

吨—品位关系及其应用

陈伯茂

(成都地质学院)

吨—品位关系对矿产资源评价、矿床勘查、采矿规划及资源决策都有着实际意义,本文介绍矿床吨—品位模式在矿床成因分类和资源远景规划中的应用。

关键词: 拉斯基定律;马特隆;吨—品位曲线;矿床吨—品位模式



数学地质

矿产资源的评价对矿产勘查、经济计划、制订贸易限制政策、矿产储备及国土利用都有着极其重要的意义,它受到国内外矿床经济学家的关心和重视,并不断地探索一些行之有效的新的方法。30多年前,美国地质调查所地质学家 Samuel G Lasky 本着多学科综合研究的需要,认为自然科学中所利用的数学表达原理,可以推广到矿产资源预测的领域,并发现许多由贫至富渐变过渡的矿床中,矿体的累积吨位及其平均品位之间呈一种稳定的数学关系,它可作为预测尚未发现的矿床的储量吨位及其相应平均品位的依据。拉斯基假定,矿产的累积吨位及其平均品位之间的关系是属于数学上的指数性质(The exponential nature)。他并指出一个矿床中矿石块段的累积吨位和平均品位间构成的关系式为:

$$G = a + b \cdot \log T_0$$

式中 T_0 ——已生产矿量和估计储量的吨位;
 G ——与这些吨位相应的加权平均品位;
 a, b ——根据每个矿床所确定的常数。

这就是拉斯基方程式(Lasky's Equation)(图1)。在应用时需要一定数量的矿块、矿床或矿石体积的信息,每个矿石体积具有相应的吨位和平均品位(对未采矿石体积,其值是估计的)。这些体积的矿石吨位按其平均品位递降的次序相加,当每个连续的吨位被加到累积吨位上,累积吨位相应的

平均品位由累积金属量除以累积矿石量计算得到。例如有68块等大的矿块,每块铜矿石量为25000 t,矿块的平均品位分别为0.2%, 0.4%, 0.8% (假设数目)(图2)。其累积吨位及其平均品位值见

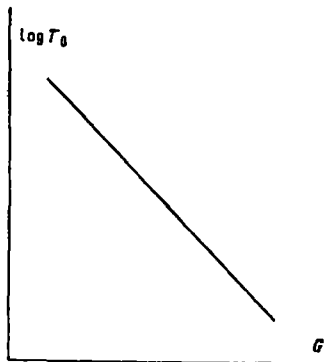


图1 拉斯基累积吨位—平均品位的关系

T_0 —矿石累积吨位; G —累积吨位的平均品位

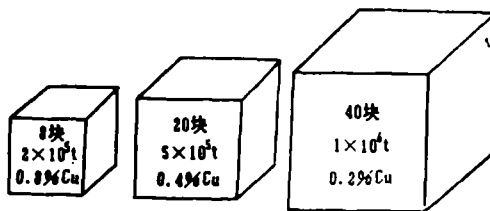


图2 按金属品位分组的68块矿石矿块
(每块为25000t)

表1, 拉斯基方程使累积矿石吨位与累积吨位的平均品位建立关系。当这些点分别绘在半对数坐标纸

上, 可拟合为1条直线(图2), 也可用3点线性回归得到拉斯基方程式:

$$G = 3.49 - 0.51 \log T_0$$

式中 G ——累积吨位的平均品位;

T_0 ——累积吨位, 当最小平均品位 $G_0 = 0.22\%$ 时, $T_0 = 2.74 \times 10^6 t$ 。

这里由大于或等于所加最后矿块品位的矿块计算的累积矿石吨位, 在半对数坐标纸上拟合度是高的, 因为它们受高的正相关系数 ($R^2 = 0.9994$) 影响。

68块矿块累积吨位和平均品位 表 1

平均矿块 品位 (%Cu) (1)	矿石吨位 (10 ³ t) (2)	金属吨位 (10 ³ t) (3) = (1) × (2)	累积矿石 吨位 (10 ³ t) (4)	累积金属 吨位 (10 ³ t) (5)	累积吨位 的平均品 位(%Cu) (6) = (5) ÷ (4)
0.8	200	1.6	200	1.6	0.8
0.4	500	2.0	700	3.6	0.51
0.2	1000	2.0	1700	5.6	0.33

