

自然电位地形改正探讨

张宗岭

(中南工业大学)

本文介绍了一种等效偶层电位曲面延拓计算方法, 提出并实现了用第二类Fredholm积分方程进行自然电位的地形改正。在IBM微机上进行了理论计算和实际资料处理, 肯定了该方法的有效性。

关键词: 自然电位法; 地形改正



物理与化探

早在50年代, 自然电位法已得到了广泛地应用, 由于各种干扰的存在, 给推判解释带来了困难, 使资料往往无法充分利用。地形起伏不平是干扰因素之一, 它往往掩盖了矿体的有用异常, 甚至造成虚假异常, 大大降低了该方法的应用效果。本文提出一种消除自电地形影响的方法。

方法选择和等效偶层原理

1. 方法选择

自然电场是稳定场, 根据位场理论, 在场源外部空间稳定电场的电位是调和函数。而任一个调和函数在物理上都代表某个矢量场的位势。因此调和函数又称为位函数。自然电场的电位和场强亦是位函数, 可以借助于位场理论解析。

在众多的解析计算方法中, 这里选择了地面等效偶层场源法, 即采用第二类Fredholm积分方程进行自电地形改正。此方程理论上严格, 物理意义明确, 保证收敛^[1]。然而, 前人多在重力和磁法方面作了有益的

探讨^[2,3,5], 国外也有人利用该方程计算各向同性、分段均匀介质中稳定电流的电位问题, 并得出位场计算结果比电场更规则的结论^[4]。本文经过推导将其用于自电法的地形改正, 并在IBM微机上实现了地形改正计算。通过理论模型和实际资料验证结果, 肯定了方法的有效性。

等效源法的基本思路是: 假设在地面上存在一个电偶层, 首先根据地形面上的实测电位确定等效偶层的电偶极矩, 然后根据此量来计算地形面以上任一点的电位值, 从而达到地形改正之目的。

2. 基本原理

(1) 从等效偶层概念出发, 把上半空间的电位视为沿地面分布的等效电偶层所引起的, 组成电偶层的每个偶极子极矩分别与

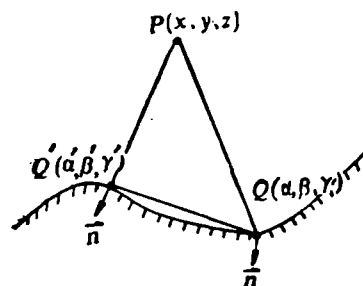


图 1

地形表面垂直。设地形面为已知的三维空间曲面，等效电偶层的电矩面密度为 M ，则地形面以上空间一点 $P(x, y, z)$ 产生的电位 $U(x, y, z)$ 为 (图1):

$$U(x, y, z) = \iint_S M \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) ds \quad (1)$$

式中, $r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$; 图1内 $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ 为地面上的任意点, $\vec{n}$ 是地形面法线方向上单位矢量。 $\frac{\partial}{\partial n}$

$= n_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + n_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + n_\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}$, 而 $n_\alpha, n_\beta, n_\gamma$ 为 $\vec{n}$ 的方向余弦。

从 (1) 式可知, 已知曲面上 $M(\alpha, \beta, \gamma)$ 的分布, 就可求出空间任一点的电位 $U(x, y, z)$ 。为了求出 $M(\alpha, \beta, \gamma)$, 把 $P(x, y, z)$ 沿偶极面外法线移到 S 面上一点 $Q'(\alpha', \beta', \gamma')$ 。由电位场理论可知 (1) 式的极限形式为:

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = 2\pi M(\alpha', \beta', \gamma') - \iint_{S'} M \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) ds \quad (2)$$

式中 S' 为除去点 $Q'(\alpha', \beta', \gamma')$ 以外的 S 面。

$$r^2 = (\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2 + (\gamma' - \gamma)^2$$

