第23卷 第9期
1987年9月

地质与勘探
GEOLOGY AND PROSPECTING

Vol. 23, No. 9
September, 1987

定向岩心结构面参数的计算公式

章兼植

介绍了用空间解析几何及球面三角推导定向岩心结构面产状计算公式的过程与结果。与国内现用的三种公式相比，本公式是可信的。特别是求解结构面倾角，能判定出是否需把倾向翻转180°。

钻 探 技 术

新公式的内容与意义

岩心定向技术的基本工作包括两方面的内容：一是从钻孔中取出定向岩心；二是确定定向心上结构面的产状——倾角与倾向。本文所讨论的问题，只涉及用计算法确定产状的问题。

确定产状有三种方法，其中，作图法与计算法都要预先测量定向岩心的基本参数，所用仪器比较简单。但由于下一步的作图与计算工作不直观，数据可信性受到怀疑。作图法与计算法相比，前者较为麻烦。

复位实测法所需的仪器比较复杂。其优点是直观，数据令人信服。

用小型计算器，配合计算法，可较快地得到结构面的产状，因而是一种快速有效的手段，可以作为确定结构面产状的主要方法。实测法则可用作验证手段。

作者通过空间解析几何及球面三角的推导，提出了下列计算公式：

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$$

$$\Delta\alpha = tg^{-1}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi\cos\theta - \sin\theta\, tg\delta} \quad (1)$$

$$\beta = tg^{-1}\frac{\cos\theta\, tg(\theta' - \delta')}{\sin\theta'} \quad (2)$$

$$\theta' = \cos^{-1}\cos\Delta\alpha\sin\theta \quad (3)$$

$$\delta' = tg^{-1}\frac{tg\delta\sin\theta'}{\cos\varphi\cos\Delta\alpha\cos\theta + \sin\varphi\sin\Delta\alpha} \quad (4)$$

式中：α—结构面倾向方位；β—结构面倾角；α_0—钻孔方位；$\Delta\alpha$—结构面倾向方位增量；θ—钻孔天顶角；δ 钻孔遇层角；φ—岩心上最高母线至结构面椭圆最低点的转角，顺时针方向取0～360°。

上述$\Delta\alpha$ 和β 值，还要按下述原则进行修正（计算出的值可标为$\Delta\alpha_0$、β_0）：

（1）当β_0 为正值，则$\Delta\alpha = \Delta\alpha_0$，$\beta = \beta_0$。

（2）当β_0 为负值，则$\Delta\alpha = 180° + \Delta\alpha_0$，$\beta = -\beta_0$。

表1列出了几种θ、δ 组合条件下，随着φ 的变化，$\Delta\alpha_0$、β_0 的变化情况和通过校正后的$\Delta\alpha$、β 数据。表中的$\Delta\alpha_0$、β_0 值是用FX—702计算器计算的，程序为：

```
LIST
 10  INP  A, B, C
 20  D = ATN(SIN A/(COSA
         * COSB - SINB * TANC)
 30  X = ACS(COSD * SINB)
 40  Y = ATN(TANC * SINX/
(COSA * COSD * COSB + SINA * SIND)
 50  W = ATN (COSB * TAN (X - Y)
         /SINX)
```

60 PRT D, W

程序中，A—φ；B—θ；C—δ；X—θ'；Y—δ'；D—$\Delta\alpha_0$；W—β_0。

在一定的θ、δ组合下，方位与倾角变化　　表1

θ与δ的组合条件	$\Delta\alpha_0$、β_0、$\Delta\alpha$、β	φ										
		0	1	30	90	150	179	180	181	270	359	360
$\theta=60$	$\Delta\alpha_0$	0	7.51	82.55	-69.82	-31.99	-1.15	0	1.15	69.82	-7.51	0
	β_0	7	7.06	27.66	-78.73	60.33	53.01	53	53.01	-78.73	7.06	7
$\delta=23$	$\Delta\alpha$	0	7.51	82.55	110.18	-31.99	-1.15	0	1.15	249.82	-7.51	0
	β	7	7.06	27.66	78.73	60.33	53.01	53	53.01	78.73	7.06	7
$\theta=20$	$\Delta\alpha_0$	0	-0.999	-23.95	-27.27	-10.29	-0.35	0	0.35	27.27	0.999	0
	β_0	-10	-10.002	-12.35	-22.27	-29.07	-29.99	-30	-29.99	-22.27	-10.002	-10
$\delta=80$	$\Delta\alpha$	180	179.001	156.05	152.73	-169.71	179.65	180	180.35	207.27	180.999	180
	β	10	10.002	12.35	22.27	29.07	29.99	30	29.99	22.27	10.002	10
$\theta=45$	$\Delta\alpha_0$	算不出	-89.65	-79.27	-54.74	-20.75	-0.71	算不出	0.71	54.74	89.65	算不出
	β_0	〃	-0.71	-21.1	-60	-86.16	-89.99		-89.99	-60	-0.71	〃
$\delta=45$	$\Delta\alpha$	—	90.35	100.73	125.26	159.25	179.29	—	180.71	234.74	269.65	—
	β	0	0.71	21.1	60	86.16	89.99	90	89.99	60	0.71	0

