

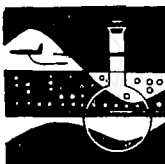
复变函数在解重力勘探正演问题中的应用

李九亮

(地矿部第二综合物探大队)

复变函数不仅可直观、简单地表示各种二度体和三度体的重力异常,而且有降维运算的功能,从而节省大量上机时间。通过对12种规则形体异常复变函数解析表达式的推导,说明了方法的优越性。

关键词: 复变函数; 二度体重力异常; 三度体重力异常



物探与化探

几种规则二度体重力异常的复变函数解析表达式

若以复变数 $\tau = x + jz$ 表示异常体截面 S 外任意一点的流动坐标,以 $\tau_0 = \xi + j\zeta$ 表示异常截面 S 内任意一点的坐标,并使 z 坐标的方向向下,在只考虑引力位时,截面 S 外各点的复变重力位可用解析函数表示:

$$W(\tau) = V(x, z) + jU(x, z)$$

由于 $V(x, z)$, $U(x, z)$ 满足柯西-黎曼条件,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

所以,重力场的复场强为:

$$W_z = V_z + jU_z = \frac{\partial V}{\partial z} + j \frac{\partial V}{\partial x} = g_z + jg_x$$

式中, g_z 、 g_x 分别为重力场的垂直分量和水平分量。

1. 无限走向的水平圆柱体

如图1所示,坐标系选定则由[1]得其复变重力位为:

$$W(\tau) = -2f\lambda \ln(\tau - \tau_0) \quad (1)$$

式(1)中, λ 为水平圆柱体的线密度; f 为万有引力常数(下同); τ_0 为圆柱体轴心的复坐标。

其复场强为:

$$W_z = V_z + jU_z = -2f\lambda j \left(\frac{1}{\tau - \tau_0} \right) \quad (2)$$

由此可得各种均质水平二度体的复场强:

$$W_z = \iint_s -2f\sigma j \frac{d\xi d\zeta}{\tau - \tau_0} = -2f\sigma j \iint_s \frac{d\xi d\zeta}{\tau - \tau_0} \quad (3)$$

式(3)中, σ 为二度体截面的面密度。

2. 无限走向的水平薄板状体

坐标系和参数的选定如图2所示, 则由(3)式得无限走向水平薄板状体的复场强:

$$\begin{aligned} W_z(\tau) &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} -2f\sigma j \frac{d\xi}{\tau - \xi - j\zeta} = 2f\sigma j \ln(\tau - \xi - j\zeta) \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} \\ &= 2f\sigma j \ln \frac{\tau - \xi_2 - j\zeta}{\tau - \xi_1 - j\zeta} = 2f\sigma j \ln \frac{\tau - \tau_2}{\tau - \tau_1} \end{aligned} \quad (4)$$

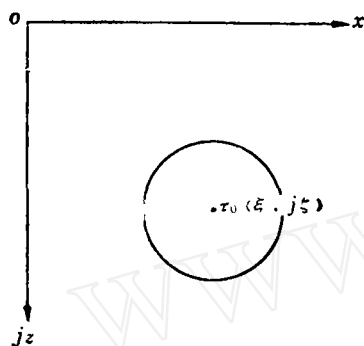


图 1

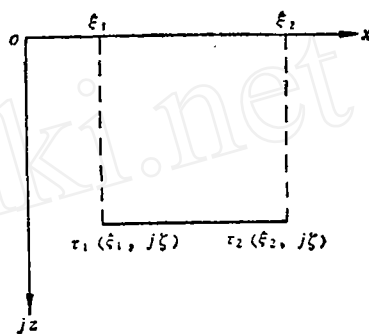


图 2

由此可见, 无限走向水平薄板状体的复场强只与板状体的两侧位置有关, 其角点为对数奇点。

3. 无限走向的垂直薄板状体

坐标系和参数的选定如图3所示, 则由(3)式得无限走向的垂直薄板状体的复场强为:

$$\begin{aligned} W_z &= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} -2f\sigma j \frac{d\zeta}{\tau - \xi - j\zeta} = 2f\sigma \ln(\tau - \xi - j\zeta) \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} \\ &= 2f\sigma \ln \frac{\tau - \xi - j\zeta_2}{\tau - \xi - j\zeta_1} = 2f\sigma \ln \frac{\tau - \tau_2}{\tau - \tau_1} \end{aligned} \quad (5)$$