(2) 式正是第二类 Fredholm 积分方程。这个方程把观测场与等效层的 M 分布联系起来了, 对 M 可以用迭代法求解。将上式改写为:

$$M(\alpha', \beta', \gamma') = \frac{1}{2\pi} U_s(\alpha', \beta', \gamma') + \frac{1}{2\pi} \iint_{S'} M \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) ds \quad (3)$$

由于自然电场的电位是位函数, 可以直接从偶层位场理论出发, 把 (1) 式的 M 作为不同形式的待定系数对待, 则:

$$U(x, y, z) = \iint_S M(\alpha, \beta, \gamma) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) ds \quad (4)$$

同样, (2) 式在地面 S 上的极限形式有:

$$U(\alpha', \beta', \gamma') = 2\pi M(\alpha', \beta', \gamma') - \iint_{S'} M(\alpha, \beta, \gamma) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) ds \quad (5)$$

即

$$M(\alpha', \beta', \gamma') = \frac{1}{2\pi} U(\alpha', \beta', \gamma') + \frac{1}{2\pi} \iint_{S'} M(\alpha, \beta, \gamma) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) ds \quad (6)$$

式中 S' 为除点 $Q'(\alpha', \beta', \gamma')$ 以外的 S 面。

(2) 地形曲面的积分表达式。设已知的地形表面 S 为三维空间曲面; S 在 XOY 平面上的投影记为 S_2 , 用 $\gamma = f(\alpha, \beta)$ 表示 S 曲面, 则 $f(\alpha, \beta)$ 反映了地形面上表面单元的起伏特征。假设 $f(\alpha, \beta)$ 在整个域 S_2 上有连续, 且有界的一阶和二阶偏导数, 则表面上的法向分量 $\vec{n}$ 的方向余弦为:

$$\begin{aligned} n_\alpha &= -f_\alpha (1 + f_\alpha^2 + f_\beta^2)^{-1/2} \\ n_\beta &= -f_\beta (1 + f_\alpha^2 + f_\beta^2)^{-1/2} \\ n_\gamma &= (1 + f_\alpha^2 + f_\beta^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (7)$$

式中 f_α, f_β 分别为 $f(\alpha, \beta)$ 对 α, β 求偏导数。

地形面上曲面元 ds 与其在 XOY 平面上的投影 $d\alpha, d\beta$ 有下列关系:

$$ds = \frac{d\alpha \cdot d\beta}{n_\gamma} = (1 + f_\alpha^2 + f_\beta^2)^{1/2} d\alpha \cdot d\beta \quad (8)$$

可见, 要确定面积元 ds 及其法向分量的方向余弦必须计算 $\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial \beta}$ 。一般说来, $\gamma =$

$f(\alpha, \beta)$ 的关系量是用数字给出的, 可用分段的双三次样条插值多项式来近似地表示 $f(\alpha, \beta)$ 曲面, 并求出 f_α, f_β 。利用(7)式即可求出方向余弦 $n_\alpha, n_\beta, n_\gamma$ [6,7]。把(7)(8)式代入(4)式:

$$U(x, y, z) = \iint_S M(\alpha, \beta, \gamma) \frac{-f_\alpha(x-\alpha) - f_\beta(y-\beta) + (z-\gamma)}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2]^{3/2}} d\alpha \cdot d\beta$$

因为 S 在 xy 平面上的投影为 S_2 , 再以曲面 S 的解析表达式 $\gamma = f(\alpha, \beta)$ 代入上式右端得:

$$U(x, y, z) = \iint_{S_2} M'(\alpha, \beta)$$

$$K'(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = \frac{-f_\alpha(\alpha' - \alpha) - f_\beta(\beta' - \beta) + [f(\alpha', \beta') - f(\alpha, \beta)]}{\{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2 + [f(\alpha', \beta') - f(\alpha, \beta)]^2\}^{3/2}}$$

$$M'(\alpha', \beta') = M[\alpha', \beta', f(\alpha', \beta')]$$

$$U'(\alpha', \beta') = U[\alpha', \beta, f(\alpha', \beta')]$$

S_2 为除 $Q'[\alpha', \beta', f(\alpha', \beta')]$ 以外的 S_2 面。

(10) 式中, $U'(\alpha', \beta')$ 已知, 未知数 $M'(\alpha', \beta')$ 是两个变元的函数。(10) 式中的积分就是通常在一平面域 S'_2 上的二重积分。