表中各种角的单位为度。

在用电子计算器（机）计算，有时会碰到一些无法处理的点，如表1中的$\theta=45°$。$\delta=45°$时的$\varphi=0$、$\varphi=180°$点。这些特殊点将在后面分析，它们是出现在$\beta=0$（结构面水平）、$\beta=90°$（结构面直立）或$\Delta\alpha=90°$（$\mathrm{tg}\Delta\alpha=\infty$）的情况下。

公式的推导过程

计算结果是否可靠，关键在于公式是否正确。下面讨论公式的推导过程。

图1给出了水平面与岩心正截面的关系。图2示出了结构面与岩心正截面的关系。图中，P—岩心正截面圆；H—水平面椭圆；S—岩心上结构面椭圆。

求H椭圆方程：

A、B、C为H椭圆上的三个点，各自的坐标为：A（O、$-R$、O）；C（O、R、$2R\mathrm{tg}\theta$）；B（R、O、$K\mathrm{tg}\theta$）；则有：

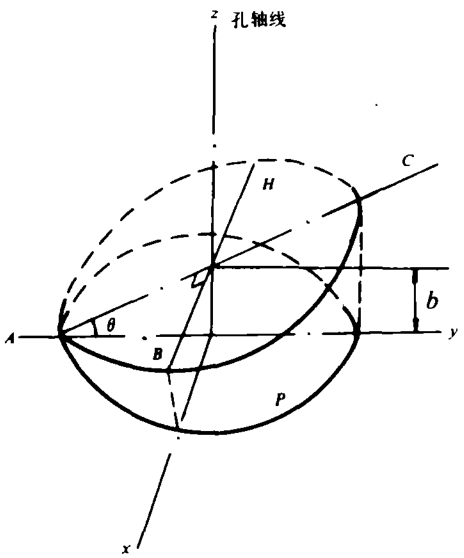

图1

$$\begin{vmatrix} X & Y+R & Z_H \\ 0 & 2R & 2R\mathrm{tg}\theta \\ R & R & R\mathrm{tg}\theta \end{vmatrix} = 0$$

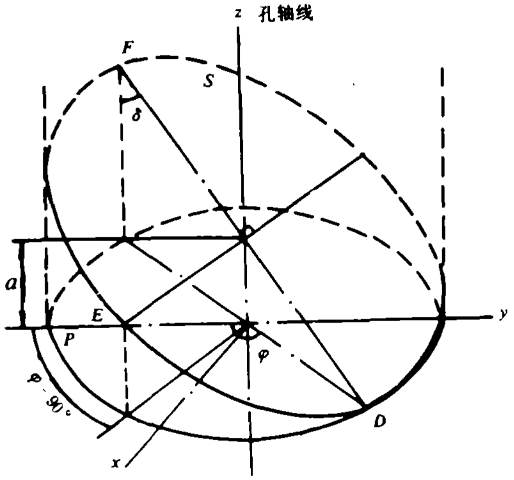

图 2

得出方程: $\begin{cases} Z_H = (Y+R)\operatorname{tg}\theta \\ X^2+Y^2=R^2 \end{cases}$

求S椭圆方程:

D、E、F为S椭圆上的三个点,其各自的坐标为: $D(R\sin\varphi,\ -R\cos\varphi,\ 0)$; $F(-R\sin\varphi,\ +R\cos\varphi,\ 2R\operatorname{ctg}\delta)$; $F(-R\cos\varphi,\ -R\sin\varphi,\ R\operatorname{ctg}\delta)$。

