

## 利用复变函数的奇异性计算

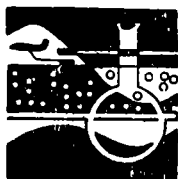
## 鞍山式铁矿体的产状

李 回 挺

(冶金工业部东北地质勘查局)

本文是利用复变函数(复磁场)在二度磁性体内的奇异性,用奇点法计算鞍山式铁矿体的产状,获得了准确的结果。通过两个典型实例,与钻探结果对比,误差都在10%之内。

**关键词** 复磁场;奇异性;奇点



## 方法原理

众所周知,当磁性体为二度体时,磁势 $U$ 、磁场分量 $H$ 、 $Z$ 都满足拉普拉斯方程,即

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式可求得

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial Z}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \end{cases} \quad (4)$$

(4)式称为哥西—黎曼条件,满足该条件的函数为解析函数。

由实部水平分量 $H$ 和虚部垂直分量 $Z$ 构成的复磁场 $W = H - iZ$ 是满足哥西—黎曼条件的。因此,复磁场是解析函数。

有关几种板状体的复磁场表达式:

## 1. 斜磁化无限延深薄板状体

$$H = -2m \frac{x \cos \gamma + h \sin \gamma}{x^2 + h^2}$$

$$Z = 2m \frac{h \cos \gamma + x \sin \gamma}{x^2 + h^2}$$

其复磁场表达式为

$$W = H - iZ = -2me^{-i\gamma} \frac{1}{\tau - \tau_1} \quad (5)$$

$\tau = x + ih$ ——复变量; $\tau_1 = x_1 + ih_1$ ——薄板状体的顶端坐标; $\gamma$ ——板状体倾斜面与磁化场夹角; $m = 2bJ \sin \alpha$ ——单位长度上的磁荷量。

## 2. 顺层磁化无限延深薄板状体

$$H = -2m \frac{x}{x^2 + h^2}$$

$$Z = 2m \frac{h}{x^2 + h^2}$$

$$W = H - iZ = -2m \frac{1}{\tau - \tau_1} \quad (6)$$

## 3. 斜磁化有限延深薄板状体复磁场表

达式

$$W = H - iZ$$

$$= -2me^{-i\gamma} \left( \frac{1}{\tau - \tau_1} - \frac{1}{\tau - \tau_2} \right) \quad (7)$$

式中,  $\tau_1 = x_1 + ih$ ——薄板状体上端坐标;  
 $\tau_2 = x_2 + ih_2$ ——薄板状体下端坐标。

#### 4. 斜磁化无限延深厚板状体复磁场表达式

$$W = H - iZ = -2Je^{-i\gamma} \sin\alpha \cdot \ln \left( \frac{1}{\tau - \tau_1} - \frac{1}{\tau - \tau_2} \right) \quad (8)$$

式中,  $\tau_1, \tau_2$ ——厚板状体顶面角点坐标;  
 $J$ ——板状体的磁化强度。

以上(5)、(6)、(7)、(8)式为板状体复磁场表达式, 它们满足哥西-黎曼条件, 均为解析函数。但是从上述公式中可以看到, 无限延深薄板状体的顶点、有限延深薄板状体的上端点及下端点, 是复磁场的不解析点, 即奇点; 无限延深厚板状体顶面的两个角点是复磁场的对数奇点, 或者说是该复函数一阶偏导数的奇点。

鞍山式铁矿体一般具有层位稳定、延伸长、延深大、呈板状体的特点, 并具有强磁性。当矿体埋藏较浅时, 它产生的异常呈明显的带状分布, 如东、西鞍山磁异常、张家湾磁异常、谷首峪磁异常等, 为典型的二度体异常。但当矿体埋深较大、走向长度相对于埋深是有限的, 地表测得的异常往往是椭圆形的。鞍本地区此类异常很多, 如红山岭磁异常、李三台磁异常、张台子磁异常等, 为典型的三度体异常。对于三度体异常, 可用叠加法或平均场法将三度问题转换为二度问题。因此, 鞍山式铁矿体磁异常一般可归结为二度体问题。

