

点源二维势场问题的边界元法中点源 处理方法

张献民

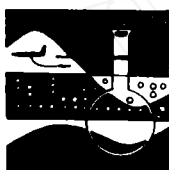
陈文华

(河北地质学院)

(南京建筑工程学院)

用傅氏变换将点源二维地电断面的三维边值问题, 变换成二维问题。提出了波数选取的方法与确定傅氏反变换加权系数的解析方法。研究了提高计算精度和计算速度的方法技术。方法简单, 精度较高。

关键词: 边界元法; 点源二维; 傅氏变换; 波数; 加权系数



物探与化探

解点源二维稳定电源场问题, 可对电位 u 沿 y 方向 (二维地质体走向) 进行傅氏变换, 引入频率域中傅氏变换电位 $\bar{u}$, 从而消去 y 分量, 使三维微分方程简化为二维微分方程。用边界元法解该方程得到频率域中变换电位 $\bar{u}$, 然后经傅氏反变换即可求得空间域中的真正电位 u 。在傅氏变换和反变换中, 波数选择是否恰当, 加权系数的确定是否正确, 是影响计算精度的关键。尤其在测深工作中, $AB/2$ 从几 m 变化到几千 m, 如何研究出一套傅氏变换波数和加权系数, 是人们普遍重视的一个问题。通常, 人们根据第二类零阶修正贝塞尔函数的特征和高斯求积公式、辛普生求积公式的特点, 同时带有经验的性质来选取波数和确定加权系数^[1,2], 其精度较低, 而且适应范围小, 在进行电测深边界元法计算时, 一般很难适用。本文提出了采用分段选取波数和用解析方法来确定加权系数, 方法简单易行, 而且精度较高。

二维边值问题的形成

在直流电法勘探中, 所建立的地下电场可作为稳定电场处理。用 u 表示电位, ρ 表示岩石的电阻率, σ 表示岩石的导电率, I 表示电流强度。稳定电流场应满足下列基本微分方程:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = -I \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) \quad (1)$$

式中, (x_0, y_0, z_0) 为供电点的位置, δ 为狄拉克函数。

若存在两种导电率为 σ_1 和 σ_2 的介质, 在交界面上应满足下列边界条件:

$$u_1 = u_2 \quad (2)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \quad (3)$$

对于二维地电断面, 我们选取 y 轴平行于地质体走向, 所以地电参数只随 x 、 z 方向变化, 而在 y 方向上为常数, 即

$$\frac{\partial}{\partial y} [\sigma(x, y, z)] = 0$$

此时电位满足的基本微分方程 (1) 式变成:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot [\sigma(x, z) \nabla u(x, y, z)] \\ & = -I \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(z-z_0) \end{aligned} \quad (4)$$

为了充分利用二维情况下 σ 与 y 无关的条件, 简化计算, 考虑到 u 是 y 的偶函数, 定义下列傅氏变换对:

$$\begin{cases} \bar{u}(x, \lambda, z) = \int_0^{\infty} u(x, y, z) \cos(\lambda y) dy \end{cases} \quad (5a)$$

$$\begin{cases} u(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{u}(x, \lambda, z) \cos(\lambda y) d\lambda \end{cases} \quad (5b)$$

利用 (5a) 式将 (x, y, z) 空间中的电位 u 变换为 (x, λ, z) 空间中的二维变换电位 $\bar{u}$, 这里 λ 是空间波数。

对 (4) 式两边进行傅氏变换, 考虑到左部

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) &= \nabla \sigma \cdot \nabla u + \sigma \nabla^2 u \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \\ &\quad + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + \sigma \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \\ &\quad + \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ &\quad + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\sigma \nabla \bar{u}) \lambda^2 \sigma \bar{u} &= -\frac{I}{2} \delta(x-x_0) \\ &\quad \delta(z-z_0) \end{aligned} \quad (6a)$$

即

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\sigma(x, z) \nabla \bar{u}(x, \lambda, z)] - \lambda^2 \\ \sigma(x, z) \bar{u}(x, \lambda, z) &= -\frac{I}{2} \delta(x-x_0) \\ &\quad \delta(z-z_0) \end{aligned} \quad (6b)$$

(6) 式即为点源二维地电断面情况下变换电位 $\bar{u}$ 满足的基本微分方程。在这个方程中, 已经消除了 y 变量, $\bar{u}$ 只是 x 和 z 的函数。这样, 原来 (4) 式描述的三维问题简化为 (6) 式描述的二维问题。其中 λ 只是作为参数形式出现。