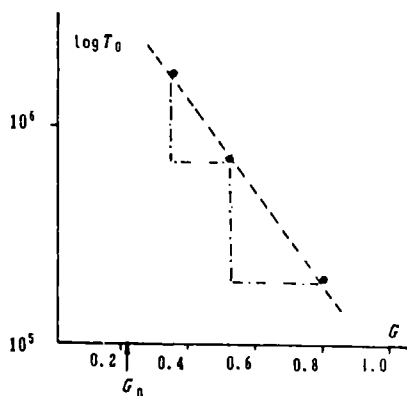


图 3 累积吨位及其平均品位相关图

法国学者 G. 马特隆教授称这个关系式为拉斯基律 (Lasky' Law)。拉斯基利用这种方法, 研究了美国的斑岩铜矿、阿拉斯加的金矿、亚利桑那的锰矿和安大略的镍矿, 并进行资源分析, 都取得了一定的效果。

随后, H. Deyoung, S. M. Cargill, P. A. Musgrove 以及 D. A. Singer 等都分别研究过拉斯基律的数学模型, 引出不少变种, 但都基本上相似。

G. 马特隆教授 (1959) 研究地质统计学理论之后, 指出拉斯基律存在一些局限性, 其它学者也相继提出该定律的不足之处。主要有以下几个问题:

1. 拉斯基计算的矿石累积吨位及其平均品位的关系式, 自然要受到不同矿产的边界品位 (Cut-off grade) 的影响。不同的边界品位直接影响着矿体形态、矿石储量及其平均品位。Lovering (1968, 1969) 曾警告过经济学家, 虽然拉斯基曲线近似于斑岩铜矿中吨—品位关系, 但它并不能反映高品位矿石 ($>1.5\%Cu$) 和很贫岩石的情况。他认为在矿产最低品位和地壳丰度之间存在着矿石吨位估计的空白。Donard A. Singer (1980) 曾利用 52 个科马提型镍矿的数据, 研究矿床平均品位和相应吨位的关系, 求出回归方程, 如果地壳的估计重量为 $10^{18}t$ (J. W. Brinck, 1971), 科马提型镍矿回归估计的地壳丰度与地壳的镍品位相当, 这是一种很好的尝试。

2. Musgrove (1971) 认为, 拉斯基律还与矿床成因模型有关。不同成因矿床的吨—品位曲线的斜率 (The slope) 和截距 (The intercept) 值是有差别的。甚至同一矿床, 不同方法开采也将会导致吨—品位曲线的差异。

3. 在计算矿石累积吨位的平均品位时, 拉斯基是采用不同等级矿石吨位加权求得的。这实质上承认吨位和品位是逐渐变化的原则。但是, 矿块或矿床的品位都存在着一种概率分布, 因此, 要求取更准确的累积矿石平均品位, 最好采用每种品位的概率加权。马特隆教授 (1959) 发现拉斯基方程适合于品位呈对数正态分布的情况。

4. G. 马特隆教授认为, 拉斯基律回避了矿块的承载问题。岩心样品的品位, 不同大小矿块的克里格估值是有较大差别的, 在采矿中作为可采矿量的选择依据是矿块品位, 而不是岩心样品品位。因此, 在研究吨—品位关系时, 必须考虑由于承载不同而产生对矿石可采率的影响。严格地说, 承载问题是由体积—方差关系引起的, 因为矿块估计值

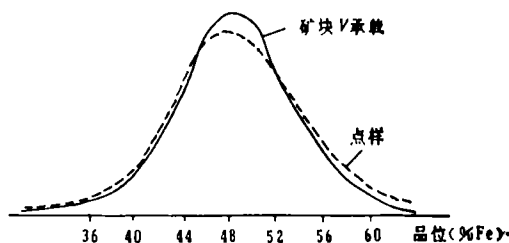


图 4 铁矿床中点样和矿块品位分布对比
(据 Clark, 1979)

