



在一次场断开瞬间，图1中的导体的瞬态方程可表示为：

$$-L_c \frac{di_c}{dt} = i_c R_c$$

考虑到

$$i_c(0) = i_0$$

于是

$$i_c = i_0 e^{-t/\tau_c} \quad (1)$$

电感  $L_c = \phi/i$ ，在断电瞬间  $L_c = \phi_1/i_0$ ，故  $i_0 = \phi_1/L_c$ ，将  $i_0$  代入 (1)，则有

$$i_c = \frac{\phi_1}{L_c} e^{-t/\tau_c} = \frac{\mu_c H_1 S_c \cos \alpha_c}{L_c} \cdot e^{-t/\tau_c} \quad (2)$$

式中  $\mu_c$  是导体的磁导率， $S_c$  为斜板体的面积， $\alpha_c$  是一次场与斜板法线方向的夹角， $\tau_c = L_c/R_c$  是衰减常数。由毕奥—沙伐定律  $H_2$  与  $i_c$  成正比，于是有

$$H_2 = G i_c(t) = \frac{\mu_c H_1 S_c}{L_c} \cdot G \cdot e^{-t/\tau_c} \quad (3)$$

式中  $G$  是几何因子，式 (2) 中  $\cos \alpha_c$  已合并到  $G$ ， $G$  与矿体的几何位置、规模、产状有关。

二次场产生的感应电动势可用下式表示：

$$\begin{aligned} V_2(t) &= -N_r S_r \mu_0 \frac{dH_2}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 \mu_c N_r S_r S_c H_1}{L_c \tau_c} \cdot G \cdot e^{-t/\tau_c} \quad (4) \end{aligned}$$

为反映二次场与一次场相位间的关系，将上式中  $H_1$  写成傅里叶级数形式，并考虑到二次场落后于一次场  $-(\pi/2) - \text{tg}^{-1}(n\omega \cdot \tau_c)$ ，将 (4) 式改写成

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \frac{4\mu_0 \mu_c N_r S_r S_c}{L_c \tau_c} \cdot G \sum_{n=1,3} H_{10} \frac{\sin(n\pi f \cdot \tau)}{n\pi} \\ &\quad \cdot e^{j[(n\omega_0 \tau_c - \pi/2 - \text{tg}^{-1}(n\omega_0 \tau_c)) - \omega t]} \cdot e^{-t/\tau_c} \quad (5) \end{aligned}$$

上式中的一次场  $H_1$  是双极性矩形脉冲波，其中脉冲周期为  $T$ ，幅值为 1，脉冲步长为  $\tau$ ， $f = \frac{1}{T}$ ， $\omega_0 = 2\pi f$ 。(5) 式即按接收

线圈中电压的一般表达式。

实际工作中，所感兴趣的是晚期道，它是低频的反应，因而可近似地用有限项低频幅值的代数和来代表测得的电压  $V_2(t)$ ，即

$$V_2(t) \approx \frac{4\mu_0 \mu_c N_r S_r S_c}{L_c \tau_c} \sum_{n=1,3} H_{10} \frac{\sin(n\pi f \cdot \tau)}{n\pi} \cdot e^{-t/\tau_c} \quad (6)$$

### 同点回线装置下

#### 板状体磁场的表达式

无限长直电线引起的感应磁场 (见图 2) 为：

$$H = I/2\pi r$$

因而上、下两线电流的场分别为

$$H_{\frac{1}{2}}^{\pm} = I_c/2\pi r$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{\mp} = -I_c/2\pi r$$

仪器所测磁场的垂直分量是：

$$H_{\frac{1}{2}}^{\pm z} = \frac{I_c}{2\pi r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{I_c}{2\pi} \cdot \frac{x}{(h^2 + x^2)}$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{\mp z} = \frac{I_c}{2\pi r'} \cdot \frac{x'}{r'} = -\frac{I_c}{2\pi}$$

$$\cdot \frac{x + 2l \cos \alpha_c}{(h + 2l \sin \alpha_c)^2 + (x + 2l \cos \alpha_c)^2}$$

