

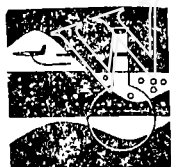
二维起伏地形条件下磁场分量 互相转换和向上延拓的一种方法

徐连喜

(中南冶金地质勘探公司 606 队)

本文从二维磁场矢量积分延拓公式出发, 介绍了一个关于二维起伏地形条件下磁场各分量转换的迭代算法, 从而找到了一条不同于以等效源法、单层位及双层位理论等为基础的磁场分量转换与向上延拓的途径。

关键词: 二维起伏地形; 磁场分量转换; 向上延拓



物探与化探

近年来, 对曲面条件下位场转换问题的研究, 取得了很大进展, 并发表了许多文章。本文介绍一种二维条件下磁场各分量间互相转换的方法, 运用转换结果可以进一步实现磁场的向上延拓。该方法原理简单, 适于野外磁法勘探资料的解释。理论模型和部分实例的计算结果证明, 该方法是切实可行的。对方法的理论推导, 文中不作详述。

方法原理

在图 1 所示的平面直角坐标系中, $P(x, z)$ 表示上半空间的任意一点, $Q(\xi, \zeta)$ 表示曲线 l 上的点 (曲线 l 为曲面与 $o-xz$ 平面的交线)。假设曲线 l 以 $z=f(x)$ 表示, 为分段光滑的单值函数, 磁场源位于曲线下方。

参照文献 [1] 第 404~408 页, 用 H 和 Z 分别表示空间各点磁场的水平分量和垂直分

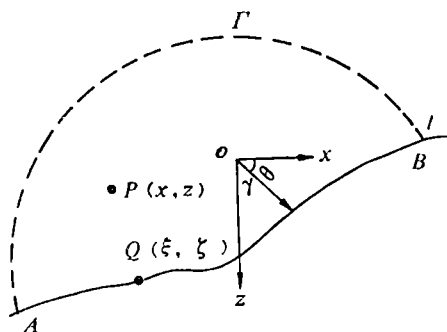


图 1

量。曲线上方任一点 $P(x, z)$ 的磁场, 可由曲线 l 上已知磁场值用下式求得:

$$Z(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R [Z(Q) d\psi + H(Q) d \ln \rho] \quad 1-1$$

$$H(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R [H(Q)d\psi + Z(Q)d\ln\rho] \quad 1-2$$

上面是极坐标中的表示式, 现将其转化为直角坐标的表达式。如图 1 所示:

$$\theta = \arctg \frac{\xi - z}{\xi - x}$$

$$\gamma = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\xi - z)^2}$$

$$\ln \gamma = \frac{1}{2} \ln [(\xi - x)^2 + (\xi - z)^2]$$

对于固定点 $P(x, z)$, θ 、 γ 、 $\ln \gamma$ 均为 ξ 和 ζ 的函数, 而 ζ 又是 ξ 的已知函数 $\zeta = f(\xi)$, 故 θ 和 γ 都是 ξ 的复合函数。对 θ 、 $\ln \gamma$ 求导数, 则有:

$$d\theta = \frac{1}{1 + \left(\frac{\xi - z}{\xi - x}\right)^2} \cdot \frac{f'(\xi)(\xi - x) - (\xi - z)}{(\xi - x)^2} d\xi = \frac{f'(\xi)(\xi - x)^2 - (\xi - z)^2}{(\xi - x)^2 + (\xi - z)^2} d\xi$$

$$d \ln \gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(\xi - x) + 2f'(\xi)(\xi - z)}{(\xi - x)^2 + (\xi - z)^2} d\xi = \frac{(\xi - x) + f'(\xi)(\xi - z)}{(\xi - x)^2 + (\xi - z)^2} d\xi$$

式中, $f'(\xi) = \frac{d}{d\xi} f(\xi)$ 。

根据文献 [1] 第 406 页, 将 1-1、1-2 式中的 $d\psi$ 、 $d \ln \rho$ 化为直角坐标, 公式为:

$$\begin{aligned} d\psi &= -d\theta \\ &= \frac{(\xi - z) - f'(\xi)(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + (\xi - z)^2} d\xi \end{aligned}$$

$$d \ln \rho = -d \ln \gamma = \frac{(\xi - x) + f'(\xi)(\xi - z)}{(\xi - x)^2 + (\xi - z)^2} d\xi$$