同理,得方程:

$$\begin{cases} Z_S=(y\cos\varphi-x\sin\varphi+R)\operatorname{ctg}\delta \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

令: H面沿z轴移$z_0=(a-b)=R(\operatorname{ctg}\delta-\operatorname{tg}\theta)$,使$S$、$H$两椭圆圆心重合,有$Z'_H=(Y+R)\operatorname{tg}\theta+R(\operatorname{ctg}\delta-\operatorname{tg}\theta)$,因$Z'_H=Z_S$,所以,得到两椭圆的交点方程:

$$\begin{cases} (Y+R)\operatorname{tg}\theta+R(\operatorname{ctg}\delta-\operatorname{tg}\theta) \\ \quad =(Y\cos\varphi-x\sin\varphi+R)\operatorname{ctg}\delta \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

化简为: $\begin{cases} y\operatorname{tg}\theta=(y\cos\varphi-x\sin\varphi)\operatorname{ctg}\delta & (5) \\ x^2+y^2=R^2 & (6) \end{cases}$

设: 交点在P圆上投影点的角坐标为φ',

则: $x=R\sin\varphi'$, $y=-R\cos\varphi'$,

将x、y代入(5)式化简:

$$\operatorname{tg}\varphi'\sin\varphi=-\cos\varphi+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\delta \qquad (7)$$

对H面,从球面三角(图3)可得:

$$\operatorname{tg}\Delta\alpha'=\operatorname{tg}\varphi'\sin(90°-\theta)$$
$$=\operatorname{tg}\varphi'\cos\theta \qquad (8)$$

将(7)式代入(8)式: $\operatorname{tg}\Delta\alpha'$

$$=\frac{\sin\theta\operatorname{tg}\delta-\cos\varphi\cos\theta}{\sin\varphi} \qquad (9)$$

其中, $\Delta\alpha'$—结构面走向的方位增量,求得$\Delta\alpha'$后, $\Delta\alpha=\Delta\alpha'+90°$,也可是$\Delta\alpha=\Delta\alpha'-90°$,但二者均使$\operatorname{tg}\Delta\alpha=-\operatorname{ctg}\Delta\alpha'$。

故(7)式可演为:

$$\Delta\alpha=\operatorname{tg}^{-1}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi\cos\theta-\sin\theta\operatorname{tg}\delta} \qquad (10)\ 即(1)$$

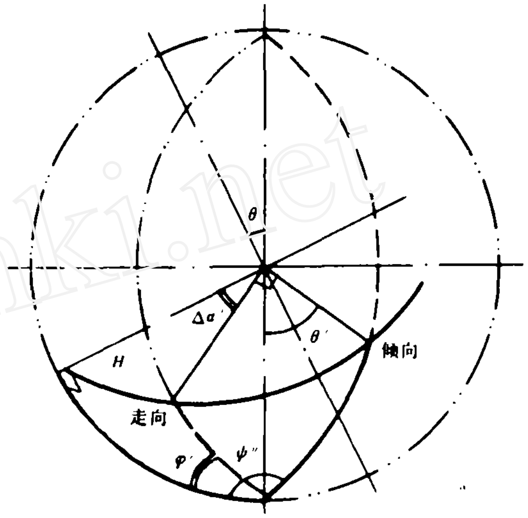

图 3

由图3还可求得: $\cos\theta'=\cos\Delta\alpha\sin\theta$

$$\theta'=\cos^{-1}\cos\Delta\alpha\sin\theta \qquad (11)\ 即(3)$$

$$\operatorname{tg}\varphi''=\frac{\operatorname{tg}\Delta\alpha}{\cos\theta} \qquad (12)$$

$$\sin\varphi''=\frac{\sin\Delta\alpha}{\sin\theta} \qquad (13)$$

对于S面,由球面三角(图4)得:

$$\operatorname{ctg}\delta'=\operatorname{ctg}\delta\cos(\varphi-\varphi'')$$
$$=\operatorname{ctg}\delta(\cos\varphi\cos\varphi''+\sin\varphi\sin\varphi'')$$
$$=\operatorname{ctg}\delta(\cos\varphi\operatorname{ctg}\varphi''+\sin\varphi)\sin\varphi''$$

将(12)、(13)代入此式有:

$$\operatorname{ctg}\delta'=\operatorname{ctg}\delta(\cos\varphi\frac{\cos\theta}{\operatorname{tg}\Delta\alpha}$$
$$+\sin\varphi)\frac{\sin\Delta\alpha}{\sin\theta'}$$