由此可见, 无限走向垂直薄板状体的复场强和水平薄板状体的复场强一样, 只取决于上下两侧的位置, 其角点亦为对数奇点。

4. 无限走向的倾斜薄板状体

如图4所取坐标系和参数, 则在复变平面 $x'oz'$ 中无限走向倾斜薄板状体变为无限走向的水平薄板状体, 于是其复场强为:

$$W'_z(\tau') = 2f\sigma j \ln \frac{\tau' - \tau'_2}{\tau' - \tau'_1} \quad (6)$$

将复变平面 $x'oz'$ 作一旋转变换, 即得复变平面 xoz 中的复场强:

$$W_z(\tau) = W'_z e^{i\beta} \quad (7)$$

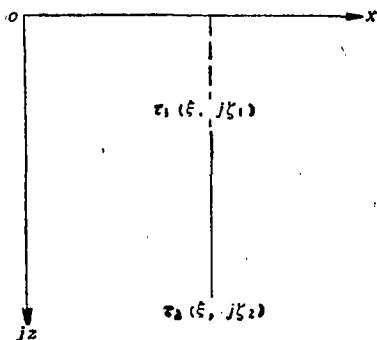


图 3

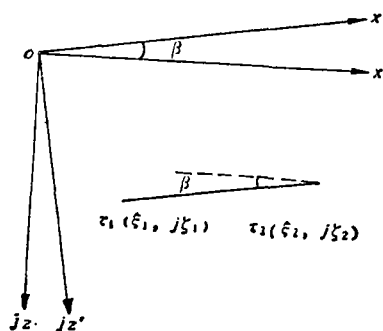


图 4

将 x' 、 z' 和 ξ'_1 、 ξ'_2 分别用 x 、 z 及 ξ_1 、 ξ_2 表示, 即:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \beta + z \sin \beta, \quad z' = z \cos \beta - x \sin \beta \\ \xi'_1 &= \xi_1 \cos \beta + \xi_2 \sin \beta, \quad \xi'_2 = \xi_1 \cos \beta - \xi_2 \sin \beta \end{aligned}$$

$$\text{则} \quad \tau' - \tau'_1 = [(x - \xi_1) + j(z - \xi_2)](\cos \beta - j \sin \beta) = (\tau - \tau_1)e^{-j\beta} \quad (8)$$

同理可得:

$$\tau' - \tau'_2 = (\tau - \tau_2)e^{-j\beta} \quad (9)$$

将 (8) 式和 (9) 式代入 (7) 式和 (6) 式, 得

$$W_z(\tau) = W'_z(\tau')e^{j\beta} = 2f\sigma j e^{j\beta} \ln \frac{\tau' - \tau'_2}{\tau' - \tau'_1} \quad (10)$$

5. 无限走向的半无限水平薄板状体

如图 2 那样选定坐标系和参数, 并令 $\xi_2 = \infty$, 即得往 x 轴正方向延伸的半无限水平薄板状体。为求其复场强, 可令 (4) 式中的

$$\tau - \tau_2 = r_2 e^{j\varphi_2}, \quad \tau - \tau_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$$

于是, (4) 式变为:

$$W_z = 2f\sigma j \ln \frac{r_2 e^{j\varphi_2}}{r_1 e^{j\varphi_1}} = 2f\sigma j [(\ln r_2 - \ln r_1) + j(\varphi_2 - \varphi_1)] \quad (11)$$

因 $\xi_2 = \infty$ 时, $r_2 = \infty$, $\varphi_2 = 0$, 所以 (11) 式中的虚部, 即,

$$g_x = \infty,$$

而实部

$$g_x = 2f\sigma \varphi_1$$

同样, 若令图 2 中的 $\xi_1 = \infty$, 即得往 x 轴负方向延伸的半无限水平薄板状体。因为 $\xi_1 = \infty$ 时, $r_1 = \infty$, $\varphi_1 = \pi$, 所以:

$$g_x = \infty,$$

$$g_x = 2f\sigma(\varphi_2 - \pi)$$

6. 无限走向、接触面倾斜的半无限水平层

如图 5 所选定的坐标系和参数, 由 (3) 式得接触面倾斜的半无限水平层的复场强:

$$W_z = \int_h^\infty \int_{-\zeta \cot \beta}^\infty -2f\sigma j \frac{d\xi d\zeta}{\tau - \xi - j\zeta} = 2f\sigma j \int_h^\infty \ln(\tau - \xi - j\zeta) \Big|_{-\zeta \cot \beta}^\infty d\zeta$$