将其代入 1-1、1-2 式得:

$$\begin{aligned} Z(P) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - z) - f'(\xi)(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + (\xi - z)^2} Z(Q) d\xi \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - x) + f'(\xi)(\xi - z)}{(\xi - x)^2 + (\xi - z)^2} H(Q) d\xi \end{aligned} \quad 2-1$$

$$\begin{aligned} H(P) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - z) - f'(\xi)(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + (\xi - z)^2} H(Q) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi - x) + f'(\xi)(\xi - z)}{(\xi - x)^2 + (\xi - z)^2} Z(Q) d\xi \end{aligned} \quad 2-2$$

式中, $f'(\xi) = \frac{d}{d\xi} f(\xi)$ 。

在实际工作中, 常常是测得磁场在某个固定方向上的分量, 因而不能直接运用 2-1、2-2 式计算。

地面磁测经常测定的是垂直分量, 因此, 首先讨论运用 2-2 式将垂直分量转换为水平分量的方法。

(一) 垂直分量向水平分量的转换

2-2 式不仅当 P 点位于曲线 l 上方时成立, 而且当它无限趋近该曲线时也是正确的。如文献 [2] 中的 19 式:

$$\begin{cases} T(P) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mu(Q) K(P, Q) d\alpha \\ K(P, Q) = \frac{L(x-\alpha) + N(z-\gamma)}{(x-\alpha)^2 + (z-\gamma)^2} \sqrt{1+f_a'^2} \end{cases}$$

当 $P \rightarrow Q'$ 时, $T(P)$ 的极限形式与 $T(Q')$ 近似为:

$$T(Q') \cong \pi \frac{N-L \cdot f_{a'}'}{\sqrt{1+f_{a'}'^2}} \mu(Q') - \int_{-\infty}^{\infty} \mu(Q) K(Q', Q) d\alpha$$

将以上各式合写成下式:

$$\begin{aligned} & -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(x-\alpha) + N(z-\gamma)}{(x-\alpha)^2 + (z-\gamma)^2} \sqrt{1+f_a'^2} \mu(Q) d\alpha \\ & \cong \pi \frac{N-L \cdot f_{a'}'}{\sqrt{1+f_{a'}'^2}} \mu(Q') - \int_{-\infty}^{\infty} \mu(Q) K(Q', Q) d\alpha \quad (A) \\ & P(x, z) \rightarrow Q(\alpha', \gamma') \end{aligned}$$

式中 α 、 γ 的意义与本文的 ξ 、 ζ 相同。下面的推导将符号统一起来。 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 表示积分应去掉以 P 点为中心的微小区域。

在 (A) 式中, 令 $L = -f'(\xi) = -f_a'$, $N = 1$, $\mu(Q) = H(Q)/\sqrt{1+f_a'^2}$, 则 2-2 式第一项积分, 当 $P \rightarrow Q$ 时变为

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi-z) - f'(\xi)(\xi-x)}{(\xi-x)^2 + (\xi-z)^2} H(Q) d\xi \\ & = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-f'(\xi)(x-\xi) + (z-\xi)}{(\xi-x)^2 + (\xi-z)^2} \cdot \sqrt{1+f_a'^2} \cdot \frac{H(Q)}{\sqrt{1+f_a'^2}} d\alpha \\ & \cong \pi \frac{1 - (-f_a') \cdot f_a'}{\sqrt{1+f_a'^2}} \cdot \frac{H(Q')}{\sqrt{1+f_a'^2}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi-z) - f'(\xi)(\xi-x)}{(\xi-x)^2 + (\xi-z)^2} H(Q) d\xi \\ & = \pi H(Q') + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi-z) - f'(\xi)(\xi-x)}{(\xi-x)^2 + (\xi-z)^2} H(Q) d\xi \quad (B) \end{aligned}$$