对于鞍山式铁矿体二度体异常, 复磁场在其体外解析, 但在其体内是一个奇性的函数, 这种性质称为奇异性。其矿体的端点和角点是复磁场解析函数的奇点。

本文就是利用复变函数的奇异性求解二度

磁性体的奇点, 以准确地计算鞍山式铁矿体的埋深、厚度等产状。

在求解奇点时, 若直接应用上述公式比较复杂, 应对复磁场  $W$  或其偏导数  $\frac{\partial W}{\partial x}$  作倒

数变换, 使得求奇点变成求方程  $\frac{1}{W} = 0$  或

$\frac{1}{\frac{\partial W}{\partial x}} = 0$  的根。该方程是一个多项式。因此,

求奇点就可归结为根据地面观测的  $\Delta Z$  (或  $\Delta H$ ) 求多项式的系数, 然后解代数方程的根。

在野外, 通常只测  $\Delta Z$ , 要把  $\Delta Z$  曲线转换为  $\Delta H$ 。

对计算的剖面, 最好事先用其他方法粗略地计算  $2b$  和  $h$ , 若  $\frac{2b}{h} > 1$ , 视为厚板状体; 若  $\frac{2b}{h} < 1$ , 视为薄板状体。分别采用其复磁场公式计算。

## 应用实例

### 1. 西鞍山磁异常第36线剖面计算结果

西鞍山磁异常是东、西鞍山磁异常的西半部, 整个东、西鞍山磁异常呈北西走向, 2000 $\gamma$ 的等值线闭合圈长达8000m, 宽1000m, 即异常长与宽之比为8:1。东鞍山异常对应的是正在露天开采的巨型鞍山式铁矿床。西鞍山异常反映的是西鞍山铁矿床, 矿体向西侧伏, 埋深逐渐加大, 整个异常明显地呈二度体特征(图1)。

异常的北侧出现负磁场, 最大-500 $\gamma$ 。该负场位于东、西鞍山与四方台异常之间, 负值中心部位是宁远屯一双楼台大断裂通过之处, 因此认为该负异常主要由构造形成。

第36线剖面位于西鞍山磁异常西段侧伏部位,  $\Delta Z$  正异常值最高3200 $\gamma$ , 南侧趋向

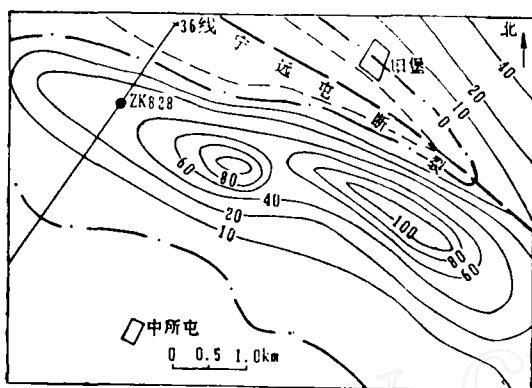


图 1 东鞍山  $\Delta Z$  异常图  
(等值线单位: 100nT)