用逐次逼近的方法求 $M'(\alpha', \beta')$ 的近似解, 先取 M' 的零级近似:

$$M'_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} U'(\alpha, \beta)$$

将 M'_0 代入(10)式, 得到 M' 的一级近似函数表达式

$$M'_1(\alpha', \beta') = \frac{1}{2\pi} U'(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \iint_{S'_2} M'_0(\alpha, \beta) \cdot K'(\alpha, \beta; \alpha', \beta') d\alpha \cdot d\beta \quad (11)$$

将上式再代入(10)式, 导出解答的二级近似。反复迭代, 得 M' 的 n 级近似:

$$\frac{-f_\alpha(x-\alpha) - f_\beta(y-\beta) + [z - f(\alpha, \beta)]}{\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + [z - f(\alpha, \beta)]^2\}^{3/2}} d\alpha \cdot d\beta \quad (9)$$

式中 $M' = M[\alpha, \beta, f(\alpha, \beta)]$ 。这样, 公式(9)右端化成了通常平面的二重积分(在 S_2 上)。

(3) 积分方程求解。同样可将积分方程(6)式化成下列形式:

$$M'(\alpha', \beta') = \frac{1}{2\pi} U'(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \iint_{S'_2} M'(\alpha, \beta) \cdot K'(\alpha, \beta; \alpha', \beta') d\alpha \cdot d\beta \quad (10)$$

式中

$$M'_n(\alpha', \beta') = \frac{1}{2\pi} U'(\alpha', \beta')$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_{S'_2} M'_{n-1}(\alpha, \beta) \cdot K'(\alpha, \beta; \alpha', \beta') d\alpha \cdot d\beta \quad (12)$$

($n=1, 2, 3, \dots$)

用迭代法逐次逼近, 直到 M' 的两个相邻的近似函数之差:

$$|M'_n - M'_{n-1}|$$

达到精度要求为止。如果事先给定的误差 $\epsilon > 0$ 为很小的正数

$$|M'_n - M'_{n-1}| < \epsilon$$

所求得的 n 级近似, 函数 M' 就可以为积分方程(10)的近似解。再把 M'_1 代入(9)式, 就可以近似求得 $U(x, y, z)$ 。

用迭代法计算时, 将(10)式中的二重积分离散化, 变为数值积分形式计算。

(4) 场源为二维时的处理。当场源为二维时, 设走向与 Y 轴平行, 地形在垂直走向的剖面上为 α 的函数, 于是方程 $\gamma = f(\alpha, \beta)$ 变为 $\gamma = f(\alpha)$, 同时 $f_\beta = 0$, 将(5)式对 α 积分:

$$U(\alpha', \gamma') = 2\pi M(\alpha', \gamma') - \int_L M \cdot \frac{-f_a(\alpha' - \alpha) + (\gamma' - \gamma)}{(\alpha' - \alpha)^2 + (\gamma' - \gamma)^2} d\alpha \quad (13)$$

即

$$M(\alpha', \gamma') = \frac{1}{2\pi} U(\alpha', \gamma') + \frac{1}{\pi}$$

$$\int_L M \frac{-f_a(\alpha' - \alpha) + (\gamma' - \gamma)}{(\alpha' - \alpha)^2 + (\gamma' - \gamma)^2} d\alpha$$