再在 (A) 式中令 $L = 1$, $N = f'(\xi) = f_a'$, $\mu(Q) = Z(Q)/\sqrt{1+f_a'^2}$, 2-2 式中第二项积分, 当 $P \rightarrow Q'$ 时, (A) 式中第一项等于零:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi-x) + f'(\xi)(\xi-z)}{(\xi-x)^2 + (\xi-z)^2} Z(Q) d\xi \\ & = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\xi) + f_a'(z-\xi)}{(\xi-x)^2 + (\xi-z)^2} \cdot \sqrt{1+f_a'^2} \cdot \frac{Z(Q)}{\sqrt{1+f_a'^2}} d\xi \\ & \cong \pi \cdot \frac{f_a' - f_a'}{\sqrt{1+f_a'^2}} \cdot \frac{Z(Q')}{\sqrt{1+f_a'^2}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi-x) + f'(\xi)(\xi-z)}{(\xi-x)^2 + (\xi-z)^2} Z(Q) d\xi \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi-x) + f'(\xi)(\xi-z)}{(\xi-x)^2 + (\xi-z)^2} Z(Q) d\xi \quad (C) \end{aligned}$$

上两式中 Q' 是曲线 l 上的点, (B)、(C)式是 P 无限趋近曲线 l 的结果。 P 点位于曲线上时, (B)、(C)两式中的约等号应改为等号, 将其代入2-2式便得当 P 点位于曲线 l 上的表达式:

$$H(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi-z)-f'(\xi)(\xi-x)}{(\xi-x)^2+(\xi-z)^2} H(Q) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi-x)+f'(\xi)(\xi-z)}{(\xi-x)^2+(\xi-z)^2} Z(Q) d\xi + \frac{1}{2} H(P) \quad 3$$

$$P(x, z) \in l$$

已知剖面上各测点的磁场垂直分量, 由3式可得出 N 个以水平分量 H 在各测点的值为未知数的积分方程式。该方程组能唯一确定各点磁场水平分量。

为了从3式中求得水平分量的值, 我们采用了迭代求解的方法。首先, 选定水平分量的迭代初值:

$$H_0(P) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi-x)+f'(\xi)(\xi-z)}{(\xi-x)^2+(\xi-z)^2} Z(Q) d\xi \quad 4$$

$$P(x, z) \in l$$

将3式稍加变换, 将求解水平分量的迭代式写成下列形式:

$$H_K(P) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi-z)-f'(\xi)(\xi-x)}{(\xi-x)^2+(\xi-z)^2} H_{K-1}(Q) d\xi + H_0(P) \quad 5$$

$$P(x, z) \in l$$

式中 H_0 由4式确定。理论模型计算表明, 用5式迭代计算求解, 结果是收敛的, 其值收敛于水平分量 H_0 。

(二) 水平分量向垂直分量的转换

从2-1式出发, 采用与垂直分量向水平分量转换相同的迭代方法求解。迭代初值如下式:

$$Z_0(P) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi-x)+f'(\xi)(\xi-z)}{(\xi-x)^2+(\xi-z)^2} H(Q) d\xi \quad 6$$

$$P(x, z) \in l$$

因此可将求解垂直分量的迭代式写成下列形式:

$$Z_K(P) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi-z)-f'(\xi)(\xi-x)}{(\xi-x)^2+(\xi-z)^2} Z_{K-1}(Q) d\xi + Z_0(P) \quad 7$$

$$P(x, z) \in l$$

上式中 Z_0 由6式确定。迭代结果收敛于垂向分量 Z_0 。

(三) 任意方向的磁场分量 ΔT 向水平分量和垂直分量的转换

在这里, 假设 ΔT 为总磁异常。根据文献[2]第425页: 已知 $\Delta T = Z_0 \sin I + H_0 \cos I \times \cos A$, 若把 ΔT 看作 Z_0 , 则有一个与 H_0 相应的模量为 ΔT_1 , $\Delta T_1 = H_0 \sin I - Z_0 \cos I \cos A$ (式中 I 为正常地磁场倾角, A 为磁北与剖面方向夹角)。因而可以采用前述关于由垂直分量向水平分量转换完全相同的方法, 用 ΔT 计算出 ΔT_1 , 再由下式计算出各点的磁场水平分量和垂向分量 (由 ΔT 和 ΔT_1 的关系式即可求得):

