似替代界面的拟合曲线，即拟合面的任一方向剖面图。作图时只需沿一定方向把一系列 X 、 Y 值代入式 (5) 中，求出对应的值并将数据投点连线即可。

可以看到，从建立插值多项式到应用过程的一系列计算与作图，用手工较为繁琐，若用计算机代之则极为方便。

2. 计算机程序

此法的计算机程序是用 Basic 语言编写，在 IBM-PC/XT 微机上实现的。其中包括坐标转换、求插值多项式系数、计算预

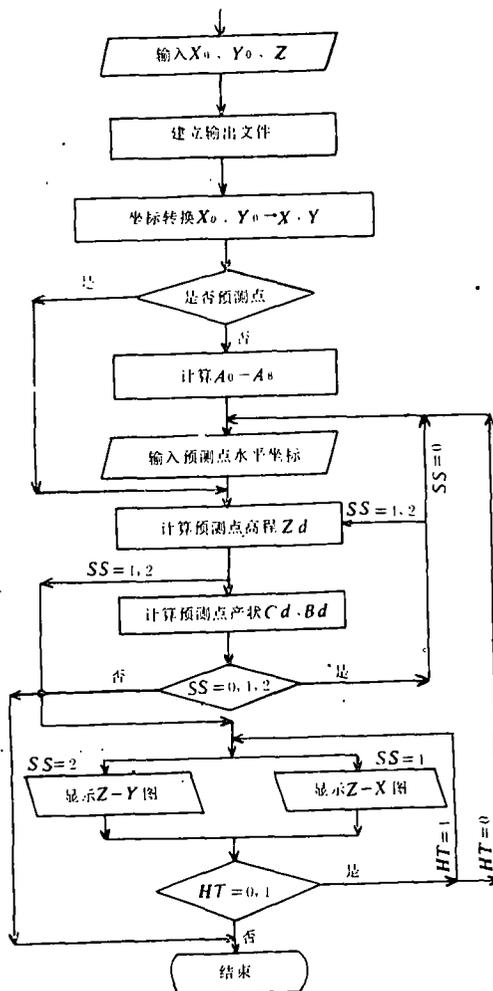


图 4 程序框图

测点位置及产状和分别显示新坐标系下 X 、 Y 轴方向的拟合面剖面图。程序的执行是采用人机对话方式，提示用户输入相应数据和参数。剖面图形可用硬拷贝的方式在打印机上输出。

(1) 程序框图：根据前述插值多项式建立步骤及应用过程设计程序框图（图 4）。

(2) 主要标识符说明：

$X_0(i)$ 、 $Y_0(i)$ 、 $Z_0(i)$ —测点 P_i 原坐标题值；

$C_0(i)$ 、 $B_0(i)$ —测点 P_i 的倾向和倾角(十进制度)；

H_0 —新坐标相对旧坐标旋转角（十进制度）；

$X_{(i)}$ 、 $Y_{(i)}$ —测点 P_i 的平面新坐标题值；

$A_0 \sim A_8$ —插值多项式系数；

X_{od} 、 Y_{od} —预测点 P_d 的平面原坐标题值；

X_d 、 Y_d —预测点 P_d 的平面新坐标题值；

C_d 、 B_d 、 Z_d —预测点 P_d 的倾向、倾角及高程（角度单位为十进制度）；

ZB 、 SS 、 HT —计算及绘图参数；

$X(\max)$ 、 $Y(\max)$ 、 $Z(\max)$ — X 、 Y 、 Z 的新坐标轴最大值；

$Z(\min)$ — Z 坐标轴最小值。

(3) 操作说明：

①在 DOS 系统下，进入高分辨及文本打印状态，依次调进 Basic 解释程序及本程序并启动；②按询问依次输入三测点数据及输出计算结果的文件名，随后屏幕显示坐标旋转角 H_0 及测点新坐标题值，并显示

“ $ZB=?$ ”，输入 1，为按原坐标输预测点的平面坐标，输入其他值，则按新坐标输预测点平面坐标；③预测点平面坐标输入完毕，屏幕显示该点 Z 坐标及倾向 C_d 、倾角 B_d ，并询问“ $SS=?$ ”，输入 0，为转入新预测点计算；输入 1 和 2，分别为绘 $Z-X$ 和 $Z-Y$ 面上的拟合面剖面图；输入其他数，程序结束当 $SS=1$ 或 2 时，询问的 X 或 Y 值，用户可根据需要在 $0 \sim X(\max)$ 或 $0 \sim Y(\max)$ 范围内取；④绘图完毕，询问“ $HT=?$ ”，输入 0，为转入新预测点计算；输入 1，为再次绘图；输入其他数，程序结束。