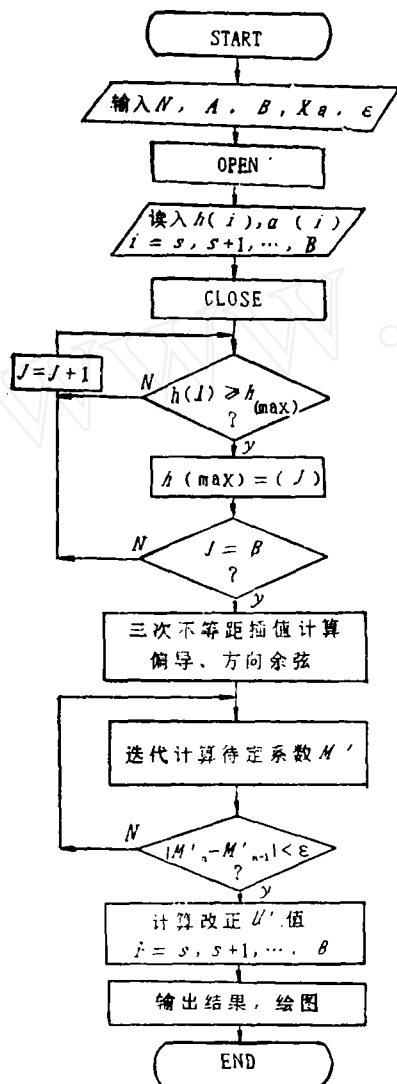


图 2 程序框图

主要变量说明: N—测量点数; A—起始测点号; B—终点测点号; X_0 —点距; ϵ —给定误差; $h(i)$ —第 i 点高程; $u(i)$ —第 i 点实测电位值; $U(i)$ —第 i 点地改后电位值

迭代时, 上式求积分可化为求和, 即

$$M(\alpha', \gamma') = \frac{1}{2\pi} U(\alpha', \gamma') + \frac{1}{\pi}$$

$$\sum_{\alpha=\alpha'-s}^{\alpha'+s} M \cdot \frac{-f_a(\alpha' - \alpha) + (\gamma' - \gamma)}{(\alpha' - \alpha)^2 + (\gamma' - \gamma)^2} \quad (14)$$

具体计算时取 $S=15$ 就可以了。按照类似的方法, 空间一点电位值为:

$$U(x, z) = 2 \sum_{\alpha=\alpha'-s}^{\alpha'+s} M(\alpha, \gamma) \cdot \frac{-f_a(x - \alpha) + (z - \gamma)}{(x - \alpha)^2 + (z - \gamma)^2} \quad (15)$$

这里具体进行地形改正就是换算到过地形最高点的面上, 编制了二维场源地形改正程序, 附程序框图 (图2)。

算 例

1. 理论模型试算

选用了多种角域的地形模型试算, 现以二维地形为例 (图3)。地形坡度角 30° , 矿体为垂直极化的水平圆柱体, 其自然电位公式为:

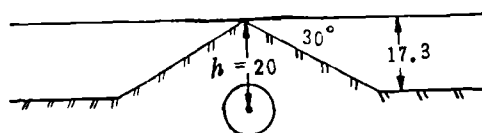


图 3

$$U = -\frac{MR}{R^2 + x^2}$$

其中 $M = \frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho_1} r_0 U_1$ 是一常数, 这里取 $M = 2000$ 。

首先求出地形线上各测点的电位值和过地形最高点水平线上相对应的电位值。图 4 中曲线①为起伏地形的理论计算值; 曲线② (实线) 为水平地形的理论计算值。再对起伏地形上各计算点的自然电位值用等效源法

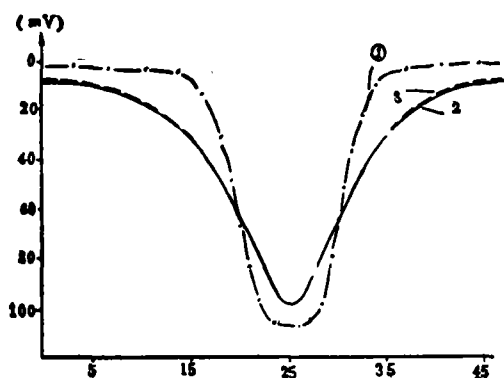


图 4 自然电位理论模型曲线 (水平圆柱体)