不可能与岩心样品值有相同的方差。这就是地质统计学中所谓的“承载效应”。例如，某铁矿床已知岩心样品（可视为点承载）呈正态分布，平均品位48%Fe，标准差5%Fe。矿床结构模型为球状模型 $\alpha=400\text{ft}$ 。假设采矿矿块为 $100\times100\times50\text{ft}$ ，矿块品位同点样品位分布，均值皆为48%Fe，但标准差改变了（图4），按克里格关系式可知，矿块方差 $\sigma^2(V/G)=\sigma^2(0/G)-\sigma^2(0/V)=25-F\left(\frac{100}{400},$

$$\frac{100}{400}, \frac{50}{400}\right) \times 25 = 25 - 0.209 \times 25 = 19.775(\%)^2,$$

矿块标准差 $S_v = 4.45\% \text{Fe}$ 。如边界品位 $C = 44\% \text{Fe}$ ，

$$\text{则标准化 } Z = \frac{C - \bar{g}}{S} = \frac{44 - 48}{5} = -0.80, \text{查表 } \Phi(Z)$$

$= 0.212$ ，因此概率 $P = 0.788$ ，即矿床中大约有79%矿石品位大于边界品位44%Fe。这些矿石的平均品位有多大？如果正态分布，大于边界品位的矿石平均品位则可按下式计算：

$$\bar{g}_c = \bar{g} + \frac{S}{P} \Phi(Z)$$

式中 $\bar{g}_c$ ——大于边界品位 C 矿石的平均品位；

$\bar{g}$ ——矿体的平均品位，即48%Fe；

$\Phi(Z)$ ——标准正态曲线上在 Z 值的高，因 $Z =$

$$-0.80, \text{则 } \Phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) = 0.290.$$

所以， $\bar{g}_c = 48 + \frac{5}{0.788} \times 0.290 = 49.84\% \text{Fe}$ ，即大于边界44%Fe的矿石78.8%的平均品位为49.84%Fe。

如果考虑选择采矿单元 $100\times100\times50\text{ft}$ ，那么边界品位 $C = 44\% \text{Fe}$ ， $\bar{g} = 48\% \text{Fe}$ ，矿块标准差 $S_v = 4.45\% \text{Fe}$ ，则 $Z_v = \frac{C - \bar{g}}{S_v} = \frac{44 - 48}{4.45} = -0.899$ ，查表 $\Phi(Z_v) = 0.184$ ，概率 $P = 0.816$ ， $\Phi(Z_v) = 0.267$ ，而大于边界品位的矿石平均品位为 $\bar{g}_c = \bar{g} + \frac{S_v}{P}$ 。

$$\Phi(Z_v) = 48 + \frac{4.45}{0.816} \times 0.267 = 49.75\% \text{Fe}.$$

例点样的平均品位和矿块平均品位差别不显著，但它清楚表明，如果选择用 $100\times100\times50\text{ft}$ 矿块，开采吨位较点样的开采吨位更大，而品位更低。

对于对数正态分布情况也是类似的。例如一个

铅锌矿床，点样均值为12% (Pb+Zn)，标准差为8% (Pb+Zn)，变差曲线为球状模型 $Sph(\alpha=15, c=64)$ 。矿块 $(10\times10\times5\text{ft})$ 方差为 $64 - F\left(\frac{10}{15},$

$\frac{10}{15}, \frac{5}{15}\right) \times 64 = 64 - 33.034 = 30.966$ ，矿块标准差为5.56% (图5)。根据定义，如果变量呈对数正态分布，那么变量的对数值为正态分布。在任