正常场, 北侧负值为  $-500\gamma$  (图2)。

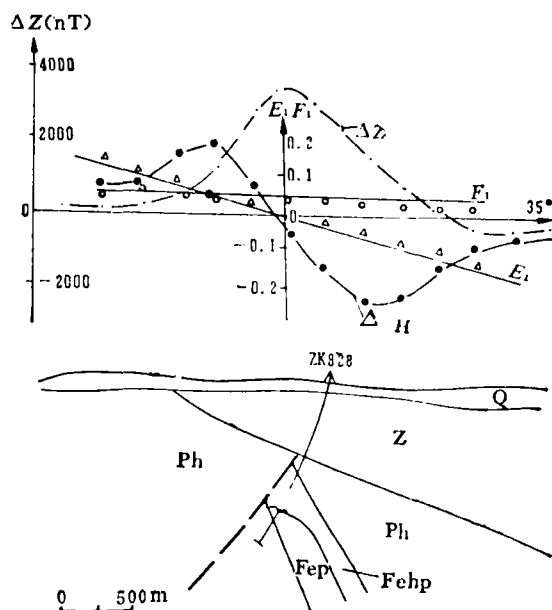


图 2 36线奇点法计算及钻探结果

Q—第四系; Z—震旦系; Ph—辽河群; FeP—  
磁铁贫矿; Fehp—假象赤铁矿

根据上述资料分析, 36线  $\Delta Z$  曲线正值部分的两侧基本对称。北侧的负值主要是断裂引起的。另外, 由于鞍山式铁矿是条带状磁铁矿石岩, 垂直条带方向比平行条带方向消磁作用大得多, 使矿体有效磁化场方向近于矿体倾斜面。同时, 用切线法粗略计算矿

体的  $\frac{2b}{h} < 1$ , 即矿体截面相对于埋深属薄板状体。

因此, 36线剖面适合于无限延深顺层磁化的薄板状体复磁场公式计算:

$$\begin{aligned} W = H - iZ &= -2m \frac{x}{x^2 + h^2} \\ &- i2m \frac{h}{x^2 + h^2} \\ &= -2m \frac{1}{x - ih} \dots\dots \end{aligned}$$

作倒数变换:

$$\frac{1}{H - iZ} = \frac{x - ih}{-2m}, \text{ 即}$$

$$\begin{aligned} \frac{H}{H^2 + Z^2} + i \frac{Z}{H^2 + Z^2} \\ = \frac{x}{-2m} + i \frac{h}{2m} \end{aligned}$$

$$\text{令 } E_1 = \frac{H}{H^2 + Z^2}, F_1 = \frac{Z}{H^2 + Z^2}$$

$$\text{则 } E_1 + iF_1 = -\frac{x}{2m} + i \frac{h}{2m}$$

$$E_1 = -\frac{x}{2m}, F_1 = \frac{h}{2m}$$

可见,  $E_1$  方程代表的是一条通过  $x$  轴零点的直线,  $F_1$  方程代表的是一条与  $x$  轴平行的直线, 截距为  $\frac{h}{2m}$ 。

在求解过程中, 把  $\Delta Z$  曲线先换算成  $\Delta H$  曲线, 然后逐点求出  $E_1$  值和  $F_1$  值, 并作出  $E_1$  和  $F_1$  两条直线。当两条直线相交时, 其交点坐标  $x$  值为矿体的埋深  $h$ 。因为,

$$\text{当 } E_1 = F_1 \text{ 时, } h = -x。$$

从 36 线剖面  $E_1$  和  $F_1$  直线相交点  $x$  坐标, 算得  $x = -450\text{m}$ , 即  $h = 450\text{m}$ 。则应用复磁场求解出 36 线矿体埋深 450m。

该剖面经 ZK828 孔钻探结果, 于 170m 处见假象赤铁矿, 无磁性。在 485m 处见磁

铁贫矿。异常是由磁铁贫矿引起的，计算的矿体埋深与实际见矿深度差35m，误差仅7.4%（见图2）。

## 2. 红山岭磁异常横向平均场剖面计算结果

红山岭磁异常位于本溪桥头以东10km。该异常呈椭圆形，走向NE83°。2000 $\gamma$ 等值线的长轴3000m，短轴2400m，长轴与短轴之比为1.25，显然属于三度体异常。异常最大值4800 $\gamma$ ，异常北侧出现-200 $\gamma$ 的负值，它是磁性体向北斜磁化的结果。负值相对于正值这么小，说明磁性体向下延深很大，且 $\gamma$ 角很小。异常的另一个特点是曲线圆滑，磁场梯度变化缓，说明磁性体埋深大（图3）。