$$\begin{aligned}
&= -2f\sigma j \int_h^H \left[-j \frac{\pi}{2} + \ln(\tau + \xi \operatorname{ctg} \beta - j\xi) \right] d\xi \\
&= 2f\sigma j \left\{ j \frac{\pi}{2} \xi - \xi \ln[\tau + \xi(\operatorname{ctg} \beta - j)] + e^{j\beta} \sin \beta [\tau + \xi(\operatorname{ctg} \beta - j)] \right. \\
&\quad \left. - \tau \ln[\tau + (\operatorname{ctg} \beta - j)\xi] \right\} \Big|_h^H \quad (12)
\end{aligned}$$

由图 5 可见:

$$\tau_2 = -H \operatorname{ctg} \beta + jH, \quad \tau_1 = -h \operatorname{ctg} \beta + jh$$

又因

$$h = -\tau_1 e^{j\beta} \sin \beta, \quad H = -\tau_2 e^{j\beta} \sin \beta$$

所以, 将积分上下限代入 (12) 式, 变换整理得:

$$\begin{aligned}
W_z = 2f\sigma j e^{j\beta} \sin \beta \left\{ -\frac{\pi}{2} j(\tau_1 - \tau_2) + (\tau_1 + \tau_2) + \ln \frac{(\tau - \tau_2)^{\tau_2}}{(\tau - \tau_1)^{\tau_1}} \right. \\
\left. + \tau \ln \frac{\tau - \tau_1}{\tau - \tau_2} \right\} \quad (13)
\end{aligned}$$

7. 无限走向、接触面垂直的半无限水平层

如图 6 所选定的坐标系和参数, 令图 5 中的 $\beta = \pi/2$, 即得接触面垂直的半无限水平层。

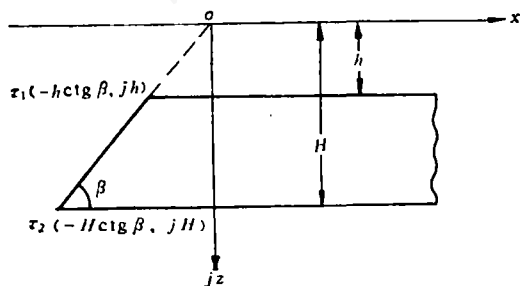


图 5

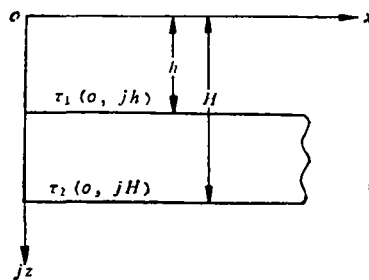


图 6

当 $\beta = \pi/2$ 时, $e^{j\beta} = j$, 所以 (13) 式就变成

$$\begin{aligned}
W_z = -2f\sigma \left\{ \frac{\pi}{2} j(\tau_1 - \tau_2) + (\tau_1 - \tau_2) + \ln \frac{(\tau - \tau_2)^{\tau_2}}{(\tau - \tau_1)^{\tau_1}} \right. \\
\left. + \tau \ln \frac{\tau - \tau_1}{\tau - \tau_2} \right\} \quad (14)
\end{aligned}$$

8. 无限走向、有限延深的垂直厚板状体

如图 7 所选定的坐标系和参数, 则由 (13) 式得垂直厚板状体的复场强:

$$\begin{aligned}
W_z &= \int_h^H \int_{-b}^b -2f\sigma j \frac{d\xi d\zeta}{\tau - \xi - j\zeta} = 2f\sigma j \int_h^H \ln(\tau - \xi - j\zeta) \Big|_{-b}^b d\zeta \\
&= 2f\sigma j \left\{ \int_h^H \ln(\tau - b - j\zeta) d\zeta - \int_h^H \ln(\tau + b - j\zeta) d\zeta \right\}
\end{aligned}$$

$$= 2f\sigma j \left\{ \xi \ln(\tau - b - j\xi) - j[\tau - b - j\xi - (\tau - b) \ln(\tau - b - j\xi)] \right. \\ \left. - \xi \ln(\tau + b - j\xi) + j[\tau + b - j\xi - (\tau + b) \ln(\tau + b - j\xi)] \right\} \int_h^H$$