对于均匀介质, 导电率 σ 为常数, (6) 式变为:

$$\nabla^2 \bar{u} - \lambda^2 \bar{u} = \frac{I}{2\sigma} \delta(x-x_0) \delta(z-z_0) \quad (7)$$

若在无源空间, (7) 式成为:

$$\nabla^2 \bar{u} - \lambda^2 \bar{u} = 0 \quad (8)$$

对于具体的地电模型, 利用 (5a) 式对相应的边界条件进行傅氏变换, 然后利用二维格林公式

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\bar{u} \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \bar{u}) d\Omega &= \oint_{\Gamma} \left(\bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. - \varphi \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

及二维赫姆霍兹方程的基本解

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} K_0(\lambda r) \quad (10)$$

形成边界积分方程。式中 K_0 是第二类零阶修正贝塞尔函数。

当积分方程形成以后, 对足够多的波数 λ , 用边界元法解积分方程得到变换电位 $\bar{u}$ 。用 (5b) 式进行傅氏反变换得到空间域中

的真正电位 u 。由 (5b) 式可以看出, 傅氏反变换积分是广义积分, 用通常的积分方法难以积分。实际计算时, 只能取有限个离散波数 λ_i , 用数值积分的方法求其近似值, 即

$$u(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^m \overline{u}(x, \lambda_i, z) \cos(\lambda_i y) g_i \quad (11)$$

通常, 我们只对通过电源点的剖面感兴趣, 此时 $y = 0$, (11) 式成为

$$u(x, z) = \sum_{i=1}^m \overline{u}(x, \lambda_i, z) g_i \quad (12)$$

式中, m 为离散波数的个数; g_i 为相应 λ_i 的加权系数。傅氏反变换的方法和精度是影响正演计算结果的重要因素之一, 而波数的选择与加权系数的求取将直接影响到边界元法的计算精度。

波数的选择与加权系数的确定

为了正确选择波数 λ , 首先研究频率域中傅氏变换电位 $\overline{u}$ 函数的特点。

对于均匀介质, 从理论计算可知, 距场源点距离为 r 的任一点的电位为:

$$u = \frac{A}{r} \quad (13)$$

式中 A 为常数因子。利用 (5a) 式对上式两边进行傅氏变换, 得

$$\overline{u}(x, \lambda, z) = AK_0(\lambda r) \quad (14)$$

可见, 均匀介质中傅氏变换电位 $\overline{u}$ 函数的特点即为第二类零阶修正贝塞尔函数的特点。如图 1 所示, 当 $\lambda r \rightarrow 0$ 时, $K_0(\lambda r) \rightarrow \infty$; 当 $\lambda r \rightarrow \infty$ 时, $K_0(\lambda r) \rightarrow 0$ 。第二类零阶修正贝塞尔函数是一条迅速衰减的单调下降函数曲线。

对于非均匀介质的地电断面, 当有点源场存在时, 在不均匀体的界面上将产生积累电荷, 而积累电荷具有点源场的性质。为便

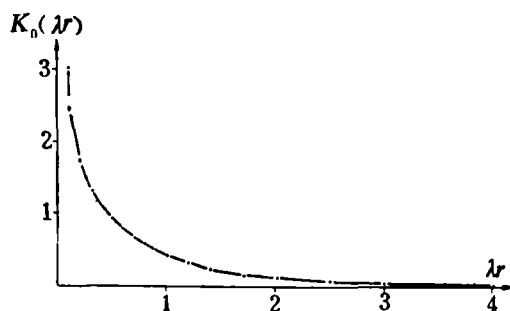


图 1 $K_0(\lambda r)$ 与 λr 的关系

于讨论, 我们以二层水平介质为例, 易于导出在频率域 (x, λ, z) 中变换电位 $\overline{u}$ 函数的表达式:

$$\overline{u}(x, \lambda, z) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left\{ K_0(\lambda r_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_{1n} K_0(\lambda r_2) \right\} \quad (15)$$

式中, $K_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$; ρ_1 为上覆岩层电阻率, ρ_2 为下伏岩层电阻率, h 为下界面的埋深; $r_1 = x$, $r_2 = \sqrt{x^2 + (2nh)^2}$, x 为地表水平坐标。

可见, 水平二层介质 $\overline{u}$ 函数的特点, 仍然是以第二类零阶修正贝塞尔函数为基础。不同的仅仅是一系列不同自变量的 K_0 加权求和, 权系数取决于地电断面的物性参数, 其曲线形状如图 2 所示。可见具有与均匀介质相似的特点。

