

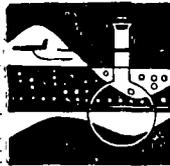
二维起伏地形上位场 数据的向上延拓

孟 洪

(吉林省地矿局物探大队)

本文以平面格林公式为基础,推导出一种方法,使二维起伏地形上的实测数据(重力、磁力)可向上延拓到任一高度,而无损失点,并以一无限长水平圆柱体模拟任意形状的异常体,从而抑制了截断误差。

关键词: 位场的向上延拓, 二维起伏地形, 截断误差, 模拟任意形体的异常



物探与化探

使用本文介绍的方法,对几个理论模型的上延进行了试算,并与常规上延结果加以对比,显示了方法的有效性和可行性。

上延公式的推导

在 xoz 平面上,一条地形曲线 S 和它上方的一条水平线 P 的方程分别为:

$$z = h(x) \text{ 和 } z = h_0$$

由直线 P 上一点 (x, h_0) 延拓到高度为 H 的一点 $M(\bar{x}, H)$ 的重力公式为:

$$g(\bar{x}, H) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x, h_0)(H - h_0)}{(x - \bar{x})^2 + (h_0 - H)^2} dx \quad (1)$$

于 P 和 S 中间任取一点 C ,并以 C 为圆心,作出一个以 r 为半径的圆(图1)。 S 与 P 之间所夹圆面积用 S' 表示, S' 边缘以 L 表示。则由 S' 内的一点 $N(x, z)$ 到点 M 的距离为:

$$R = [(x - \bar{x})^2 + (z - H)^2]^{1/2} \quad (2)$$

且 $\ln(1/R)$ 为 S' 域上的调合函数。

引入数学场论中的平面格林公式

$$\oint_L [P \cos(n, x) + Q \cos(n, z)] dl = \iint_{S'} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} \right] d\sigma \quad (3)$$

式中 n 为曲线 L 的外法线方向,令(3)式中左端的被积函数 $u = g \nabla \left(\ln \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{n}$ 。有 $P =$

$g \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{R} \right)$, $Q = g \frac{\partial}{\partial z} \left(\ln \frac{1}{R} \right)$, 则公式(3)变成

$$\oint_L g \nabla \left(\ln \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{n} dl = \iint_{S'} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(g \frac{\partial}{\partial z} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \right) \right] d\sigma \quad (4)$$

当圆的半径 r 趋于无穷大时, 上式等于

$$\int_P g \nabla \left(\ln \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{n} dl + \int_S g \nabla \left(\ln \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{n} dl = \iint_{S'} \nabla g \cdot \nabla \left(\ln \frac{1}{R} \right) d\sigma \quad (5)$$

(5) 式两端同乘 $\frac{1}{\pi}$, 左端第一项为 M 点的上延公式, 即

$$g(\bar{x}, H) = -\frac{1}{\pi} \int_S g \nabla \left(\ln \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{n} dl + \frac{1}{\pi} \iint_{S'} \nabla g \cdot \nabla \left(\ln \frac{1}{R} \right) d\sigma \quad (6)$$

忽略等号右端的第二项, 延拓公式为:

$$g(\bar{x}, H) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, h(x)) \frac{(\bar{x} - x) \frac{\partial h}{\partial x} + h(x) - H}{(x - \bar{x})^2 + (h(x) - H)^2} dx \quad (7)$$

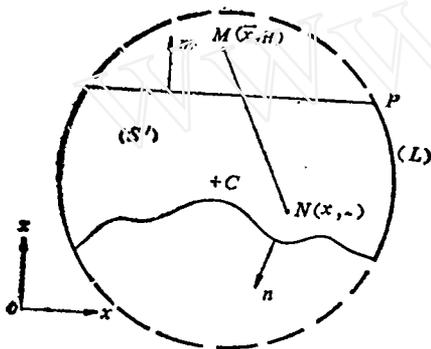


图 1 平面场向上延拓图示

空间梯度场的计算、解释工作中。

观察略去的项, (7) 式至少在以下情况下, 能得出较精确的上延值:

(1) 地形起伏不十分剧烈, 即面积 S' 较小。

(2) 异常体埋藏较深, 或上延高度相对较高, 也就是内积 $\nabla g \cdot \nabla \left(\ln \frac{1}{R} \right)$ 很小。

剖面上磁场数据的向上延拓与之相类似, 且磁异常梯度小, 结果显然更精确。

将 (7) 式对 H 和 \bar{x} 分别求导, 可直接得出 M 点的垂向梯度和水平梯度公式, 用在

截断误差的抑制

(7) 式要求对整个 x 轴积分, 而在实际测量中, 获取的有效剖面长度都是有限的。即在数值积分中, 经常以 $\int_a^b f(x) dx$ 近似地代替无限积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ 。而 a 、 b 以外的被积函数取为 0。这就不可避免地引入了截断误差。