所有计算结果，均存入文件中，可调出打印。

计算实例

1.为检验拟合效果，不妨先对任一已知函数进行拟合

$$\text{如已知函数: } Z = \frac{Y_0^2}{32} - \frac{X_0^2}{18} \quad (17)$$

定出 3 点，对所围区域的图象进行拟合，3 点数据见表 1。

表 1 函数图象的三测点坐标及偏导数值

测点号	X_0	Y_0	Z	Z'_x	Z'_y
1	-10	-20	6.94444	1.1111	-1.2500
2	19	-20	-7.55556	-2.1111	-1.2500
3	7	18	7.40278	-0.7778	1.1255

据此所建立的插值多项式为

$$\begin{aligned} \hat{Z} = & 6.94444 + 1.1111X \\ & - 1.25Y - 5.555517 \times 10^{-2} X^2 \\ & + 3.125046 \times 10^{-2} Y^2 - 1.675865 \times \\ & 10^{-8} XY^2 - 3.037152 \times 10^{-9} Y^3 \quad (18) \end{aligned}$$

表 2 原函数与插值多项式计算结果

点号	X_0	Y_0	X	Y	Z	\hat{Z}	Z'_x	\hat{Z}'_x	Z'_y	\hat{Z}'_y
4	13.0	3.5	23.0	23.5	-9.00608	-9.00613	-1.44444	-1.44445	0.21875	0.21875
5	3.6	4.8	13.6	24.8	0.00000	0.00001	-0.40000	-0.40001	0.30000	0.30001
6	15.2	-10.0	25.2	10.0	-9.71056	-9.71060	-1.68889	-1.68888	-0.62500	-0.62500
7	8.0	-7.0	18.0	13.0	-2.02431	-2.02437	-0.88889	-0.88889	-0.43750	-0.43750
8	-2.0	-8.0	8.0	12.0	1.77778	1.77775	0.22222	0.22221	-0.50000	-0.49999
9	8.4	-18.0	18.4	2.0	6.20500	6.20492	-0.93333	-0.93333	-1.12500	-1.12500

在 X_0Y_0 平面三角域内任选若干点, 将其平面坐标代入式 (17) 计算 Z 值, 同时将这些点的相应 X 、 Y 坐标代入插值多项式 (18) 计算 \hat{Z} 值, 结果一并列入表 2。

由表 2 看出, (18) 式极成功地逼近了原函数 (17) 式, 两者误差相当小。

2. 拟合某矿体顶板

矿体顶板上三测点原始数据见表 3。

将表 3 数据转换成新坐标, 求出坐标水

平旋转角 H_0 , 进而计算插值多项式系数 $A_0 \sim A_8$, 结果见表 4。

表 3 矿体顶板上三测点原始坐标及产状

测点号	X_0	Y_0	Z	倾向	倾角
				C_0	B_0
1	20.5	450.3	1262.4	274	63
2	117.9	206.7	866.8	305	50
3	266.8	393.8	947.0	312	67

利用三测点范围内矿体顶板某些已知点坐标及产状检验拟合情况, 结果示于表 5。

表 4 矿体顶板三测点新坐标、坐标旋转角和插值多项式系数

测点号	X	Y	Z	H_0	A_0	1262.4	A_5	-3.619763×10^{-7}
1	0	0	1262.4	-68.11275	A_1	-1.879688	A_6	-1.2656×10^{-5}
2	262.350	0	866.8		A_2	0.5896101	A_7	2.085865×10^{-7}
3	143.903	207.721	947.0		A_3	1.512082×10^{-3}	A_8	5.028195×10^{-6}
					A_4	-4.392724×10^{-3}		

表 5 矿体顶板高程及产状的实测与计算结果

点号	X_0	Y_0	X	Y	高程		倾向		倾角	
					Z (实测)	\hat{Z} (计算)	C_0 (实测)	\hat{C}_0 (计算)	B_0 (实测)	\hat{B}_0 (计算)
4	109.6	367.8	109.68	52.10	1078.08	1085.58	286	291.12	62	59.93
5	153.1	288.0	199.93	62.87	927.97	933.46	310	305.73	57	59.23
6	196.2	384.4	126.42	138.68	1027.47	1031.36	305	307.14	65	63.64
7	225.7	315.8	201.07	140.60	883.91	881.57	312	314.54	63	65.44