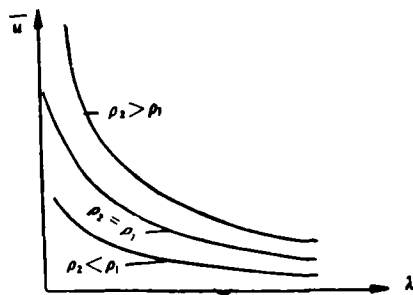


图 2 水平二层介质情况下的 $\overline{u}$ 函数

合理选择波数的个数以及它们的分布是十分重要的。为了研究方便，以均匀介质地电断面为例，通过研究 $\bar{u}$ 随 $1r$ 变化的曲线，得出一套合理的波数及加权系数，然后推广到其他地电断面上。

$$0 < \lambda, r \leq 4 \quad (16)$$
$$\int_{0+}^{1.5} K_0(\lambda r) d\lambda \gg \int_{1.5}^4 K_0(\lambda r) d\lambda \quad (17)$$
$$0.001 \leq \lambda_{\min} r_{\max} \leq 0.5 \quad (18a)$$

$$1.5 \leq l_{\max} r_{\min} \leq 4.0 \quad (18b)$$

若按以上原则选出 m 个波数

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n = \lambda_{\max}$$

$$r_{\min} = r_1 < r_2 < \dots < r_n = r_{\max}$$
$$u_j = \frac{1}{2\pi r_j} \quad j=1, 2, \dots, m \quad (19)$$

40

$$\begin{cases} i=1, 2, \dots, m \\ j=1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (20)$$

$$u_i = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^m \frac{K_0(\lambda_j r_i)}{2\pi} - g_i$$

$$j = 1, 2, \dots, m \quad (21)$$

根据上述方法和原则,选取了适用于不同距离段上的波数以及用解析方法确定的加权系数(表1)。为了提高计算精度,同时又考虑到减少计算量,在每一个距离段上选取11个波数,同时采用部分波数重迭。在0.5~670个单位长度上,实际参加运算的波数只有14个。在0.5~2500个单位长度上,实际参加运算的波数只有19个。考虑到点源场的特点,距离分段的长度随着远离场源而由小变大。

波数与加权系数

表 1

$r=0.5\sim 90$		$r=40\sim 670$		$r=400\sim 2500$	
λ_1	g_1	λ_1	g_1	λ_1	g_1
0.0026	-0.4237812	0.0004	-0.01372137	0.00001	0.0003415833
0.0048	1.111138	0.0008	0.1043174	0.000026	0.0009390081
0.01	-1.056664	0.001	-0.1033331	0.000048	-0.0001629 59
0.026	0.7891194	0.0026	0.02541268	0.00007	0.0001833904
0.048	-0.5436634	0.0048	-0.00941279	0.0001	-0.00377961
0.1	0.4288854	0.01	0.01354086	0.0004	0.00855 718
0.2	-0.3127228	0.026	0.01974535	0.0008	-0.01696254
0.3	0.5667239	0.048	0.0238856	0.001	0.01331008
1.0	1.065589	0.1	0.2199627	0.0026	0.0006784704
2.0	-0.05109388	0.2	-22.35685	0.0048	0.00378346
3.0	3.596953	0.3	986.562	0.01	0.00799111

数与加权系数所计算的距离段未作前移处理时, 正演计算的曲线形态与通常模拟实验结果不符合。而作前移处理后, 曲线形态较为光滑, 反映了高阻柱体的存在, 大大地提高了计算精度。

为了检验表 1 中波数与加权系数的可靠性, 在均匀介质中, 边界元法的计算结果与精确解作了对比 (表 2)。

精度比较

表 2

与点源 距离 r	精确解 $u = \frac{1}{2\pi r}$	边界元法 $u = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{11} \overline{u}(x, \lambda_i, z) g_i$	相对 误差 (%)
0.5	0.3183099	0.3139506	1.3
1.5	0.1061033	0.1057435	0.3
3.0	0.05305165	0.05302925	0.04
15.0	0.01061033	0.01061218	0.01
45.0	0.003536777	0.003538382	0.04
80.0	0.001989437	0.001987757	0.08
165.0	0.001026806	0.001026816	0.001
350.0	0.000454728	0.000454741	0.003
505.7	0.000314722	0.000314742	0.006
670.0	0.000237515	0.000237574	0.0
710.0	0.000224162	0.000224162	0.0
1150.0	0.000138396	0.000138396	0.0
1450.0	0.000109762	0.000109762	0.0
1800.0	0.000088419	0.000088423	0.005
2000.0	0.000079577	0.000079593	0.02
2200.0	0.000072343	0.000072391	0.06
2300.0	0.000069198	0.000069274	0.1