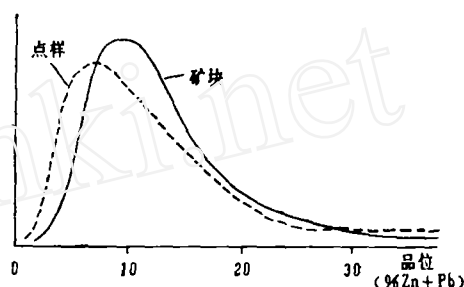


图5 铅锌矿中点样和矿块品位分布的对比

(据Clark, 1979)

何计算之前，需要先计算正态分布的均值和标准差， Y 为品位对数值，则

$$\text{方差 } S_y^2 = \ln\left(\frac{S^2}{\bar{g}^2} + 1\right)$$

$$\text{均值 } \bar{Y} = \ln \bar{g} - 0.5 S_y^2$$

然后变量标准化

$$Z = \frac{\ln C - \bar{Y}}{S_y}, \text{ } C \text{—边界品位,}$$

概率 $P = 1 - \Phi(Z)$ (即大于边界的矿石比例)

$$\text{平均品位 } \bar{g}_c = \frac{Q}{\beta} \bar{g}, \text{ } Q = 1 - \Phi(Z - S_y)$$

现以边界品位取4%，对于点样来说， $\bar{g} = 12$ ， $S = 8$ ， $\bar{Y} = 2.30$ ， $S_y = 0.61$ ，

$$Z = \frac{\ln C - \bar{Y}}{S_y} = \frac{1.39 - 2.30}{0.61} = -1.508$$

$$P = 1 - \Phi(-1.508) = 0.934, \text{ } Q = 1 - \Phi(-1.508 - 0.61) = 0.983, \text{ } \bar{g}_c = \frac{0.983}{0.934} \times 12 = 12.62\% (\text{Pb} + \text{Zn}).$$

也就是说，对于原始点样品数据，大于边界品位4% (Pb+Zn)的矿石量占总体的93.4%，其相应的平均品位为12.62%。考虑矿块 $10\times10\times5\text{ft}$ 实际情况， $\bar{g} = 12$ ， $S_y = 5.56$ ， $\bar{Y} = 2.39$ ， $S_y =$

0.44, $Z_v = \frac{1.39 - 2.39}{0.44} = -2.271$, $P = 1 - \Phi(-2.271) = 0.988$, $Q = 1 - \Phi(-2.271 - 0.44) = 0.997$, $\bar{g}_c = \frac{Q}{P} \bar{g} = \frac{0.997}{0.988} \times 12 = 12.10\% (\text{Pb} + \text{Zn})$ 。可见, 矿块 ($10 \times 10 \times 5 \text{ft}$) 比点样的吨位要大, 而其平均品位却要低。

同理, 可按边界品位 4%, 6%, 8% 和 10% 分别计算点样和矿块不同承载的矿石比例及其相应平均品位 (表 2)。按照表 2 可以作出相应的吨—品位曲线 (图 6)。从图中可看出, 吨—品位之间与边界品位、承载大小都有着密切关系。

不同边界品位计算不同承载的矿石比例及相应平均品位 表 2

边界品位 %(Pb + Zn)	点 样		矿块 ($10 \times 10 \times 5 \text{ft}$)	
	大于边界的 矿石比例	平均品位 %(Pb + Zn)	大于边界的 矿石比例	平均品位 %(Pb + Zn)
4	0.934	12.62	0.988	12.10
6	0.816	13.90	0.912	12.68
8	0.643	15.58	0.758	13.82
10	0.499	17.98	0.576	15.34

5. 拉斯基律还要受信息水平的影响。众所周知, 采矿矿块的选择是取决于矿块的品位, 如果矿块品位大于边界品位 (我国采用最低工业品位), 该矿块可送至选厂, 否则倒入废矿场。矿块的实际平均品位 Z_v 是无法知道的, 这种采矿矿块选择主要依据由周围样品信息进行克里格法的矿块估计值