表 5 数据表明, 据插值多项式计算出高程及产状与实测结果相差无几, 此插值多项式完全可用于定量预测三测点范围内矿体顶板的空位位置和产状。

进一步用插值多项式绘制矿体顶板拟合面剖面图。在新坐标下, 取 $Y=0$, 绘制 $Z-X$ 面的剖面图 (图 5); 取 $X=140$, 绘制 $Z-Y$ 面的剖面图 (图 6)。

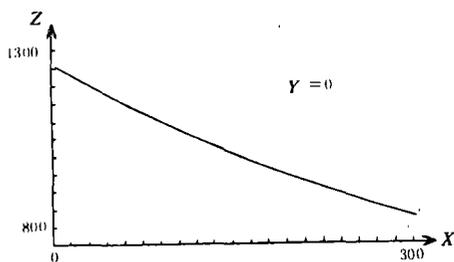


图 5 矿体顶板拟合面 $Z-X$ 面剖面图

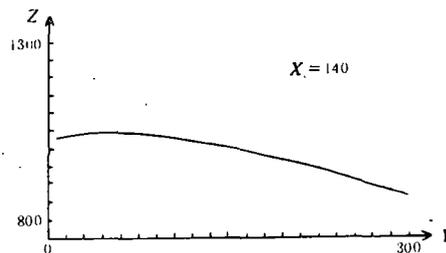


图 6 矿体顶板拟合面 $Z-Y$ 面剖面图

应注意的问题

1. 由于 (5) 式是单值函数, 并存在一、二、三阶导数, 故图象是光滑连续的, 且极值点不大于 2 个或拐点不大于 1 个。因此, 用它拟合的地质界面, 要求界面连续光滑, 且无论相对于水平面抑或垂面, 其背形或向形数应不大于 2 个; 界面上仅点 P_i 对应于 $X-Y$ 水平面上的 (X_i, Y_i) 点。

2.因插值多项式是依靠地质界面上三测点数据建立的,所以拟合区应严格限于三测点所围三角域内。

3.由于三测点的产状数据在建插值多项式时至关重要,故产状数据的准确与否对拟合程序有看直接影响。

文朴副教授曾就文中主要内容给予悉心指导,在此深表谢意。

Method Using the Data from Three Measuring Points for Geological Boundary Surface Fitting

Zhou Yufeng

In general the interpolation formula established on the basis of the data obtained from three measuring points can only be used for fitting a plane in a three dimensional space. In the method here introduced for curved surface fitting not only the data from three measuring points, but also their slope values are required. It is especially suitable to be used for geological boundary surface fitting. Calculating method and plotting program are illustrated by a practical example.

参考文献

- [1] 清华大学、北京大学《计算方法》编写组,《计算方法》(上册),科学出版社,1975年。
- [2] 李岳生、齐东旭,《样条函数方法》,科学出版社,1979年
- [3] 周明德主编,《微型计算机 IBM-PC 系统原理及其应用》,清华大学出版社,1985年。

掉入孔内粗径钻具的处理方法

钻进过程中,粗径钻具因折断、糊钻、埋钻或受孔壁掉块挤夹脱扣而掉落孔底,采用带丝锥的反丝钻杆处理,易损坏钻具。简便的方法是:把端面加工4~5个矩形或偏斜水口的岩心管直接下入孔内;在事故孔深附近慢速下放,用管钳在孔口轻轻晃动,回转钻杆柱,把钻具套装入岩心管内。岩心管能顺利下至孔底,说明钻具已被装入。不开泵送冲洗液,开车以最低转数操作(通过离合器的闭合或断开控制)。稍加压,边操作边观察柴油机,以柴油机冒黑烟不浓或燥声不太大为标准,随着干钻岩石深度增大,岩心管下部与岩粉干摩擦发热,回转阻力增大,柴油机冒黑烟^①或燥声增大。上、下窜动钻具再钻进,始终控制岩心管下部发热,但不烧

钻。钻进200~300mm,停车从水笼头投入一定量的卡料,如铅丝、小石块等。开泵送入孔底,停泵沉淀20~25min,开车转动数转,上提钻具1~2m,再放至孔底。如果下放过程中没有阻滞现象,说明打捞成功,即可提钻。提钻途中应操作平稳,以防剧烈冲撞振动、猛缴、猛提,造成包卷物脱落。我们采用这种方法曾打捞起掉入孔内的测斜仪、绳索取心钻具内管总成和螺杆钻具、常规硬合金、金刚石钻进用粗径钻具。金刚石胎体、小工具异物掉入孔内,也可用此法。

[四川省地矿局探矿技术试验室(峨眉市)
杨明奇]

本文1992年10收到,王梅编辑。