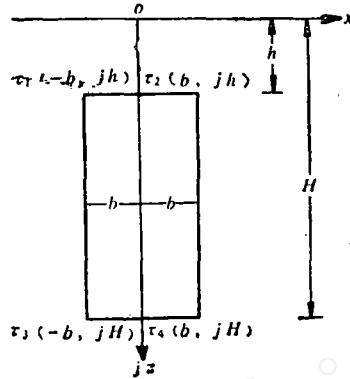


图 7

将积分上下限代入上式，并作下列代换：

$$\tau_1 = -b + jh, \quad \tau_2 = b + jh, \\ \tau_3 = -b + jH, \quad \tau_4 = b + jH$$

整理后，即得：

$$W_z = -2f\sigma \left\{ \ln \frac{(\tau - \tau_3)^{\tau_3} (\tau - \tau_2)^{\tau_2}}{(\tau - \tau_4)^{\tau_4} (\tau - \tau_1)^{\tau_1}} + \tau \ln \frac{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_4)}{(\tau - \tau_3)(\tau - \tau_2)} \right. \\ \left. + (\tau_4 - \tau_3 - \tau_2 + \tau_1) \right\} \quad (15)$$

9. 无限走向、有限延深的倾斜厚板状体

如图8所选定的坐标系和参数，则由(3)式得倾斜厚板状体的复场强：

$$W_z = \int_h^H \int_{-\xi \operatorname{ctg} \beta}^{-\xi \operatorname{ctg} \beta + 2b} -2f\sigma j \frac{d\xi d\xi}{\tau - \xi - j\xi} = 2f\sigma j \int_h^H \ln(\tau - \xi - j\xi) \Big|_{-\xi \operatorname{ctg} \beta}^{-\xi \operatorname{ctg} \beta + 2b} d\xi \\ = 2f\sigma j \int_h^H [\ln(\tau + \xi \operatorname{ctg} \beta - 2b - j\xi) - \ln(\tau + \xi \operatorname{ctg} \beta - j\xi)] d\xi \\ = 2f\sigma j \left\{ \xi \ln[\tau - 2b - \xi(-\operatorname{ctg} \beta + j)] - e^{j\beta} \sin \beta [\tau - 2b + \xi \operatorname{ctg} \beta \right. \\ \left. - j\xi - (\tau - 2b) \ln(\tau - 2b + \xi \operatorname{ctg} \beta - j\xi)] - \xi \ln(\tau + \xi \operatorname{ctg} \beta \right. \\ \left. - j\xi) + e^{j\beta} \sin \beta [\tau + \xi \operatorname{ctg} \beta - j\xi - \tau \ln(\tau + \xi \operatorname{ctg} \beta - j\xi)] \right\} \Big|_h^H$$

将积分限代入上式，并作下列代换：

$$\tau_1 = -h \operatorname{ctg} \beta + jh, \quad \tau_2 = -h \operatorname{ctg} \beta + 2b + jh, \\ \tau_3 = -H \operatorname{ctg} \beta + jH, \quad \tau_4 = -H \operatorname{ctg} \beta + 2b + jH, \\ h = -\tau_1 e^{j\beta} \sin \beta, \quad H = -\tau_3 e^{j\beta} \sin \beta$$

整理后，即得：

$$W_z = 2f\sigma j e^{i\beta} \sin\beta \left\{ \ln \frac{(\tau - \tau_3)^{\tau_3} (\tau - \tau_2)^{\tau_2}}{(\tau - \tau_4)^{\tau_4} (\tau - \tau_1)^{\tau_1}} + \tau \ln \frac{(\tau - \tau_4)(\tau - \tau_1)}{(\tau - \tau_3)(\tau - \tau_2)} + (\tau_4 - \tau_3 - \tau_2 + \tau_1) \right\} \quad (16)$$

由上述几种规则形体重力异常的最终表达式可看出, 只与形体本身的几何参数有关, 而与坐标原点的选择关系不大, 因而不失一般性。

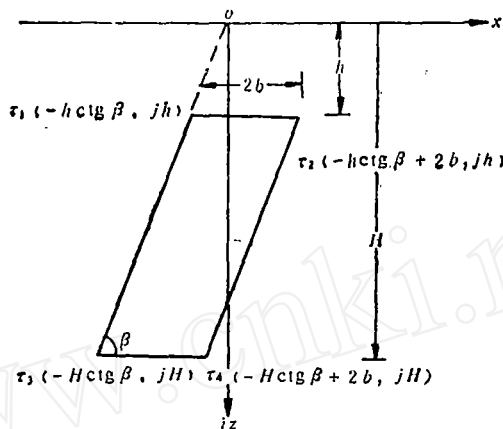


图 8

此外, 通过上述表达式与其对应的一般解析表达式^[3]比较, 发现复变函数表达式较相应的一般表达式简单、直观, 而且通过它易求得一般文献上难以找到的重力异常水平分量(g_x)的表达式。同时, 在计算上, 它将一般表达式中许多繁杂的、很费机时的三角和反三角运算化为简单的复数乘法及辐角的加法运算, 从而可提高计算速度, 节约机时。

