解析雅可比矩阵的一维CSAMT反演*

朱添宝　施婉华　杨　生　金白露

（中国有色金属工业总公司北京矿产地质研究所）

本文导出了解析的雅可比矩阵，较完善地解决了CSAMT法一维反演的最优化算法问题。用解析雅可比矩阵所编制的CSAMT一维反演程序，经过试算证实，具有精度高、速度快、稳定性好等明显特点，可以在一般微机上实现电阻率和相位的联合反演，为CSAMT法和频率测深法的定量解释提供了一个有效的手段。

关键词：解析雅可比矩阵；CSAMT反演

可控源音频大地电磁法（CSAMT）是一种人工场源的电磁测深法。它不仅涉及到远区场，而且还涉及到中区场（过渡场）和近区场。因此，方法理论和定量解释都较为复杂。

我们在完成CSAMT一维正演算法和程序[1]后，开展了CSAMT一维反演的研究。在这方面，国内有些单位[2,3]已作了一些有益的工作，但在自动反演的最优化算法中，是采用差商方法，来计算雅可比矩阵。差商方法属于近似计算方法，差分步长的选择，往往受导数定义和计算机精度的限制。在电磁场简单的情况下，可获得正确的反演结果，但在多层介质或电磁场复杂的情况下，则给反演带来很大的误差，甚至导致错误和反演失败。

为保证反演质量，除建立正确的正演模型外，还要有效地解决最优化算法的问题。对CSAMT法而言，用解析法求解雅可比矩阵是理想的最优化算法。

本文完成了解析求解雅可比矩阵的工作，并编制了广义逆CSAMT一维反演程序。该程序能方便地在一般IBM微机上实现。

计算结果证明：采用解析雅可比矩阵的最优化算法，能保证CSAMT一维反演的正确性和稳定性，而且有足够的计算精度和速度，具有较好的实用价值，为CSAMT法和频率测深等方法的定量解释提供了一个有效的手段。

解析法求解雅可比矩阵

图1为CSAMT观测系统的示意图。其中$2L$为供电导线接地点A、B间的距离，坐标原点置于AB中点，P为观测点，接收电场E_x和磁场H_y，x_P、r_A、r_B分别为P点的横坐标和到A、B点的距离。

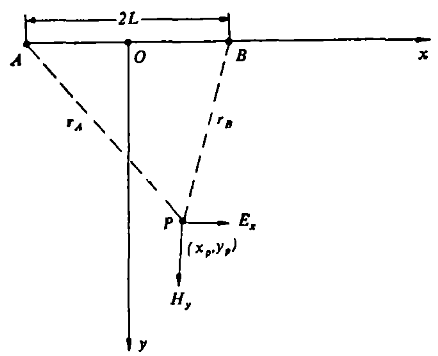

图 1　观测系统示意图

* 本文得到国家自然科学基金资助。

通常卡尼亚视电阻率和相位可分别表示为：

$$\rho_{xy}=\frac{1}{5f}\left|\frac{E_x}{H_y}\right|^2=F(f,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\lambda_m) \tag{1}$$

$$\varphi=\varphi_{E_x}-\varphi_{H_y}=\Phi(f,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\lambda_m) \tag{2}$$

这里，f 为发送电流的频率，λ_1，$\lambda_2\cdots\lambda_m$分别为 n 层大地的层参数（电导率和层厚度）。φ_{E_x}，φ_{H_y}分别为电场相位和磁场相位，则在某一频率时卡尼亚电阻率及相位差对层参数λ_i ($i=1$，$2\cdots m$)的偏导数即构成雅可比矩阵的元素可分别表示为：