参考文献 [1] 提出的方法, 在二维数据的上延中, 我们假定数据区以外各点的重力异常场等于地下一个无限延伸水平圆柱体的重力场。圆柱体的密度等于实测剖面上异常体的密度; 圆柱体的中心位于异常体的质心, 这样就有

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f_s(x)] dx = \int_a^b [f(x) - f_s(x)] dx \quad (8)$$

式中 $f_s(x)$ 为圆柱体场的被积函数, $f(x)$ 为实测场的被积函数。

在起伏的地形 $z = h(x)$ 上, 无限长水平圆柱体的重力场公式为:

$$g_s(x, h(x)) = \frac{2G\lambda(h(x) - h_c)}{(x - x_c)^2 + (h(x) - h_c)^2} \quad (9)$$

上式中 G 为引力常数, λ 为线密度, (x_c, h_c) 即圆柱体中心坐标。而对于空间中高度为 H 上的圆柱体重力场表示式为:

$$g_s(\bar{x}, H) = \frac{2G\lambda(H - h_c)}{(\bar{x} - x_c)^2 + (H - h_c)^2} \quad (10)$$

式中 \bar{x} 为上延点的横坐标。

余下的问题, 就是如何寻找一个合适的方法, 求出这个模拟圆柱体的3个参数(M, x_c, h_c), ($M = 2G\lambda$)。这里利用全部实测数据与理论圆柱体场值进行最小二乘拟合, 即:

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{M(h_i - h_c)}{(x_i - x_c)^2 + (h_i - h_c)^2} - g_i \right]^2 = \min \quad (11)$$

式中 N 为剖面点数, x_i, h_i 为曲线 $h(x)$ 的第 i 点坐标, g_i 为 i 点的实测异常值。

首先给出模拟圆柱体的3个参数的初始值和迭代精度, 继而选用阻尼最小二乘法进行拟合, 达到精度要求后的 M, x_c, h_c 值作为圆柱体参数。

实际计算中, 利用圆柱体重力场曲线的特征点和特征值可直接给出3个参数初值。 x_c 由 Δg_{\max} 在 x 轴上的投影而定, 由半极值点的横坐标的平均值 $x_{1/2}$ 得到 $h_c = |x_{1/2}|$, 线密度 $\lambda = 74.7h_c\Delta g_{\max}$, $M = 2G\lambda$ 可求得。

这样, 以 $g(x, h(x)) - g_s(x, h(x))$ 代替(7)式中的 $g(x, h(x))$, 并将(10)式代入, 公式(7)变成:

$$g(\bar{x}, H) \approx g_s(\bar{x}, H) + \frac{1}{\pi} \int_a^b \left[(g(x, h(x)) - g_s(x, h(x))) \frac{(\bar{x} - x) \frac{\partial h}{\partial x} + h(x) - H}{(x - \bar{x})^2 + (h(x) - H)^2} \right] dx \quad (12)$$

同理, 起伏地形上磁场数据的向上延拓可类比应用(12)式。

数值积分与数值微分

(12)式求值时, 必然要用到数值积分和数值微分, 这类方法较多。因物探测量中点距大小不一致, 为充分利用整个剖面和提高精度, 对地形曲线求偏导 $\frac{\partial h}{\partial x}$ 采用文献[2]中离散点导数的计算方法

对曲线上 (x_i, h_i) 点, 首先计算出 Δt_j 和 ΔT_j

$$\Delta t_j = x_j - x_i \quad j = 0, 1, \dots, k \quad (13)$$

$$\Delta T_j = \frac{h_j - h_i}{\Delta t_j} \quad (14)$$

上式中 x_j 在 x_i 点附近选取, 取用点数 k 可根据点距大小和曲线形态而定。

(2) 计算系数 b_j

$$b_0 = \Delta T_0$$

$$b_j = \frac{\Delta t_j - \Delta t_{j-1}}{a_j - b_{j-1}} \quad (15)$$

其中 $a_j = \frac{\Delta t_j - \Delta t_0}{\Delta T_j - \Delta T_0}$ $j = 1, 2, \dots, k$

(3) 以连分式形式求出 $\frac{\partial h}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = b_0 - \frac{\Delta t_0}{b_1} - \frac{\Delta t_1}{b_2} - \dots - \frac{\Delta t_{k-1}}{b_k} \quad (16)$$

数值积分采用辛普生公式如下:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f_1 + f_n + 4B + 2A) \quad (17)$$

式中 a 、 b 是积分域的两个端点, f_1 为 a 点被积函数值, f_n 为 b 点被积函数值。 h 为点距, $N = n/2$, n 为剖面点数。且

$$A = \sum_{k=1}^N f_{2k-1}, \quad B = \sum_{k=1}^N f_{2k} \quad (18)$$

如果 n 不能被 2 整除, (17) 式 f_n 项为 f_{n-1} 。积分尚须加上 $\frac{h}{2}(f_n + f_{n-1})$ 一项, 即最后两点间积分采用了梯形积分公式。