10. 无限走向、有 N 个顶点的水平多棱柱体

由〔2〕得水平多棱柱体的复场强:

$$W_z = -2f\sigma j \sum_{k=1}^N \Delta \bar{\tau}_k I_k \left(-\frac{1}{t_k} \right) \ln(1+t_k) \quad (17)$$

式中, $\Delta \bar{\tau}_k$ 为 $\Delta \tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ 的共轭复数;

$$t_k = \frac{\Delta \tau_k}{\tau_k - \tau}$$

实际运用时, 可用已化简的公式:

$$W_z = f\sigma \sum_{k=1}^N \{ (E_k I_k - G_k I_k) + j(G_k J_k + E_k I_k) \} \quad (18)$$

式中, $E_k = C_k + P_k x$, $G_k = D_k + Q_k x$, $I_k = \arg(A_k + jB_k)$

$$J_k = \frac{1}{2} \ln \frac{(\xi_{k+1} - x)^2 + (\xi_{k+1} - z)^2}{(\xi_k - x)^2 + (\xi_k - z)^2}$$

$$C_k = \xi_k(1 - P_k) + Q_k(\xi_k - z), \quad D_k = -P_k(\xi_k - z) - \xi_k - Q_k \xi_k$$

$$P_k = \frac{\Delta \xi_k^2 - \Delta \zeta_k^2}{\Delta \xi_k^2 + \Delta \zeta_k^2}, \quad Q_k = \frac{2\Delta \xi_k \Delta \zeta_k}{\Delta \xi_k^2 + \Delta \zeta_k^2},$$

$$A_k = (\xi_{k+1} - x)(\xi_k - x) + (\zeta_{k+1} - z)(\zeta_k - z),$$

$$B_k = (\xi_k - x)(\zeta_{k+1} - z) - (\xi_{k+1} - x)(\zeta_k - z),$$

$$\Delta \xi_k = \xi_{k+1} - \xi_k, \quad \Delta \zeta_k = \zeta_{k+1} - \zeta_k$$

当 $z = \text{常数}$, 即求水平线上的复场强时, 因 C_k 和 D_k 为常数, 实用公式尚可进一步简化。

三度体重力异常表达式的化简

11. 长方体

如图 9 所示, 令长方体的各平面分别与坐标平面平行, 且长方体各面所在的平面分别为:

$$\xi_k = \text{常数}, \quad \eta_l = \text{常数}, \quad \zeta_m = \text{常数},$$

$$k = l = m = 1, 2, \quad \xi_1 < \xi_2, \quad \eta_1 < \eta_2, \quad \zeta_1 < \zeta_2$$

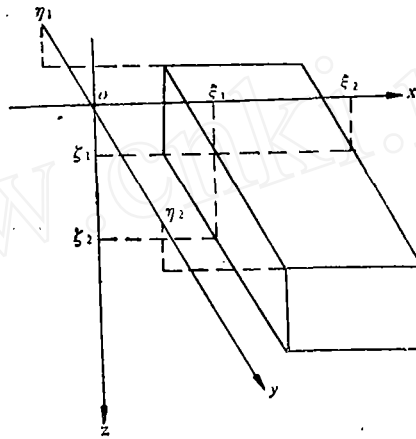


图 9

再令

$$R_{klm} = \sqrt{(\xi_k - x)^2 + (\eta_l - y)^2 + (\zeta_m - z)^2}$$

$$P_{klm} = \eta_l - y + R_{klm}, \quad Q = \xi_k - x + R_{klm},$$

$$C_{klm} = \arctg \frac{(\zeta_m - z) R_{klm}}{(\xi_k - x)(\eta_l - y)},$$

$$P = (\xi_2 - x) \ln \frac{P_{211} P_{222}}{P_{212} P_{221}} - (\xi_1 - x) \ln \frac{P_{111} P_{122}}{P_{112} P_{121}} + (\eta_2 - y) \ln \frac{Q_{121} Q_{222}}{Q_{122} Q_{221}}$$

$$- (\eta_1 - y) \ln \frac{Q_{111} Q_{212}}{Q_{112} Q_{211}}$$

δ 为其体密度, 则由 [2] 得:

$$q_z = -f \delta \{ P - (\xi_2 - z) [C_{222} - C_{122} - C_{212} + C_{112}] + (\xi_1 - z) [C_{221} - C_{121} - C_{211} + C_{111}] \}$$
(19)