异常区内，地表出露地层全是震旦纪石英岩。

由于该异常属三度体，求解之前必需先把三度问题转换为二度问题。采用平均场法求横向平均场作为计算剖面，剖面上各点 $\Delta Z$ 值由下式来确定：

$$\Delta Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta Z_i$$

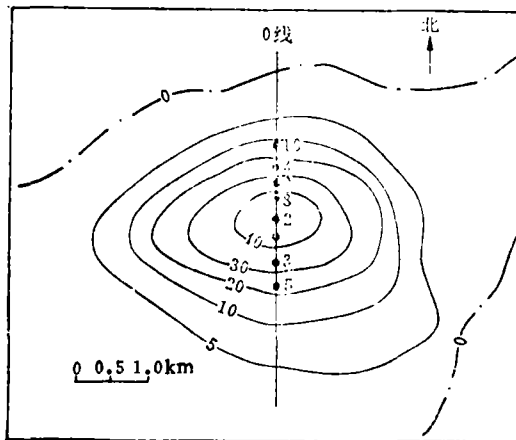


图3 红山岭 $\Delta Z$ 异常图  
(等值线单位: 100nT)

然后露 $\Delta Z$ 曲线再转换为 $\Delta H$ 曲线，并用

切线法粗略计算 $2b$ 和 $h$ ，得 $\frac{2b}{h} > 1$ 。因此，

该异常可视为厚板状体异常。它适合于斜磁化无限延深厚板状体复磁场公式求解。其公式：

$$W = H - iZ = -2J \sin \alpha e^{-i\gamma}$$

$$\cdot \ln \frac{\tau - \tau_1}{\tau - \tau_2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} - i \frac{\partial Z}{\partial x} = -2J \sin \alpha$$

$$\cdot e^{-i\gamma} \left( \frac{1}{\tau - \tau_1} - \frac{1}{\tau - \tau_2} \right) \quad (9)$$

对 $\Delta H$ 、 $\Delta Z$ 曲线作 $x$ 的微商曲线 $\frac{\partial Z}{\partial x}$ 和

$\frac{\partial H}{\partial x}$ ，并把(9)式作倒数变换，得：

$$\frac{1}{\frac{\partial W}{\partial x}} = \frac{1}{\frac{\partial H}{\partial x} - i \frac{\partial Z}{\partial x}}$$

$$= \frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2} + i$$

$$\cdot \frac{\frac{\partial Z}{\partial x}}{\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2}$$

$$= - \frac{e^{i\gamma}}{2J \sin \alpha (\tau_1 - \tau_2)} (\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)$$

$$\text{令 } E_2 = \frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2} \quad (10)$$

$$F_2 = \frac{\frac{\partial Z}{\partial x}}{\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2} \quad (11)$$

$$c_2 = - \frac{e^{i\gamma}}{2J \sin \alpha (\tau_1 - \tau_2)}$$

$$\begin{aligned}
&= a_2 + ib \\
c_1 &= -\frac{e^{i\gamma(\tau_1 + \tau_2)}}{2J\sin\alpha(\tau_1 - \tau_2)} \\
&= a_1 + ib_1 \\
c_0 &= -\frac{e^{i\gamma\tau_1 \cdot \tau_2}}{2J\sin\alpha(\tau_1 - \tau_2)} \\
&= a_0 + ib_0
\end{aligned}$$

$$\text{则 } E_2 + iF_2 = c_2\tau^2 + c_1\tau + c_0 \quad (12)$$

由于计算点在地表, 复变量  $\tau = x$ , 此时

$$\begin{aligned}
E_2 + iF_2 &= c_2x^2 + c_1x + c_0 \\
&= (a_2x^2 + a_1x + a_0) \\
&\quad + i(b_2x^2 + b_1x + b_0)
\end{aligned}$$

$$\text{即 } E_2 = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$F_2 = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