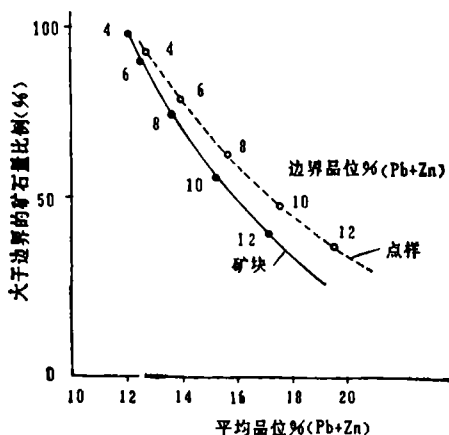


图 6 铅锌矿床的吨—品位曲线

Z_v^* 而决策的。由于克里格法具有光滑效应, 矿块估计值 Z_v^* 的离散方差要比矿块实际品位 Z_v 的离散方差要小 (图 7), 这自然会影响吨—品位曲线的准确性。这种现象在地质统计学中被称为“信息效应”。此外, 利用矿块周围样品信息的多少, 即取样质量, 也可对吨—品位曲线产生影响。法国学者

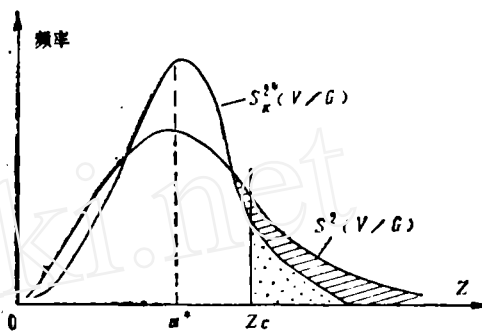


图 7 矿块实际品位和估计品位的分布

(据 A.G. Journel, 1978)

KAVOURINOS (1987) 曾研究过法国 Malines 铅锌很多金属矿床的取样质量。在 $5 \text{m} \times 3 \text{m}$ 采矿矿块上, 选用 1 个、4 个和 12 个爆破孔分别对矿块进行克里格估值, 与开采的实际品位作对比, 绘制了矿石量—金属量曲线 (图 8), 并计算回收总矿量占 40% 时的金属损失率 (表 3)。显而易见, 如果不考虑与采矿方法有关的混合、贫化和损失因素, 这种金属损失直接与取样的质量和数量有关, 而且金属损失率随爆破孔增加而降低。

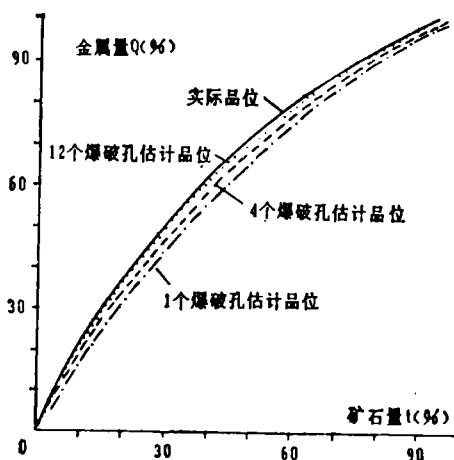


图 8 法国 Malines 锌矿石量—金属量曲线

G·马特隆教授利用矿块克里格估值作出吨—

回收总矿量占40%时不同信息水平
的金属损失率

表 3

不同信息水平 平均品位	爆破孔数目		
	1	2	12
估计平均品位	5.11	5.41	5.55
开采平均品位	5.62	5.62	5.62
损失金属率 (%)	9.07	3.73	1.22

品位曲线，用线性内插求得任一边界品位的矿石量，这对矿产资源的动态评价是极其方便的。其具体绘制的步骤为：

——根据克里格法原理，用现有原始数据，估计每个矿块的平均品位 X_i 和估计方差 σ_k^2 ；

——计算每个矿块的矿石量 $T_i = V_i \cdot D_i$ (D_i —矿石体重， V_i —矿块体积)；

——计算每个矿块的金属量 $Q_i = T_i \cdot X_i$ ；

——按矿块估计品位 X_i 大小排成递降有序数列及其相应的金属储量数列，并计算每项累积金属储量；

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & < & X_2 & < & X_3 & \dots < & X_n \\ Q_1 & & Q_2 & & Q_3 & \dots & Q_n \\ \sum_{i=1}^n Q_i & & \sum_{i=2}^n Q_i & & \sum_{i=3}^n Q_i & \dots & Q_n \end{array}$$