模型计算实例

应用上延法对几种不规则的二度体理论模型进行了计算, 并将结果与常规上延法进行了对比, 以场空间的理论计算值与上延数据的均方误差来衡量方法的有效性。

首先, 人为给出二度异常体模型和它的密度。在一条起伏的地形曲线上, 采用二度多边形截面的重力正演公式计算出它引起的重力异常值。以此作为地表的实测场值, 进行某一高度的向上延拓。其次计算该异常体在这一高度上的空间场值, 并将它与延拓结果加以比较。

模型 1 为一对称异常体。共 8 个角点, 密度为 0.26g/cm^3 。点数 40, 点距 40m。剖面上模型见图 2。由起伏地形上位场值分别向上延拓 300m, 500m, 1000m, 延拓曲线如图 2。在这 3 个高度上, 理论模型的空间场值与延拓值的均方误差分别为 0.046, 0.031, 0.023; 其最大相对误差分别为 0.008, 0.0032, 0.0021。显然, 均方误差和相对误差随延拓高度的增加而减小。因理论计算的空间场曲线几乎与延拓曲线重合, 故图 2 中未能点出。

模型 2 给出一非对称的不规则异常体。4 个角点, 密度 $\sigma = 0.05 \text{g/cm}^3$; 地形曲线同模型 2, 上延高度为 500m, 1000m。其剖面曲线见图 3。它与这两个高度上的空间场值的均方误差分别为 0.144, 0.054; 最大相对误差为 0.01 和 0.008, 可以看出, 地形起伏大, 模型不规则, 上延高度小时误差稍大。但随着延拓高度的增加, 其精度随之提高。

对此模型, 试用无损失点的二度异常近似积分延拓公式进行了计算。即假设地形是水平的, 并向上延拓 500m, 1000m。其均方误差分别为 4.48 和 3.57; 最大相对误差分别为 0.23 和 0.21。其延拓 500m 重力场曲线见图 3。由图中看出, 异常体空间场的理论曲线与本文提出方法所得延拓曲线大致重叠。

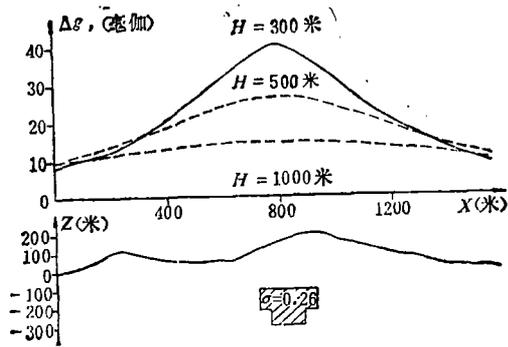


图 2 模型 1 剖面示意图

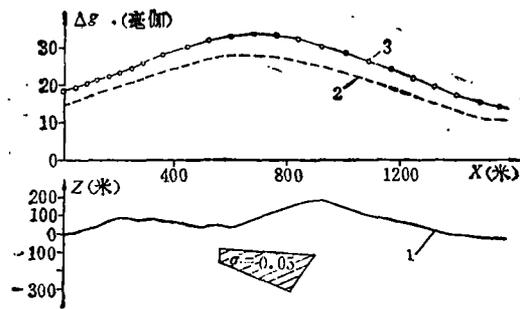


图 3 模型 2 剖面示意图

1—起伏地形；2—上延500m重力场曲线；3—高度为500m的空间重力场理论曲线

由此可见，采用这种方法，虽然增加了计算步骤，但上延结果精度却大为提高。为利用起伏不平的地形上实测重力场或磁场数据，掌握场的空间分布特征，进行定性分析和定量解释提高了可靠的信息。〔在DUAL-68000微机上多用户状态下，计算一条40个点的剖面上延用时为0.6~1.5分钟（包括反演模拟圆柱体在内）〕。

当然，这种方法的适用范围是有限的，对于剖面上曲线为多峰值或多个异常体场值的向上延拓，由于选择合适的二维模型消除截断误差较为困难而无法进行，尚有待于改进。这种计算方法将在今后对野外实测资料的处理中逐步完善。

三维异常体在起伏地表上的位场数据的向上延拓公式，已由罗马尼亚布加勒斯特大学M·伊万推出，需用者请参考文献〔1〕。

参 考 文 献

〔1〕 Ivan, M.: Geophys. Prosp., 1986, №34, p. 735-742

〔2〕 中国科学院应用数学推广办公室：《最优设计中的新算法》，北京，新时代出版社，1984年

〔3〕 长春地质学院重力教研室：《重力勘探》，北京，地质出版社，1980年

Upward Continuation of Potential Field Data over a 2-D Topographic Relief

Meng Hong

On the basis of Green' theorem the author has developed a method for upward continuation of gravity or magnetic data to an arbitrary height over a two dimensional rough terrain without any considerable truncation error. Test results of this upward continuation calculation on some ideal models confirmed the effectness and feasibility of this method, in comparison with other conventional upward continuation methods.