可见,  $E_2$ 、 $F_2$  是两条抛物线, 可由 (10) 式、(11) 式根据  $\Delta H$ 、 $\Delta Z$  的微商曲线求其值并作出图形 (图4)。

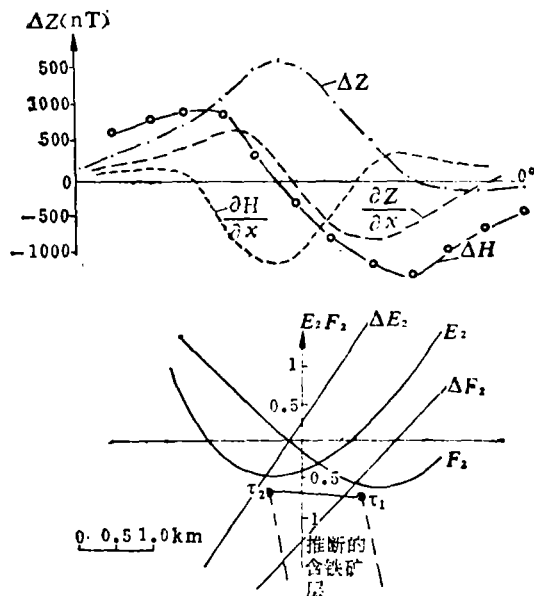


图4 横向平均场奇点计算图

这样, 系数  $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b_0$ 、 $b_1$ 、 $b_2$  便可用作图法求得。

当  $x=0$  时,  $E_2$ 、 $F_2$  抛物线截距分别为

$$a_0 = -0.47, \quad b_0 = 0.195.$$

为求其余4个系数, 对  $E_2$ 、 $F_2$  曲线一阶差分, 取适当步长  $l$ , 此处  $l=7$  单位, 得增量函数  $\Delta E_2$ 、 $\Delta F_2$ 。

$$\begin{aligned}
\Delta E_2 &= E_2(x+l, 0) - E_2(x-l, 0) \\
&= [a_2(x+l)^2 + a_1(x+l) + a_0] - [a_2(x-l)^2 + a_1(x-l) + a_0] \\
&= 4la_2x + 2la_1 \\
&= 28a_2x + 14a_1
\end{aligned}$$

$$\text{同理, } \Delta F_2 = 28b_2x + 14b_1$$

可见, 经一阶差分后,  $\Delta E_2$ 、 $\Delta F_2$  是两条直线方程。由它们可求得  $\Delta E_2$  的截距为 0.305, 斜率为 0.173;  $\Delta F_2$  的截距为 -1.30, 斜率为 0.101。从而求得:

$$a_1 = \frac{0.305}{14} = 0.0218,$$

$$a_2 = \frac{0.173}{28} = 0.0062,$$

$$b_1 = \frac{-1.30}{14} = -0.0928,$$

$$b_2 = \frac{0.101}{28} = 0.0031$$

令 (12) 式等于零, 把系数  $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b_0$ 、 $b_1$ 、 $b_2$  值代入方程中, 求其根:

$$c_2\tau^2 + c_1\tau + c_0 = 0$$

$$\tau_{1,2} = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2c_0}}{2c_2}$$

$$= \frac{-(a_1 + ib_1)}{2(a_2 + ib_2)}$$

$$\pm \frac{\sqrt{(a_1 + ib_1)^2 - 4(a_2 + ib_2)(a_0 + ib_0)}}{2(a_2 + ib_2)}$$

(13)

将 (13) 式换元变换, 并分解虚部和实部, 便可求得  $\tau_1$ 、 $\tau_2$ 。

$$\tau_1 = 789.0 + i783.2,$$

$$\tau_2 = -400 + i489.3$$

则磁性体顶面两角点坐标为:

$$\tau_1 \begin{cases} x_1 = 789.0 \text{ m} \\ h_1 = 786.2 \text{ m} \end{cases}$$

$$\tau_2 \begin{cases} x_2 = -400 \text{ m} \\ h_2 = 489.3 \text{ m} \end{cases}$$