——绘制吨—品位曲线，X轴为品位轴，单位(%)，Y轴为金属量吨数轴，单位(t)或用%表示(图9)；

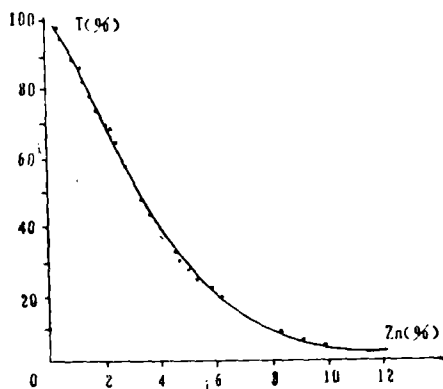


图 9 法国 Malines 锌矿吨—品位曲线

(据 Ch. Kavourinos, 1987)

——在吨—品位曲线上，可以内插出某1个边界品位相应的吨数，也可计算出平均品位。取95%

的概率，根据克里格方差 σ_k^2 ，可求出品位 $t_i \pm 1.96 \sigma_k$ 的置信区间(图10)；

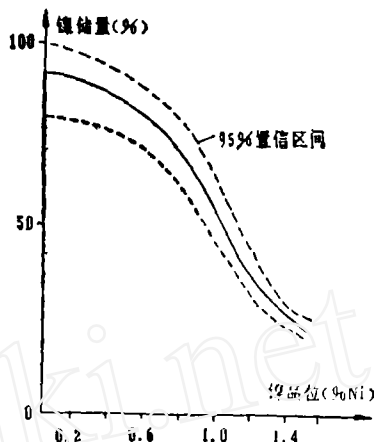


图 10 普罗尼镍矿吨—品位曲线
及其置信区间

(据 A.G. Journel)

——吨—品位曲线是矿块承载大小的函数，一定承载的矿块都有各自的特殊曲线(图11)；

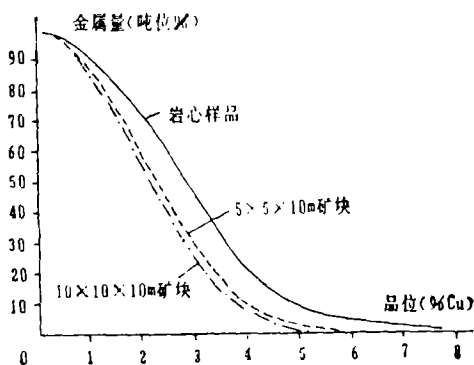


图 11 智利铜矿不同承载的吨—
品位曲线

(据 R.C. Castro 资料整理, 1983)

——经济标志分析

研究矿床的开发利用必然要进行矿床的经济标志分析。上述吨—品位曲线仅是依据矿块克里格估值绘制的，它并没有考虑到矿床的经济技术条件。矿床规模是矿床地质的重要参数，对决定矿床的经济价值具有重要意义，它决定着未来矿山企业的生产规模、投资额、生产机械化程度和生产年限。而矿石边界品位又是矿山经营参数的重要指标之一，

边界品位高低影响着矿床储量大小及其平均品位。矿床储量多大才可以被开采？边界品位多高才称为矿床？这些问题都直接与当前经济技术条件有密切关系。所谓矿床的规模和品位组合的下限，就是在不同经济条件下可经营企业的最低要求，也可看作为矿产能否开采利用的界限。对于具体矿产，确定边界品位方法很多，而且具体标准也不一样，但通常可根据国家经济状况和在生产成本最低、回收方法最好条件下尾矿品位来制订的。矿石量最小吨数也是根据国家经济技术条件、市场需求和价格高低而定。P. D. Toens (1980) 曾认为，为了统一研究世界资源量，确定一个可经营企业的吨一品位组合的最低要求是必要的。对于铀矿资源他还提出品位 50g/t，矿石量 50 万 t 作为当时可经营企业的界线，也就是说，只要品位小于 50g/t，矿石量低于 50 万 t 的任何铀矿床都不宜开采利用。而且，吨一品位曲线还受市场价格的影响，国际上矿产资源分级也根据开发收益的经济状况来划分，如 15 美元/磅 U_3O_8 就可作为经济资源（储量）与亚经济资源的界线。为此，在获取一定总利润条件下，根据不同市场价格又可绘制出吨一品位曲线族（图 12）。它表示矿床在开采期内有 5000 万美元总利润条件