两式相加

$$H_{2z} = \frac{I_c}{2\pi} \left[ \frac{x}{h^2 + x^2} - \frac{x + 2l \cos \alpha_c}{(h + 2l \sin \alpha_c)^2 + (x + 2l \cos \alpha_c)^2} \right] \quad (7)$$

据 (2) 式并考虑二次场与一次场的相位关系，得

$$I_c = \frac{4\mu_0 S_c \cos\alpha_c H_{10}}{L_c}$$

$$\cdot \sum_{n=1,3} \frac{\sin(n\pi f \cdot \tau)}{n\pi} \cdot e^{j[n\omega_0 t - \pi/2 - (n-1)(n\omega_0 \tau_c)]} \cdot e^{-l/\tau_c} \quad (8)$$

作用于斜板的磁场  $H_1$  可一级近似地认为是均匀的, 其幅值经实验证明可用其作用在距板顶三分之一处的场值来代表, 此时的磁场分量:

$$H_{1z} = \frac{3M}{r^{\#5}} x^{\#} h^{\#}$$

$$H_{1x} = \frac{M}{r^{\#5}} (2h^{\#2} - x^{\#2})$$

而  $H_{10} \cos\alpha_c$  是  $H_{1z}$  及  $H_{1x}$  在斜板法线方向的投影。

$$\begin{aligned} H_{10} \cos\alpha_c &= H_{1z} \sin\alpha - H_{1x} \cos\alpha \\ &= \frac{3M}{r^{\#5}} x^{\#} h^{\#} \sin\alpha \\ &\quad - \frac{M}{r^{\#5}} (2h^{\#2} - x^{\#2}) \cos\alpha \end{aligned}$$

式中  $M = \frac{1}{4\pi} N_t \cdot S_t \cdot I_t$ 。把上式代入 (8)、

(7) 两式, 可得

$$H_{2z} = \frac{2\mu_0 S_c M}{\pi L_c} \cdot \left[ \frac{x}{h^2 + x^2} \right.$$

$$\left. - \frac{x + 2l \cos\alpha}{(h + 2l \sin\alpha)^2 + (x + 2l \cos\alpha)^2} \right] \cdot$$

$$\left\{ \frac{3 \left( x + \frac{2}{3} l \cos\alpha \right) \left( h + \frac{2}{3} l \sin\alpha \right) \sin\alpha}{\left[ \left( x + \frac{2}{3} l \cos\alpha \right)^2 + \left( h + \frac{2}{3} l \sin\alpha \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\left[ 2 \left( h + \frac{2}{3} l \sin\alpha \right)^2 - \left( x + \frac{2}{3} l \cos\alpha \right)^2 \right]}{\left[ \left( x + \frac{2}{3} l \cos\alpha \right)^2 + \left( h + \frac{2}{3} l \sin\alpha \right)^2 \right]^{3/2}} \cos\alpha \right\} \cdot$$

$$\sum_{n=1,3} \frac{\sin(n\pi f \cdot \tau)}{n\pi} \cdot e^{-l/\tau_c} \quad (9)$$

$$\left. - \frac{x + 2l \cos\alpha}{(h + 2l \sin\alpha)^2 + (x + 2l \cos\alpha)^2} \right] \cdot$$

$$\left[ \frac{3}{r^{\#5}} x^{\#} h^{\#} \sin\alpha - \frac{2h^{\#2} - x^{\#2}}{r^{\#5}} \cos\alpha \right]$$

$$\cdot \sum_{n=1,3} \frac{\sin(n\pi f \cdot \tau)}{n\pi}$$

$$\cdot e^{j[n\omega_0 t - (\pi/2) - (n-1)(n\omega_0 \tau_c)]} \cdot e^{-l/\tau_c}$$

$$V_2(t) = -N_r S_r \mu_0 \frac{dH_{2z}}{dt}$$

$$= \frac{2M S_r N_r \mu_0^2 S_c}{\pi L_c \tau_c} \left[ \frac{x}{h^2 + x^2} \right.$$