$$\frac{\partial\rho_{xy}}{\partial\lambda_i}=\frac{2}{5f}\cdot\frac{|E_x|}{|H_y|^3}\cdot\left(\frac{\partial|E_x|}{\partial\lambda_i}\cdot|H_y|-\frac{\partial|H_y|}{\partial\lambda_i}\cdot|E_x|\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i}=\frac{\mathrm{Im}\left(\frac{\partial E_x}{\partial\lambda_i}\right)\cdot\mathrm{Re}(E_x)-\mathrm{Im}(E_x)\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{\partial E_x}{\partial\lambda_i}\right)}{\mathrm{Re}^2(E_x)+\mathrm{Im}^2(E_x)}-\frac{\mathrm{Im}\left(\frac{\partial H_y}{\partial\lambda_i}\right)\cdot\mathrm{Re}(H_y)-\mathrm{Im}(H_y)\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{\partial H_y}{\partial\lambda_i}\right)}{\mathrm{Re}^2(H_y)+\mathrm{Im}^2(H_y)} \tag{4}$$

（3）式中：

$$\frac{\partial|E_x|}{\partial\lambda_i}=\frac{1}{|E_x|}\cdot\left[\mathrm{Re}(E_x)\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{\partial E_x}{\partial\lambda_i}\right)+\mathrm{Im}(E_x)\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{\partial E_x}{\partial\lambda_i}\right)\right] \tag{5}$$

（4）式中：

$$\frac{\partial|H_y|}{\partial\lambda_i}=\frac{1}{|H_y|}\cdot\left[\mathrm{Re}(H_y)\cdot\mathrm{Re}\left(\frac{\partial H_y}{\partial\lambda_i}\right)+\mathrm{Im}(H_y)\cdot\mathrm{Im}\left(\frac{\partial H_y}{\partial\lambda_i}\right)\right] \tag{6}$$

（5）、（6）式表示了电场、磁场偏导数的实、虚分量与电场、磁场模量偏导数的关系。

对有限长接地导线一维CSAMT而言（见图1），观测点P处的电、磁场及其偏导数可分别表示为[1]：

$$E_x=\frac{I}{2\pi}\cdot i\omega\mu\int_{-L}^{+L}A_3\cdot dx+\frac{\rho_1 I}{2\pi}\cdot\left[\frac{x}{r}(A_1+i\omega\sigma_1 A_2)\right]_{-L}^{+L} \tag{7}$$

$$H_y=\frac{I}{2\pi}\cdot\left[\int_{-L}^{+L}A_5\cdot dx-\left(\frac{x}{r}A_4\right)_{-L}^{+L}\right] \tag{8}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial\lambda_i}=\begin{cases}\frac{I}{2\pi}\cdot i\omega\mu\int_{-L}^{+L}\frac{\partial A_3}{\partial\lambda_i}\cdot dx+\frac{\rho_1 I}{2\pi}\cdot\left[\frac{x}{r}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\lambda_i}+i\omega\mu\sigma_1\frac{\partial A_2}{\partial\lambda_i}\right)\right]_{-L}^{+L} & i\neq1\\ \frac{I}{2\pi}\cdot i\omega\mu\int_{-L}^{+L}\frac{\partial A_3}{\partial\lambda_i}\cdot dx+\frac{I}{2\pi}\cdot\left[\frac{x}{r}\left(\frac{\partial A_1}{\partial\lambda_i}-A_1\right)i\omega\mu\frac{\partial A_2}{\partial\lambda_i}\right)\right]_{-L}^{+L} & i=1\end{cases} \tag{9}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial\lambda_i}=\frac{I}{2\pi}\cdot\left[\int_{-L}^{+L}\frac{\partial A_5}{\partial\lambda_i}\cdot dx-\left(\frac{x}{r}\cdot\frac{\partial A_4}{\partial\lambda_i}\right)_{-L}^{+L}\right] \tag{10}$$

其中：

$$A_1=\int_0^\infty\frac{n_1}{R}\cdot J_1(mr)\cdot dm$$

$$A_2=\int_0^{\infty} \frac{1}{m+n_1/R^*}\cdot J_1(mr)\cdot dm$$

$$A_3=\int_0^{\infty} \frac{m}{m+n_1/R^*}\cdot J_0(mr)\cdot dm$$

$$A_4=\int_0^{\infty} \frac{m}{m+n_1/R^*}\cdot J_1(mr)\cdot dm$$

$$A_5=\int_0^{\infty} \frac{n_1}{R^*}\cdot\frac{m}{m+n_1/R^*}\cdot J_0(mr)\cdot dm$$