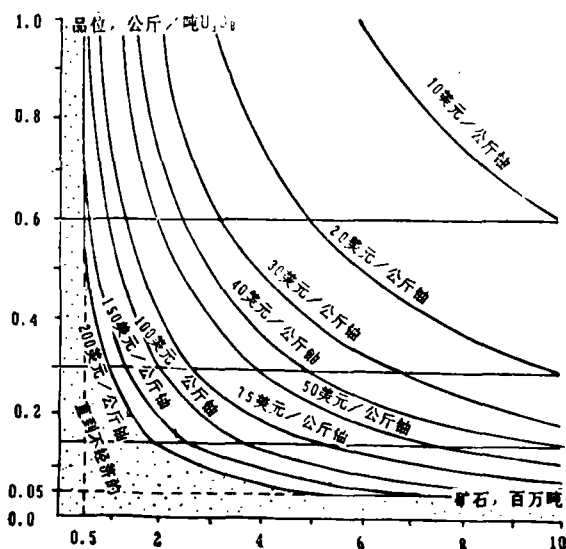


图 12 不同价格等级吨一品位曲线族
(据 P. D. Toens, 1980)

下，按美元/kg 铀各种价格等级的吨一品位曲线。

吨一品位曲线还随各种价格等级的吨一品位限制值和总收入额而变化，如果同时考虑这些因素，就可绘制出综合反映各种限制值及其组合的三维藕头状图形（图 13）。图中表明矿石储量与品位的要求是随总收入额逐步上升而增加，这对于确定划分铀资源等级的标准是有益的。

经济利润函数是与矿石量和品位有关，并是一个线性模型。可用以下公式计算：

$$P = T(g_m \cdot V - C)$$

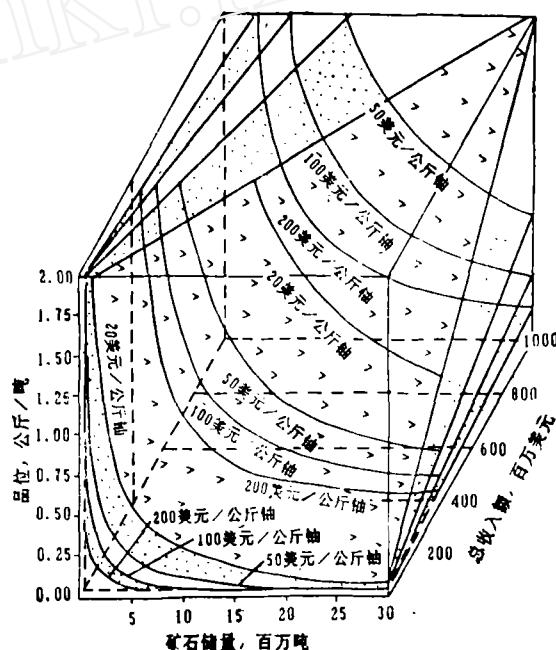


图 13 不同价格等级吨一品位与总收入额关系
(据 P. D. Toens, 1980)

- 式中 P —— 获取的总利润；
 T —— 开采块段的总矿石量 (t)；
 g_m —— 与总矿石量相应的平均品位 (%)
 V —— 1t 矿产品经回收率校正后的出售价格；
 C —— 1t 矿石的开采、加工成本。

矿床吨位和品位不仅表征矿床矿化规模、矿化强度和进行矿床储量计算的主要参数，而且也是矿床本身的重要地质特征。有些学者在研究世界不同成因类型矿床的吨一品位关系时，发现矿床的成因