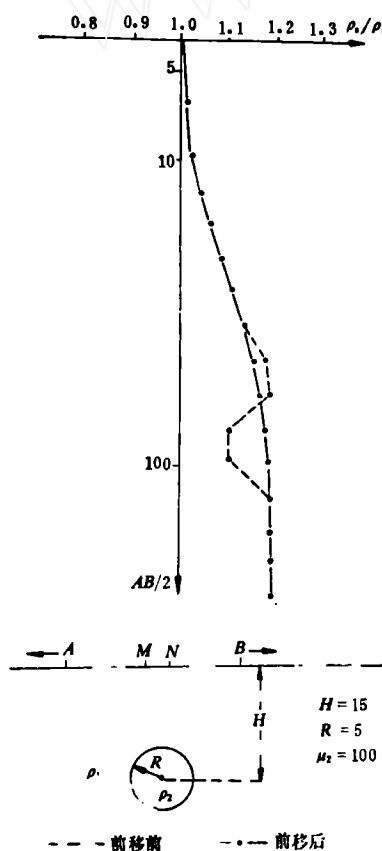


图 3 大距离段前移前后曲线对比

由表 2 可以看出, 利用表 1 中的波数与加权系数所得到的边界元法结果与精确解相比, 除了在点源附近误差为 1.3% 外, 其他点上的误差均小于 0.3%。其精度令人满意。

图 4、图 5 分别为水平二层介质上 G 型

与D型对称四极电测深曲线的计算结果,并与解析结果作了对比,除个别点相对误差大于3%外,一般均小于2%。无论是G型曲线还是D型曲线,边界元法的计算结果与理论曲线拟合很好,说明采用本方法选取的波数及确定的加权系数是有效的。

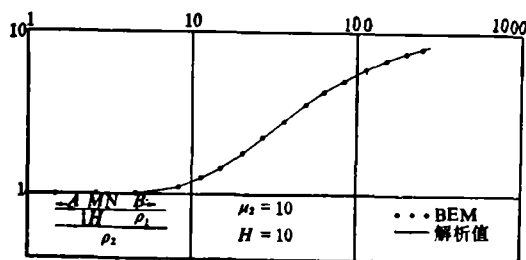


图 4 计算实例

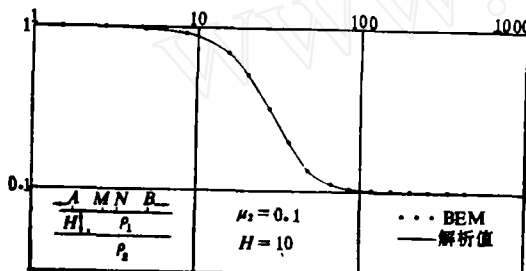


图 5 计算实例

结 论

精度对比及计算实例表明,采用本方法来选取波数与加权系数,不仅方法简单,而且精度较高。由于本方法的引入,使得在分段选取波数时,相邻段部分波数重迭成为可能,从而大大减少了计算量。在距离分段时,由于采用了相邻距离段部分距离重迭,通过前移处理,使得在均匀介质地电断面上选出的波数组推广到其他地电断面上时,提高了计算精度。与以往的方法相比,避免了人们为选取合理的波数而花费大量的精力进行试算。本方法不仅适用于边界元法,而且还可以推广到有限元法、有限差分等数值方法。

参 考 文 献

- [1] 徐世浙等,地质与勘探,1986,第3期。
- [2] 徐世浙,桂林冶金地质学院学报,1934,12月。
- [3] 周煦襄等,《电法勘探数值模拟技术》,四川科技出版社,1986年。
- [4] 南京工学院数学教研组,《积分变换》,人民教育出版社,1978年。
- [5] Brebbia, C. A., The Boundary Element Method for Engineers, Pentch Press Ltd, 1978.
- [6] Brebbia, C. A., Progress in Boundary Element Method, Volumel, Pentch Press Ltd, 1981.

A Sectioned Wave Number Selection Technique in the Treatment of Potential Field Data due to a Point Current Source over 2-D Environment

Using Boundary Element Method

Zhang Xianmin Chen Wenhua

A three-dimensional (3-D) boundary value problem for the electric field of a point current source over a two-dimensional (2-D) geoelectric section is easy to be converted by using Fourier transform into a 2-D one. A technique for sectioned wave number selection and an analytical method for the determination of weighting coefficients of inverse Fourier transform are proposed. Techniques for raising the computational accuracy and speed are also discussed in this paper. In comparison with other methods previously developed, the method we presented is more simple and has a higher accuracy.