(11)

$$\frac{\partial A_1}{\partial \lambda_i}=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{-n_1\cdot\dfrac{\partial R}{\partial \lambda_i}}{R^2}\cdot J_1(mr)\cdot dm & i\neq 1\\ \displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{\dfrac{-iw\mu}{2n_1}\cdot R-n_1\cdot\dfrac{\partial R}{\partial \lambda_i}}{R^2}\right)\cdot J_1(mr)\cdot dm & i=1\end{cases}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial \lambda_i}=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{(m+n_1/R^*)^2}\cdot\frac{n_1\cdot\dfrac{\partial R^*}{\partial \lambda_i}}{R^{*2}}\right)\cdot J_1(mr)\cdot dm & i\neq 1\\ \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(m+n_1/R^*)^2}\cdot\left[\frac{\dfrac{iw\mu}{2n_1}\cdot R^*+n_1\cdot\dfrac{\partial R^*}{\partial \lambda_i}}{R^{*2}}\right]\cdot J_1(mr)\cdot dm & i=1\end{cases}$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial \lambda_i}=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{m}{(m+n_1/R^*)^2}\cdot\left(\frac{n_1\cdot\dfrac{\partial R^*}{\partial \lambda_i}}{R^{*2}}\right)\cdot J_0(mr)\cdot dm & i\neq 1\\ \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{m}{(m+n_1/R^*)^2}\left[\frac{\dfrac{iw\mu}{2n_1}\cdot R^*+n_1\cdot\dfrac{\partial R^*}{\partial \lambda_1}}{R^{*2}}\right]\cdot J_0(mr)\cdot dm & i=1\end{cases}$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial \lambda_i}=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{m}{(m+n_1/R^*)^2}\cdot\left(\frac{n_1\cdot\dfrac{\partial R^*}{\partial \lambda_i}}{R^{*2}}\right)\cdot J_1(mr)\cdot dm & i\neq 1\\ \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{m}{(m+n_1/R^*)^2}\cdot\left[\frac{\dfrac{iw\mu}{2n_1}\cdot R^*+n_1\cdot\dfrac{\partial R^*}{\partial \lambda_1}}{R^{*2}}\right]\cdot J_1(mr)dm & i=1\end{cases}$$

$$\frac{\partial A_5}{\partial \lambda_i}=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{-m^2}{(m+n_1/R^*)^2}\cdot\left(\frac{n_1\cdot\dfrac{\partial R^*}{\partial \lambda_i}}{R^{*2}}\right)\cdot J_0(mr)\cdot dm & i\neq 1\\ \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{-m^2}{(m+n_1/R^*)^2}\cdot\left[\frac{\dfrac{iw\mu}{2n_1}\cdot R^*+n_1\cdot\dfrac{\partial R^*}{\partial \lambda_1}}{R^{*2}}\right]\cdot J_0(mr)\cdot dm & i=1\end{cases}$$

上述各式中的ω、μ分别为供电电流的圆频率和真空中的导磁率。(11)、(12)式中的R、R^*分别为地电层参数的电性和磁性传输函数，它们对层参数的偏导数分别表示为$\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}$、$\frac{\partial R^*}{\partial \lambda_i}$。$A_1$、$A_2$、$A_3$、$A_4$、$A_5$分别为其Hankel变换，其中的$J_0(mr)$、$J_1(mr)$分别为0阶、1阶贝塞尔函数。

(7)、(8)、(9)、(10)式中的$\frac{x}{r}$在积分上、下限$+L$、$-L$处分别为$\frac{x_P-L}{r_B}$、$\frac{x_P+L}{r_A}$（见图1）。