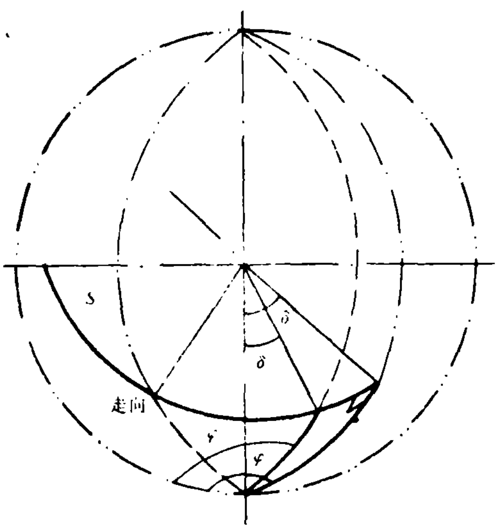

图 4

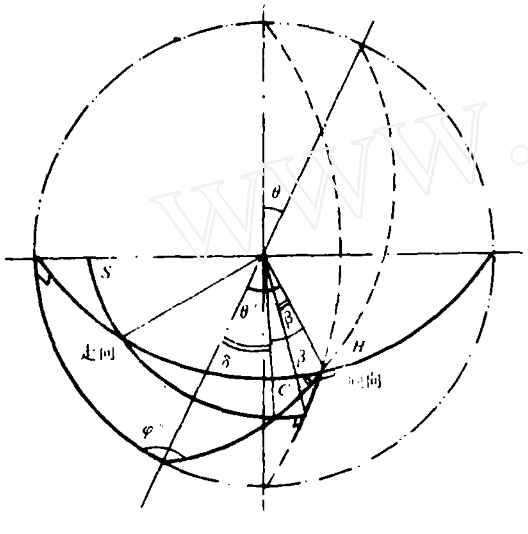

图 5

$$\delta' = tg^{-1}\frac{tg\delta\sin\theta'}{\cos\varphi\cos\Delta\alpha\cos\theta+\sin\varphi\sin\Delta\alpha}$$

（14）即（4）

图 5 是图 3、图 4 的合并图，把 H 面置于水平面位置，并画出倾向铅垂面，图中 β 角则为倾角。由图 5 求得：

$$\sin C=\frac{\cos\varphi''}{\cos\Delta\alpha}=\frac{ctg\varphi''\sin\varphi''}{\cos\Delta\alpha}$$

$$=\frac{\cos\theta}{tg\Delta\alpha}\cdot\frac{\sin\Delta\alpha}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\Delta\alpha}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta'}$$

$$\cos(90^\circ-C)=ctg\beta'\ tg\beta=\sin C,$$

$$tg\beta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta'}tg\beta'$$

$$\beta=tg^{-1}\frac{\cos\theta tg(\theta'-\delta')}{\sin\theta'}$$

（15）即（2）

从（15）式可知，β 值可在 $\pm 90^\circ$ 之间，但实际所用倾角均取正值，因而在计算中如出现负值，说明结构面倾向与计算倾向相反，这时，可按前述原则进行修正。

值得说明的是，在推导公式时，$\Delta\alpha$、φ 是按数学习惯，以反时针方向取值的。而实际应用时，$\Delta\alpha$ 是按顺时针方向取值的，因而，φ 也要按顺时针方向取值。这并不影响 $\Delta\alpha$、β 计算公式的正确性。这可以用 $\Delta\alpha$、φ 均取负值，代入（1）、（3）、（4）式校验，所得结果与取正值结果一致而得到证明。说明公式是可信的。

与国内现用公式的比较

在本文之前，国内已推荐和应用了一些计算定向岩心结构面产状的公式。现将本公式和其他公式一并列于表 2，进行比较讨论。

Ⅰ号和Ⅱ号公式均采用了 φ，其起点是岩心柱面的最高母线；Ⅲ号和Ⅳ号公式均采用 φ_0，其起点是岩心柱面最低母线。$\varphi_0=\varphi+180^\circ$。把 $-\varphi=180^\circ-\varphi_0$ 代入Ⅰ号公式，

则有：

$$\Delta\alpha=tg^{-1}\frac{-\sin\varphi_0}{-\cos\varphi_0\cos\theta-\sin\theta tg\delta}$$

$$=tg^{-1}\frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0\cos\theta+\sin\theta tg\delta}$$