由于反三角函数 C_{klm} 的计算很费机时, 若令:

$$D_{klm} = (\xi_k - x)(\eta_l - y) + j(\zeta_m - z) R_{klm}$$

则反三角函数 C_{klm} 变成复变数 D_{klm} 的辐角值, 即:

$$C_{klm} = \arg(D_{klm})$$

$-C_{klm}$ 就变成 D_{klm} 的共轭复变数 $\overline{D_{klm}}$ 的辐角值, 即:

$$-C_{klm} = \arg(\overline{D_{klm}})$$

根据复数乘法的运算法则, 得:

$$C_{222} - C_{122} - C_{212} + C_{112} = \arg[D_{222} D_{112} \overline{D_{122}} \overline{D_{212}}] = \arg A$$

同理可得:

$$C_{221} - C_{121} - C_{211} + C_{111} = \arg[D_{221} D_{111} \overline{D_{121}} \overline{D_{211}}] = \arg B$$

这样一来, 复杂的反三角函数的求和运算, 就变成简单的复数乘法运算。

于是, (19) 式就化简为:

$$g_z = f \delta \{ P - (\xi_2 - z) \arg A + (\xi_1 - z) \arg B \} \quad (20)$$

12. 水平的多角形薄板

若令其面密度为 δ_m , 则由 [2] 得:

$$g_z = f \delta_m \left(2\pi - \sum_{i=1}^N \arccos \frac{K_i}{D_i} \right) \quad (21)$$

其中, $K_i = A_{i-1} A_i + B_{i-1} B_i + C_{i-1} C_i$,

$$D_i = \sqrt{(A_{i-1}^2 + B_{i-1}^2 + C_{i-1}^2)(A_i^2 + B_i^2 + C_i^2)},$$

$$A_{i-1} = (\xi_{i-1} - x)(\eta_i - y) - (\xi_i - x)(\eta_{i-1} - y),$$

$$B_{i-1} = (\xi - z)(\eta_{i-1} - \eta_i),$$

$$C_{i-1} = (\xi - z)(\xi_i - \xi_{i-1})$$

(ξ_i, η_i, ξ_i) 为多角形第 i 个角点的坐标, $i=1, 2, \dots, N$ 。

当 z 为常数时, B_i, C_i 为常数, 上述公式尚可进一步化简。

若令 $\arccos u$ 为复数 $(u + j\sqrt{1-u^2})$ 的辐角值, 则 $\sum_{i=1}^N \arccos \frac{K_i}{D_i}$ 就化为;

$$\arg \prod_{i=1}^N (K_i + j\sqrt{D_i^2 - K_i^2})$$

于是 (21) 式就化为

$$g_z = f \delta_m \left\{ 2\pi - \arg \prod_{i=1}^N (K_i + j\sqrt{D_i^2 - K_i^2}) \right\} \quad (22)$$

与长方体重力异常的计算一样, 利用 (22) 式可以节约机时。更重要的是, 求多个复数乘积的辐角运算是一种稳定运算, 一般不会产生振荡, 也不会损失精度。

参 考 文 献

[1] 李九亮: 地质与勘探, 1981, 第1期。

[2] Страхов, В. Н. и др.: «Теория и Методы»

дика интерпретации гравимагнитных полей», Киев, Наукова Думка, 1981, с. 188~213.

[3] 重力勘探资料解释手册编写组: 《重力勘探资料解释手册》, 地质出版社, 1983。

Application of Complex Variable Functions to Solving Some Forward Problems of Gravity Prospecting

Li Jiuliang

Gravity anomalies due to 2 D or 3 D bodies can be simply and intuitively expressed by using complex variable functions. In the present paper analytical expressions in complex variable functions for gravity anomalies caused by 12 different regular shaped bodies are derived. It is revealed that this method has its superiority.