$$\left. - \frac{x + 2l \cos\alpha}{(h + 2l \sin\alpha)^2 + (x + 2l \cos\alpha)^2} \right] \cdot$$

$$\left[ \frac{3}{r^{\#5}} x^{\#} h^{\#} \cos\alpha - \frac{2h^{\#2} - x^{\#2}}{r^{\#5}} \cos\alpha \right]$$

$$\cdot \sum_{n=1,3} \frac{\sin(n\pi f \cdot \tau)}{n\pi} \cdot$$

$$e^{j[n\omega_0 t - \pi/2 - (n-1)(n\omega_0 \tau_c)]} \cdot e^{-l/\tau_c}$$

上式中使  $M = \frac{1}{4\pi} N_t S_t I_t$ , 并用  $x$ 、 $h$  来表

示  $x^{\#}$ 、 $h^{\#}$  和  $r^{\#}$ , 最后取其振幅值并进行归一化, 则得

## 振幅因子

$$F = \frac{\mu_0^2 S_t S_r N_t N_r S_c}{2\pi^2 L_c \tau_c} \sum_{n=1,3} \frac{\sin(n\pi f \cdot \tau)}{n\pi} \cdot e^{-t/\tau_c}$$

## 几何因子

$$G = \left[ \frac{x}{h^2 + x^2} - \frac{x + 2l\cos\alpha}{(h + 2l\sin\alpha)^2 + (x + 2l\cos\alpha)^2} \right] \cdot$$

$$\left\{ \frac{3 \left( x + \frac{2}{3} l\cos\alpha \right) \left( h + \frac{2}{3} l\sin\alpha \right) \sin\alpha}{\left[ \left( x + \frac{2}{3} l\cos\alpha \right)^2 + \left( h + \frac{2}{3} l\sin\alpha \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{2 \left( h + \frac{2}{3} l\sin\alpha \right)^2 - \left( x + \frac{2}{3} l\cos\alpha \right)^2}{\left[ \left( x + \frac{2}{3} l\cos\alpha \right)^2 + \left( h + \frac{2}{3} l\sin\alpha \right)^2 \right]^{3/2}} \cos\alpha \right\}$$

## 公式计算与模拟实验

$$V_2(t)/I = G \cdot F(t)$$

### 结果的对比

$$F(t) = \frac{\mu_0^2 S_t S_r N_t N_r S_c}{8\pi^2 L_c \tau_c} \cdot$$

在模拟实验中所用仪器是澳大利亚生产的SIROTEM瞬变电磁仪，其占空比为1，所以(9)式变为

$$\sum_{n=1,3} \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4} \cdot e^{-t/\tau_c}$$

$$G = \left[ \frac{x}{h^2 + x^2} - \frac{x + l\cos\alpha}{(h + 2l\sin\alpha)^2 + (x + 2l\cos\alpha)^2} \right] \cdot$$

$$\left\{ \frac{3 \left( x + \frac{2}{3} l\cos\alpha \right) \left( h + \frac{2}{3} l\sin\alpha \right) \sin\alpha}{\left[ \left( x + \frac{2}{3} l\cos\alpha \right)^2 + \left( h + \frac{2}{3} l\sin\alpha \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{2 \left( h + \frac{2}{3} l\sin\alpha \right)^2 - \left( x + \frac{2}{3} l\cos\alpha \right)^2}{\left[ \left( x + \frac{2}{3} l\cos\alpha \right)^2 + \left( h + \frac{2}{3} l\sin\alpha \right)^2 \right]^{3/2}} \cos\alpha \right\} \quad (10)$$

衰减曲线及剖面曲线均按上述公式对比。

### 1. 衰减曲线的比较

模拟实验的条件：发射线圈和接收线圈的匝数 $N_t$ 和 $N_r$ 均为1，其面积 $S_t$ 、 $S_r$ 均为 $200 \times 200 \text{ m}^2$ ，都放在地表，发射线圈中电流强度为2A，基频为25Hz。斜板面积