可见Ⅰ号和Ⅳ号的 $\Delta\alpha$ 计算公式是等值的，同样可以证明Ⅱ号和Ⅲ号的 $\Delta\alpha$ 公式是一致的。

用我们研制的 YDC 仪进行复位实测验证，Ⅰ号和Ⅳ号公式的 $\Delta\alpha$ 计算值是可信的。

由表 2 可见，β 的计算公式在形式上各不相同。

表 3 是在 $\theta=60^\circ$、$\delta=23^\circ$ 的条件下，列出

部分倾角数值表 表3

	φ	0	180	200	250	255.81	255.82	260	310	315	320
	$\Delta\alpha_0$	0	0	22.215	60.179	63.179	63.184	65.229	86.548	88.615	−88.626
Ⅰ号		7	53	56.376	85.567	89.997	−89.995	−86.736	−44.945	−40.619	36.289
Ⅱ号	β_0	算不出	算不出	−56.376	−85.567	−89.997	−89.995	−86.736	−44.945	−40.619	36.289
Ⅳ号		算不出	算不出	56.376	85.567	89.997	89.995	86.736	44.945	40.619	36.289
	Z_3	/	/	+	+	+	−	−	−	−	−

了Ⅰ、Ⅱ和Ⅳ号公式的部分β的计算值β_0。表中所用的$\Delta\alpha_0$值是由Ⅰ、Ⅳ号的$\Delta\alpha$公式的算出值。

Ⅳ号公式算出的β_0均为正号，最终值$\beta=\beta_0$。$\Delta\alpha_0$按下列原则进行修正：

（1）$\Delta\alpha_0 < 0$时，$\Delta\alpha = 180° + \Delta\alpha_0$

（2）$\Delta\alpha_0 < 0$、$z_3 < 0$时，$\Delta\alpha = 360° + \Delta\alpha_0$

Ⅱ号公式的作者未给出修正原则。

注意表中φ值从250°到260°变化时的倾角变化情况，发现在φ值为255.81～255.82°之间存在着结构面直立的点，即在该点发生了倾向的翻转和突变。

按Ⅰ号公式及其修正原则可得：

$\varphi = 255.81°$时，$\Delta\alpha = 63.179°$，$\beta = 89.997°$

$\varphi = 255.82°$时，$\Delta\alpha = 63.184° + 180°$，

$\beta = 89.995°$。

按Ⅳ号公式及其修正原则可得：

$\varphi = 255.81°$时，$\Delta\alpha = 63.179°$，$\beta = 89.997°$

$\varphi = 255.82°$时，$\Delta\alpha = 63.184°$，$\beta = 89.995°$。

公式Ⅰ的值反映出了倾向的翻转。公式Ⅳ的值未能反映，可见此式有问题。

公式Ⅳ在$\varphi = 310～320°$时，也不正确。这也很容易看出。：

按Ⅰ号公式得：

$\varphi = 310°$时，$\Delta\alpha = 86.548° + 180° = 266.548°$，$\beta = 44.954°$

$\varphi = 320°$时，$\Delta\alpha = -86.626°$（即271.374°），$\beta = 36.289°$。

按Ⅳ号公式得：

$\varphi = 310°$时，$\Delta\alpha = 86.548°$，$\beta = 44.945°$

$\varphi = 320°$时，$\Delta\alpha = -88.626° + 360° = 271.374°$，$\beta = 36.289°$。

公式Ⅳ出现了倾向的突变。

公式Ⅱ在$\varphi = 255.81～255.82°$时，计算倾角均为负值，无法判别是否有倾向翻转现象。

由上述分析可知，公式Ⅱ和Ⅳ不仅存在着$\varphi = 0°$、$\varphi = 180°$时算不出的问题，而且也未解决倾向翻转和突变问题（Ⅳ号公式），甚至难以解决这个问题（Ⅱ号公式）。这是两个公式的缺点。

计算$\Delta\alpha$时，用Ⅰ号和Ⅳ号公式均可，两式的相互转换关系为$\varphi_0 = \varphi + 180°$。但用这两个公式，均有一些特殊点需另作处理。

以公式$\Delta\alpha = tg^{-1}\dfrac{\sin}{\cos\varphi\cos\theta - \sin\theta tg\delta}$