进行地形改正, 得到曲线③。从图 5 可以看出, 曲线③与曲线②吻合相当好, 计算误差一般在 0.2~1%, 常见值为 0.3%, 分布在曲线的中间段。误差最大为 4%, 分布在曲线两端, 这是截断误差影响的结果。外延测点计算可减小两端误差。实际计算说明, 误差的存在并未改变曲线形态, 且误差大的值分布在异常分析不太重要的部分。理论模型的试算取得了令人满意的结果。

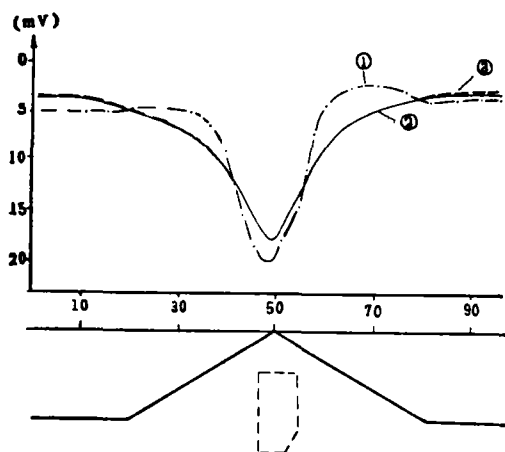


图 5 自电物理模拟和地形改正计算结果
(坡度角 30°, 硫化矿物场源)

2. 物理模拟和数值计算比较

实验室物理模拟选用了两种场源。第一

种场源为一块不太规则的长方体硫化矿物, 长、宽、高大致分别为 30、25、23cm, 其中有一个短边部分缺失。由于矿物标本分区含金属成分不同, 引起较强大的极化电位差。第二种是人工场源, 一个直径为 9cm 的水泥球, 过直径的两端固定电极, 通 4.5V 直流电。两个模型分别埋在地形为不同坡度角的土槽中, 尽量保持垂直极化, 维持着一定的潜水面。使用甘汞电极主剖面测量, 测量导线与 $x-y$ 函数记录仪联接, 逐点电位观测。这样, 两种场源分别在二维地形上测得多组电位值。

然后, 将起伏地形表面上的记录数据, 在 IBM 微机上进行等效源法地形改正, 再将改正后的数值与水平地形上的记录数值加以比较。

图 5 为地质剖面和自然电位剖面曲线。图中曲线①为起伏地形上的实测曲线, 经过地形改正后的曲线③与水平地形上的实测曲线②比较可知, 两条电位曲线的形态和幅值均基本吻合。差别主要来自实验条件及测量误差。大量曲线的对比说明, 用等效源法进行自电地形改正是有效的。

在整个工作过程中, 得到程方道教授、余惠祥副教授和仇勇海讲师的热情指导; 刘立松同学进行了大量上机计算, 在此表示谢意。

参 考 文 献

- [1] 陈钟琦, 地球物理学报, 1983, 第 1 期, 70—79 页。
- [2] 成都地质学院等合编, 《应用地球物理—磁法教程》, 地质出版社, 1980 年。
- [3] 余惠祥, 应用地球物理, 1985, 第 1 期, 32—43 页。
- [4] Eloranta, E. H., Geophysical Prospecting, 1986, 34(6), 856—872.
- [5] 申宁华等, 《磁法勘探问题》, 地质出版社, 1985 年。
- [6] 聂铁军, 《计算方法》, 国防工业出版社, 1982 年。
- [7] 南京大学数学系计算数学专业, 《数值逼近方法》, 科学出版社, 1978 年。