R、R^*、$\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}$、$\frac{\partial R^*}{\partial \lambda_i}$及$n_1$可分别由以下公式表示：

$$n_1=\sqrt{m^2-i\omega\mu\sigma_1}$$

$$\begin{cases} R_j^*=\coth\left[n_j H_j+\coth^{-1}\left(\dfrac{n_j}{n_{j+1}}\right)\cdot R_{j+1}^*\right] \\ R_N^*=1 \\ R^*=R_1^* \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} R_j=\coth\left[n_j H_j+\coth^{-1}\left(\dfrac{n_j H_j}{n_{j+1}\rho_{j+1}}\right)\cdot R_{j+1}\right] \\ R_N=1 \\ R=R_1 \end{cases} \tag{14}$$

$$\frac{\partial R_j^*}{\partial \lambda_i}=\frac{1}{KK_j^*}\cdot[E+M+N-T]-\frac{K_j^*}{(KK_j^*)^2}\cdot[E-M-N+T] \tag{15}$$

$$\frac{\partial R_j}{\partial \lambda_i}=\frac{1}{KK_j}\cdot[EE+M+NN-TT]-\frac{K_j}{(KK_j)^2}\cdot[EE-M-NN+T] \tag{16}$$

其中：

$$n_j=\sqrt{m^2-iw\mu\sigma_j}$$

$$K_j^*=\left(1+\frac{n_j}{n_{j+1}}\cdot R_{j+1}^*\right)-\left(1-\frac{n_j}{n_{j+1}}\cdot R_{j+1}^*\right)\cdot e^{-2n_jH_j}$$

$$KK_j^*=\left(1+\frac{n_j}{n_{j+1}}\cdot R_{j+1}^*\right)+\left(1-\frac{n_j}{n_{j+1}}\cdot R_{j+1}^*\right)\cdot e^{-2n_jH_j}$$

$$K_j=\left(1+\frac{n_j\rho_j}{n_{j+1}\rho_{j+1}}\cdot R_{j+1}\right)-\left(1-\frac{n_j\rho_j}{n_{j+1}\rho_{j+1}}\cdot R_{j+1}\right)\cdot e^{-2n_jH_j}$$

$$KK_j=\left(1+\frac{n_j\rho_j}{n_{j+1}\rho_{j+1}}\cdot R_{j+1}\right)+\left(1-\frac{n_j\rho_j}{n_{j+1}\rho_{j+1}}\cdot R_{j+1}\right)\cdot e^{-2n_jH_j}$$

而i、$j=1, 2, \cdots n-1$。$\frac{\partial R_N^*}{\partial \lambda_N}=0$，$\frac{\partial R}{\partial \lambda_N}=0$

$$E=\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\frac{n_j}{n_{j+1}}\right)\cdot R_{j+1}^*$$

$$M=2\cdot e^{-2n_jH_j}\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda_i}(n_j H_j)$$

$$N=\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left(\frac{n_j}{n_{j+1}}\right)\cdot R^*_{j+1}\cdot e^{-2n_jH_j}$$

$$T=2\cdot\left(\frac{n_j}{n_{j+1}}\right)\cdot R^*_{j+1}\cdot e^{-2n_jH_j}\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda_i}(n_j H_j)$$

$$EE=\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left(\frac{n_j\rho_j}{n_{j+1}\rho_{j+1}}\right)\cdot R_{j+1}$$

$$NN=\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left(\frac{n_j\rho_j}{n_{j+1}\rho_{j+1}}\right)\cdot R_{j+1}\cdot e^{-2n_jH_j}$$

$$TT=2\cdot\left(\frac{n_j\rho_j}{n_{j+1}\rho_{j+1}}\right)\cdot R_{j+1}\, e^{-2n_jH_j}\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda_i}(n_j H_j)$$

(13)、(14)、(15)、(16)式可通过递推方式求得R^*、R、$\frac{\partial R^*}{\partial\lambda_i}$、$\frac{\partial R}{\partial\lambda_i}$，然后再逐级反代，即可得到$\rho$及$\frac{\partial\rho}{\partial\lambda_i}$、$\varphi$及$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i}$。在计算(11)、(12)式的Hankel变换时，我们采用了Anderson，W.L[4]的自适应数字线性滤波器，并注意应用了核函数之间相关性。而在计算(7)、(8)、(9)、(10)式的有限长导线积分时，根据已知观测装置的几何关系，采用了能保证精度前提下自动分段的Gauss—Legendre积分法。虽然（3）、（4）式计算的只是卡尼亚视电阻率及相位对各层电导率、厚度的偏导数，但可以通过复合函数求导法则得到各种偏导数的表示形式，即雅可比矩阵元素的各种表示形式。在我们的广义逆CSAMT的反演中，解析雅可比矩阵元素采用的是对数卡尼亚电阻率和线性相位差对对数层参数的偏导数。