来进行分析：

（1）当$\varphi = 0$、$\cos\varphi\cos\theta - \sin\theta tg\delta = 0$时，$\cos 0°\cos\theta - \sin\theta - \sin\theta tg\delta = 0$，$tg\theta tg\delta = 1$，$\theta + \delta = 90°$。

结构面水平，无倾角，无倾向。

（2）当$\varphi \neq 0$、$\cos\varphi\cos\theta - \sin\theta tg\delta = 0$时，$tg\Delta\alpha = \infty$，$\Delta\alpha = 90°$，$\beta$可由公式求得。

（3）当$\varphi = 180°$、$\theta = \delta$时，结构面直立（$\beta = 90°$），$tg\Delta\alpha' = \infty$，$\Delta\alpha' = 90°$ —走向增量。

（4）当φ为任意、$\delta = 90°$时，$\Delta\alpha = 180°$，$\beta = \theta$。

岩心定向技术是岩心钻探的一个新的发展，已越来越多地受到人们的重视，工作量也日益增大。因而，在具备了岩心测角仪的同时，还要有一个方便、正确的计算定向岩心结构面产状的公式。文中提出的公式还有待于在实践中进一步考验。

四种公式对照表 表2

编号	公式来源	走向方位增量公式$\Delta\alpha'$	倾向方位增量公式$\Delta\alpha$	倾角公式β
Ⅰ	本文	$tg^{-1}\dfrac{\sin\theta\, tg\delta - \cos\varphi\cos\theta}{\sin\varphi}$	$tg^{-1}\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi\cos\theta - \sin\theta\, tg\delta}$	$tg^{-1}\dfrac{\cos\theta\, tg(\theta' - \delta')}{\sin\theta'}$ $\theta' = \cos^{-1}\cos\Delta\alpha\sin\theta$ $\delta' = tg^{-1}\dfrac{tg\delta\sin\theta'}{\cos\varphi\cos\Delta\alpha\cos\theta + \sin\varphi\sin\Delta\alpha}$
Ⅱ	高森		$tg^{-1}\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta\, tg\delta - \cos\varphi\cos\theta}$	$\sin^{-1}\dfrac{\cos\delta\sin\varphi}{\sin\Delta\alpha}$
Ⅲ	吴光琳	$tg^{-1}\dfrac{\sin\theta\, tg\delta + \cos\varphi_0\cos\theta}{\sin\varphi_0}$	$tg^{-1}\dfrac{-\sin\varphi_0}{t\sin\theta\, tg\delta + \cos\varphi_0\cos\theta}$ *	$90^\circ - \delta + \dfrac{\theta \times \Delta\alpha'}{90^\circ}$
Ⅳ	冶金部保定勘察所		$tg^{-1}\dfrac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0\cos\theta + \sin\theta\, tg\delta}$	$tg^{-1}\dfrac{\lvert z_3 \rvert}{\sqrt{x_3^2 + 1}}$ $x_3 = \dfrac{\cos\varphi_0\cos\theta + \sin\theta\, tg\delta}{\sin\varphi_0}$ $z_3 = \dfrac{(\cos\delta\cos\varphi_0\cos\theta + \sin\delta\sin\theta)^2 + \sin^2\varphi_0\cos^2\delta}{\sin\varphi_0\cos\delta(\cos\delta\cos\varphi_0\sin\theta - \cos\theta\sin\delta)}$

①表中公式均统一了符号，并对有关公式进行了简化；②$\varphi_0 = \varphi + 180^\circ$；③Ⅲ中原文没提供$\Delta\alpha$公式，本文作者据$tg\Delta\alpha = -ctg\Delta\alpha'$推导出来的；④Ⅱ号公式来源于《钻孔弯曲的计算和图解法》（P72）；⑤Ⅲ号公式来源于本刊1981年，第11期，74页。

A Formula for Calculating the Parameter of the Sturucture Plane of an Oriented Core

Zhang Jiangzhi

(*Research Institute of Geology for Mineral Resources, CNNMIC*)

Abstract

Based upon spatial analytic geometry and spherical trigonometry, a formula for calculating the mode of occurrence of the structure plane of an oriented core has been derived. In the present paper the derivation process and result are given. In comparison with conventional formulae, the formula we derived assures us its soundness particularly in calculating the dip of the structure plane. It is superior to other formulae because it can easily to determine whether a turning 180 for the dip is necessary or not。