$600 \times 600 (\text{m}^2)$ ，电感为0.002H，埋深100m。

衰减观测点位于-160m点处。

考虑到时间常数为斜率的负倒数，即

$$\tau_c = \frac{t_1 - t_2}{L_c (\varepsilon_2 / \varepsilon_1)}$$

不同纵向电导斜板晚期道的 $\tau_c$ 见下表：

纵向电导(S)	$\epsilon_1/I(\text{mV/A})$	$\epsilon_2/I(\text{mV/A})$	$t_1(\text{ms})$	$t_2(\text{ms})$	$\tau_c(\text{ms})$
67.5	40	20	13.7	17.5	5.4
31.3	6	3	16.2	18.6	3.5
12.5	2	1	8.0	8.7	1.0
6.3	4	2	5.1	5.5	0.57
2.9	20	4	2.2	2.6	0.25

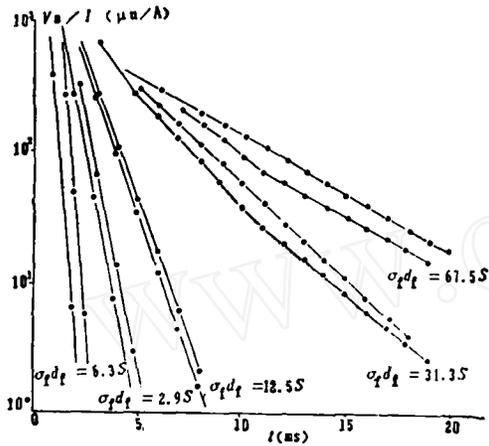


图3 不同导电板状体时间衰减曲线的比较

按公式(10)编好计算程序,将上述参数代入可得不同斜板的衰减曲线(图3)。由图3可见,对各种纵向电导不同的倾斜板状体,其计算的曲线均与模拟实验曲线都很吻合,尤其是在晚期道,它们均彼此平行。

### 2. 剖面曲线的比较

模拟条件所采用的各项参数,并不失其一般性。现在只研究电导为12.5S的斜板。从实验曲线求得 $\tau_c = 1(\text{ms})$ 。所采用剖面曲线计算参数为:斜板面积 $=1400 \times 800(\text{m}^2)$ 其电感量 $=0.0027\text{H}$ ,埋深 $=100\text{m}$ ,电感 $L_c \approx \frac{2l}{300}(\text{mH})$ , $2l=800\text{m}$ 。接收、发射线圈参数仍同前。测量道1.3(ms),时间常数1.0(ms)。

图4为 $\alpha$ 角在 $30^\circ$ 、 $60^\circ$ 和 $90^\circ$ 的情况下,计算的与模拟的剖面曲线的对比。由图可见:在曲线两个极值附近拟合程度较好;随

板状体倾角的增大,拟合程度也越好;对于倾斜平缓的板状体,其计算结果与实测结果拟合较差,在板状体倾斜方向偏离较大,原因是所假设的均匀的一次场条件与实际的激励场相差较大的缘故。

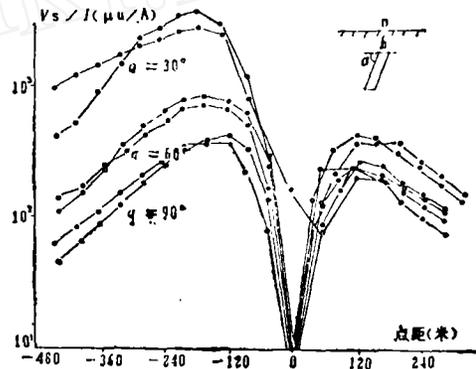


图4 不同倾角的板状体计算的和模拟的剖面曲线的比较

据前人的计算和实验结果[2,3]表明,在晚期道,计算所用的等效回路应取在整个薄板尺寸的70%处,矿体的涡流

$$I_c(t) = I_{c0} e^{-t/\tau_c} \quad (11)$$

式中  $I_{c0} = 0.6aH_{10} \cos \alpha f_1(b/a)$  (12)

$$\tau_c = \mu_0 S a f_2(b/a) / 10 \quad (13)$$

其中 $S$ ——薄板短、长边的长度; $H_{10}$ ——作用于薄板的一次场的幅值; $\alpha$ ——一次场与薄板法线间的夹角。

$f_1(b/a)$ 、 $f_2(b/a)$ 与 $b/a$ 的变化关系如图5所示。

取 $a=600\text{m}$ , $h=600\text{m}$ ,薄板的电导 $S=12.5\text{S}$ ,其它参数与模拟实验所用的相同,从图5查得 $f_1(b/a)=1$ , $f_2(b/a)=1$ 。则