验 算 结 果

为了说明采用解析雅可比矩阵后一维的CSAMT反演效果，我们给出了两个反演验算实例。验算是在IBM-386微机上进行的。

实例1 为三层模型。图2和图3为其电阻率及相位差反演拟合结果。图中，(·)点为理论计算值，虚线给出初始参数的正演曲线，实线为反演拟合结果。可见，反演拟合精度较高，其拟合度已达千分之一，而且这样的拟合度仅需反演迭代3次，花费10分钟左右的时间即可达到。与文献〔3〕的结果相比，精度有很大提高。

实例2 为六层模型。图4、图5给出了它们的电阻率及相位拟合结果。该实例在IBM-386微机上，整个反演过程不到20分钟。

从以上计算结果中还可以看出，计算的分辨率矩阵主对角元素很接近1，这也说明了反演结果的可信度较高。

结 语

1. 反演结果的质量很大程度上依赖于正演模型和最优化算法的优劣，在文献〔1〕给出的正演模型基础上，我们推导了解析的雅可比矩阵，从而较完善地解决了CSAMT一维反演中的关键问题。

2. 本文导出的雅可比矩阵的解析解，可直接用于CSAMT标量观测结果的反演，也可以推广应用于张量观测结果的反演。应该指出，雅可比矩阵的解析求解方法，对解

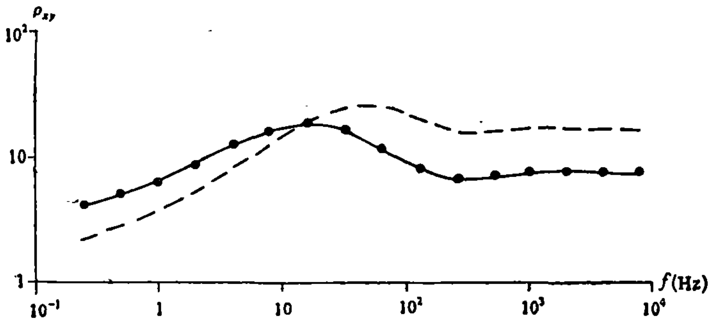

图 2　ρ_{xy}曲线反演结果

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	h_1	h_2
理论值	7.8	80.0	2.0	100	400
初始值	17.8	170	1.0	170	230
迭代终值	7.8	79.98	2.0	99.97	399.92
分辨矩阵主元	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

迭代次数＝3；拟合度＝1‰

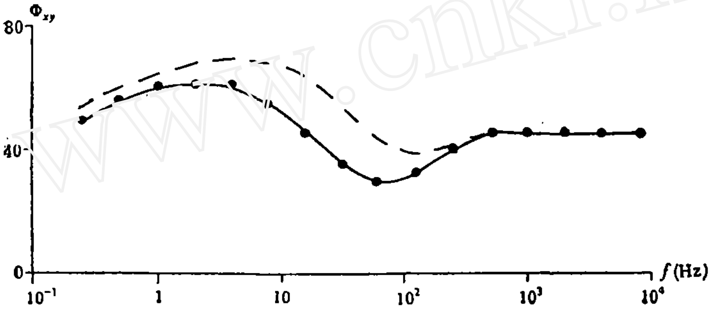

图 3　Φ_{xy}曲线反演结果

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	h_1	h_2
理论值	7.8	80.0	2.0	100	400
初始值	17.8	170	1.0	170	230
迭代终值	7.8	79.98	2.0	99.97	399.92
分辨矩阵主元	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