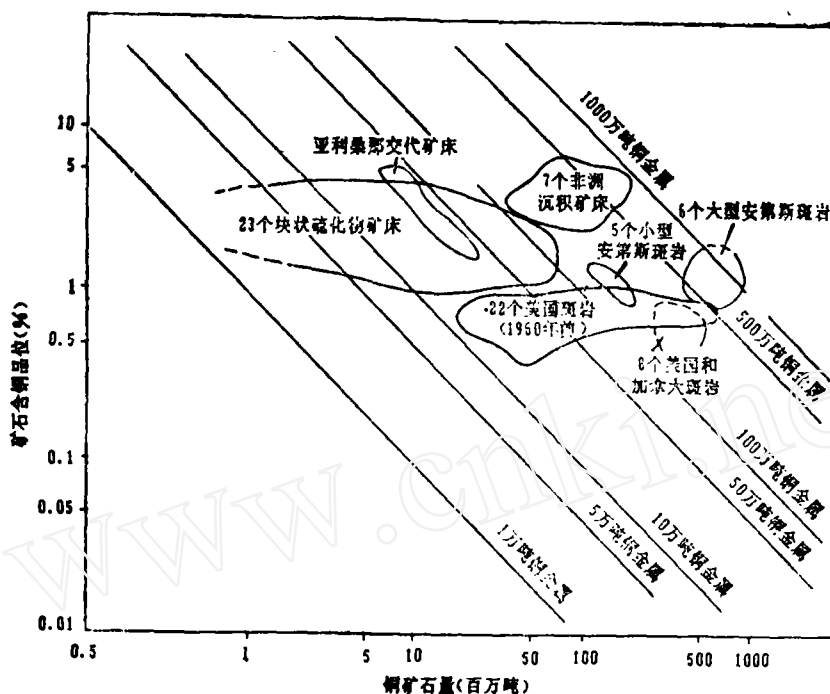


图 14 世界铜矿床吨—品位模式

(由A.R.Kinkel, Jr 和 Peters等汇集, 1970)

类型不同, 其矿化强度、矿床规模也有所差别, 因而提出矿床吨—品位模式(Mineral deposit grade-tonnage models)概念。所谓吨—品位模式是从地质统计学观点出发, 阐明矿床规模(矿石量或金属量)、矿石品位和矿床类型三者的联系, 表示某区域或某矿种中各类型矿床的工业价值, 从而可以用于检验和改进矿床的成因分类, 预测可能存在的矿床, 这对选定区域找矿、勘查决策、国土规划、长远资源估计以及矿床评价提供重要的信息。这种吨—品位模式通常以品位为纵坐标, 矿石量吨数为横坐标, 金属量吨数为斜坐标, 将不同成因类型矿床, 以不同符号表示在直角坐标图上(图14), 并

可显示出各自的聚类特征。世界上铜矿床的主要成因类型有: 斑岩型、沉积型、块状硫化物型和交代型, 它们约占世界铜矿总储量的96%。图上清楚反映出这些类型吨—品位模型的主要特征: 斑岩铜矿具有储量大、品位低的特点, 铜矿石量可达几亿t, 而铜品位常小于1%; 块状硫化物矿床具有吨数小、品位中等的特点; 沉积铜矿具有吨数中、大型, 品位高的特点; 交代型铜矿具有吨数中、小型, 品位高的特点。当前世界铜的需求量俱增, 而铜资源保证程度又相当低, 富矿日益减少, 在铜资源紧缺形势下, 改变铜的供求关系, 勘查和开采储量极大的斑岩铜矿仍然显得日益重要。

Grade-Tonnage Relation and Its Application in Ore-reserves Calculation

Chen Baimao

The grade-tonnage relation has a practical significance in mineral resources evaluation, ore-deposit prospecting, mining planning and resources decision. Applications of the grade-tonnage relation pattern in genetic classification of mineral deposits and long range resources planning are discussed.