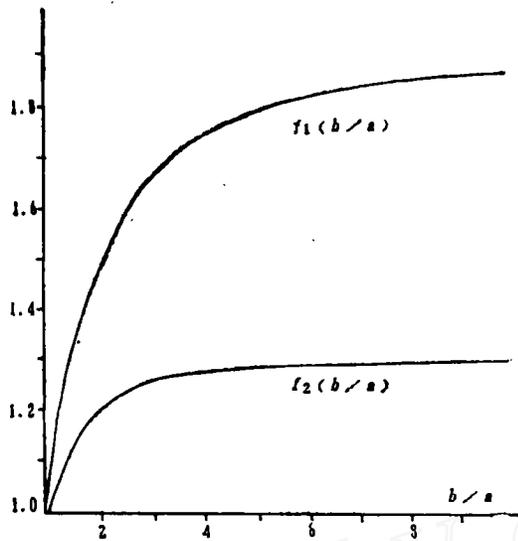


图 5  $f(b/a)$  随  $b/a$  的变化图

由公式 (13) 求得

$$\begin{aligned} \tau_c &= 4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 12.5 \times 600 \\ &\quad \times \frac{1}{10} \times 10^3 = 0.94(\text{ms}) \end{aligned}$$

与前表中电导为 12.5S 的斜板模拟曲线的时间常数 1 (ms) 很接近。说明加拿大学者计算  $\tau_c$  的方法是正确的, 将其代入 (11) 式, 并考虑公式 (12), 则

### An Approximate Formula for Calculating EM Transient Response of a Conducting Sheet-like Body

Zhang Suiquan

Most of the ore-bodies occurred below the earth surface are of sheet-like shape. The formula for calculating their electromagnetic transient response is very complicated. For this reason to derive an approximate formula used for this purpose will be practically significant to anomaly interpretations.

$$\begin{aligned} I_c(t) &= 0.6 \times 600 H_{10} \cos \alpha_c e^{-t/\tau_c} \\ &= 360 H_{10} \cos \alpha_c e^{-t/\tau_c} \end{aligned} \quad (14)$$

如将上述模拟实验参数代入我们推导的公式 (2), 并考虑  $L_c = (2l/300) \cdot 10^{-3} \text{H}$ , 则有

$$\begin{aligned} I_c(t) &= \frac{4 \times 3.14 \times 600 \times 600 \times 10^{-1} H_{10} \cos \alpha_c}{(600/300) \cdot 10^{-3}} \\ &\quad \cdot e^{-t/\tau_c} \\ &= 226 H_{10} \cos \alpha_c \cdot e^{-t/\tau_c} \end{aligned} \quad (15)$$

对比 (14)、(15) 两式可见, 我们研究计算所用电流强度的幅值是加拿大学者所用电流幅值的  $\frac{2}{3}$ ; 我们的等效电流回路是围绕整个矿体的边缘, 而加拿大学者所研究的回路只占 70% (约  $\frac{2}{3}$ ) 的矿体面积。由于二次场与等效电流回路的面积及其中的电流成正比, 他们计算出的二次场与用我们所推导公式计算的二次场实质上是相等的, 从而也证明了我们推导的公式是有它的实用性。

#### 参 考 文 献

- [ 1 ] 卡麦涅茨基, Ф. М. 编(李立等译), 《金属矿物探过渡过程法指南》, 地质出版社, 1980.
- [ 2 ] 中南矿冶学院物探教研室, 《金属矿电法勘探》, 冶金工业出版社, 1980.
- [ 3 ] McNeill, J. D., Geonics Limited Technical Note, TNT, 1980.