$$Z = \frac{\Delta T \sin I - \Delta T_1 \cos I \cos A}{\cos^2 I \cos^2 A + \sin^2 I} \quad 8$$

$$H = \frac{\Delta T \cos I \cos A + \Delta T_1 \sin I}{\cos^2 I \cos^2 A + \sin^2 I} \quad 9$$

综上所述,只要已知磁场在某一固定方向上的量,总可以计算出观测剖面上各点磁场水平分量和垂向分量。利用2-1、2-2式还可以计算出曲线1上方空间各点的各磁场分量,从而实现磁场各分量之间的转换和向上延拓。

理论模型检验结果

图2为某地一条实际地形剖面,长度以点距为单位。模型磁性体为水平圆柱体和一个向下一有限延深的厚板。对该模型进行了水平分量与垂向分量的互相转换、总磁场异常向水平分量和垂向分量的转换(设地磁倾角 $I=50^\circ$,磁北与剖面的夹角 $A=30^\circ$)。第三次迭代结果表明,用前述迭代方法进行磁场分量转换,收敛速度快,与理论磁异常曲线吻合甚好。对于磁异常绝对值大于500 γ 的点,其统计平均相对误差: $Z_a \rightarrow H_a$ 转换为1.18%; $H_a \rightarrow Z_a$ 转换为1.14%, $\Delta T \rightarrow Z_a$ 转换为0.72%。 $\Delta T \rightarrow H_a$ 转换为1.03%。

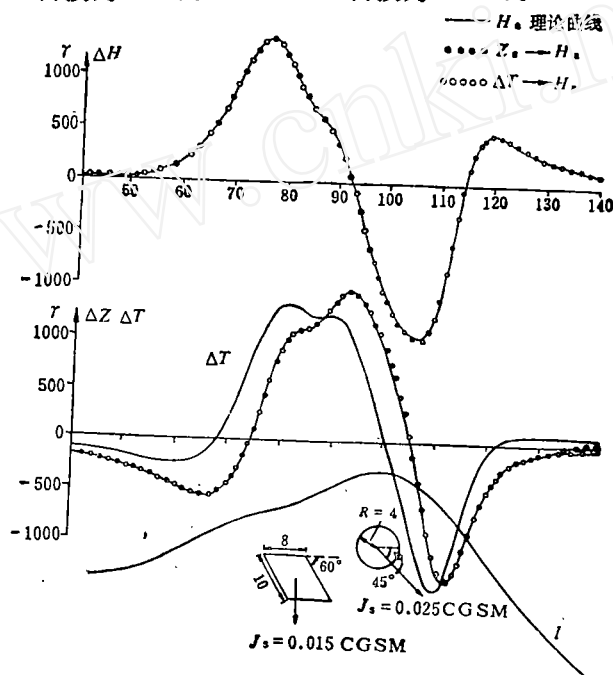


图 2

针对文中提出的方法,我们编制了由磁场任意分量转换为垂直分量和水平分量的计算程序,适用于水平或起伏地形的情况,由于篇幅所限,程序从略。

参 考 文 献

- 质出版社,1979年。
 [2] 管志宁等:地球物理学报,1985,第28卷,第4期。
 [1] 长春地质学院磁法教研室:《磁法勘探》,地

A Method for Transformation between Magnetic Anomaly Components and Upward Continuation over Two Dimensional Topography Relief

Xu Lianxi

Started from the integral formula of upward continuation for a two dimensional magnetic vector, a iteration method for conversion between magnetic components over a two dimensional topographic relief is described. Thereby a new approach, different from those methods based upon equivalent source, single or double layer potential field theory, for magnetic components transformation and upward continuation has been found.