即求得厚板状矿体视厚度 (含矿层厚度)  $2b = x_1 - x_2 = 1189 \text{ m}$ ; 矿体的平均埋深  $h = \frac{h_1 + h_2}{2} = 638 \text{ m}$ ; 矿体顶面斜度为  $\beta =$

$$\text{tg}^{-1} \frac{h_2 - h_1}{x_1 - x_2} = 14^\circ \text{ (见图4)}.$$

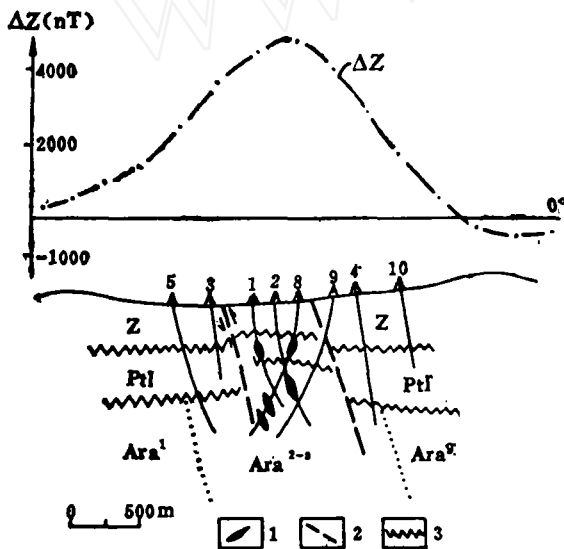


图 5 红山岭0线钻探验证结果

Z—震旦纪石英岩; Ptl—辽河群; Ara¹—鞍山群底层; Ara²-³—鞍山群含铁石英岩层; Ara⁴—鞍山群顶板; 1—赤铁矿; 2—推断断层; 3—不整合面

红山岭磁异常是1964年发现的, 1971年钻孔验证, 在中心剖面施工 8 个孔, 证实异常是由一套沉积变质作用形成的含镁铁的碳酸盐型鞍山式铁矿引起的。异常中心部位的 1、2、8号孔, 在400多m深见到鞍山群含矿岩系, 主要是细条带状赤铁富矿, 弱磁性。从600~800m深才见到磁铁石英岩, 异常是由磁铁石英岩引起的。该剖面钻探控制的鞍山群含矿层厚度1100m (图5)。

可见红山岭磁异常用奇点法计算的含矿岩层厚度1189m, 而钻探控制的厚度1100m, 误差7.7%。计算的平均埋深638m, 而钻探见磁铁石英岩层埋深平均700m, 误差9%。

## 结 论

1. 复变函数奇异点法是一种反演计算方法, 它仅适合二度体异常, 对于三度体异常必需转换为二度异常才可应用。奇异点法求解过程虽然比较复杂, 但都是通过整条曲线转换的, 计算误差较小。

2. 由于鞍山式铁矿体一般为较规则的板状体, 其上下端点、角点很明显, 它是复变函数的奇点, 最适合用奇异点法求解。从上述两例应用结果看, 求出的埋深和厚度误差均小于10%。同时能确定厚板状矿体顶面的倾斜角度, 这是优于其他方法的。

3. 计算时, 要求实测的 $\Delta Z$ 曲线 (和 $\Delta H$ 曲线) 精度高, 而且注意消除区域场对正常场的影响, 否则多次曲线转换会带来较大误差, 影响计算成果。

## Attitude Calculation of Anshan Type Iron Orebodies by Using the Singularity of Complex Variables

Li Huiting

By making use of the singularity of complex variables (complex magnetic field) in a two dimensional magnetic body, the singular point method is used to calculate the attitude of an Anshan type iron orebody. From the practical examples cited in this paper and in comparison with drilling data, it has been shown that the errors of the results obtained are within the range of 10%.