迭代次数＝3；拟合度＝1‰

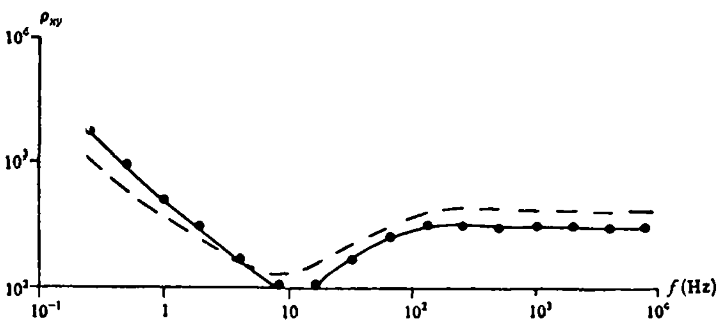

图 4　ρ_{xy}曲线反演结果

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
理论值	300	200	15	1000	120	200	300	500	150	300	500
初始值	400	250	30	600	80	150	400	400	240	200	600
迭代终值	300.0	200.0	15.1	985.0	118.8	200.0	299.9	499.8	150.9	305.4	488.3
分辨矩阵主元	1.0	1.0	0.99	0.96	0.97	1.0	1.0	1.0	0.99	0.94	0.87

迭代次数＝6；拟合度＝0.1‰

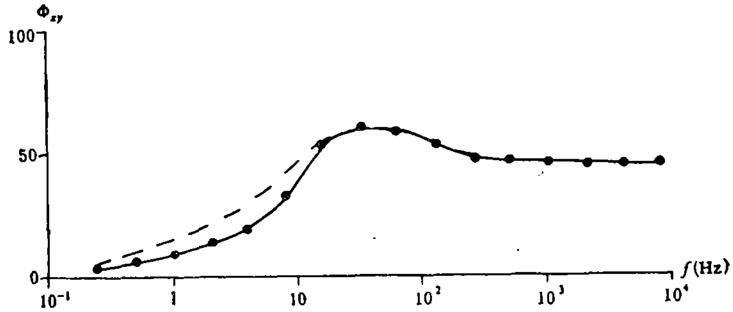

图 5　Φ_{xy}曲线反演结果

	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
理论值	300	200	15	1000	120	200	300	500	150	300	500
初始值	400	250	30	600	80	150	400	400	240	200	600
迭代终值	300.0	200.0	15.1	985.0	118.8	200.0	299.9	499.[illegible]	150.9	305.4	488.3
分辨矩阵主元	1.0	1.0	0.99	0.96	0.97	1.0	1.0	1.0	0.99	0.94	0.87

迭代次数＝6，拟合度＝0.1%，

决其他电磁测深法反演最优化算法问题，具有普遍的意义。

3．根据解析雅可比矩阵编制的一维CSAMT反演程序，具有精度高、速度快和稳定性好的特点。在反演过程中还采用了屏幕菜单方式，可方便地在一般IBM微机上完成反演，有较好的实用价值。

在研究此课题的工作中，得到王庆乙、王军同志的帮助和指导，在此表示感谢。

参 考 文 献

[1] 王　军、王庆乙，地质与勘探，1992，第3期.

[2] 朴化荣、殷长春，物化探计算技术，1987，第2期.

[3]林长佑等，物化探计算技术，1991，第2期.

[4] Anderson. W. L, Geophysics, 1979, Vol. 44, №7.

One-dimensional Inversion of CSAMT Anomalies Using Analytical Jacobi Matrix

Zhu Tianbao　Shi Wanhua

Yang Sheng　Jin Bailu

We have derived an analytical solution of Jacobi matrix which can be applied to the optimum inversion of one-dimensional controlled-source audiomagnetotelluric (CSAMT) anomalies. A corresponding computer program was developed. Through our test calculations it has been found that the program, provided with some distinguishing features, such as: a high accuracy, a fast computation speed and a good stability, may be used to accomplish a simultaneous inversion of resistivity and phase on a common microcomputer. Thus, an effective method for quantitative interpretation of CSAMT and frequency sounding data is given.