

用希尔伯特变换解释三度体重力异常

王硕儒 于 涛

(山东海洋学院)

本文导出了某些三维规则形体重力异常的希尔伯特变换式。以球体和无限长直立圆柱体为例,利用异常中心剖面中心部位异常数据的转换值,进行反演定解释,所得结果精度是令人满意的。

希尔伯特变换是在富里叶变换的基础上形成的一种数据处理方法。它在二度体重磁异常的定量解释中已得到初步应用^[1,2,3]。但自然界中普遍存在的是三度体。本文给出了某些规则三度体重力异常的希尔伯特变换及其解释方法。

函数 $g(x)$ 的希尔伯特变换可具有两种定义式^[3] :

$$\tilde{g}_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [G_I(\omega) \cos \omega x + G_R(\omega) \sin \omega x] d\omega \quad (1)$$

和

$$\tilde{g}_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [G_I(\omega) \cos \omega x - G_R(\omega) \sin \omega x] d\omega \quad (2)$$

(1)式表示的希尔伯特变换就是二维场的分量。当 $g(x)$ 为偶函数时,其富里叶变换的虚部 $G_I(\omega)=0$,希尔伯特变换 $\tilde{g}_1(x)$ 与 $\tilde{g}_2(x)$ 相同。

垂直圆柱体

1.无限延伸圆柱

$$g(x) = \delta (x^2 + y^2 + z_0^2)^{-1/2} \quad (3)$$

它的富里叶变换

$$G(\omega) = 2\delta \int_0^{\infty} (x^2 + y^2 + z_0^2)^{-1/2} \cos \omega x dx$$

积分得^[4] :

$$G(\omega) = 2\delta K_0(\omega Z) \quad (4)$$

式中, $K_0(\omega Z)$ 为虚宗量零阶第二类贝赛尔函数; $Z = (y^2 + z^2)^{1/2}$ 。

由此, $g(x)$ 的希尔伯特变换

$$\tilde{g}(x) = \frac{2\delta}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\omega Z) \sin \omega x d\omega$$

该贝赛尔积分为^[5]

$$\tilde{g}(x) = \frac{2\delta}{\pi} (x^2 + z^2)^{-1/2} \sinh^{-1}(x/z) \quad (5)$$

其中, $\sinh^{-1}(\cdot)$ 为反双曲正弦函数。

按(3)、(5)两式,

$$\frac{\tilde{g}(x)}{g(x)} = \frac{2}{\pi} \sinh^{-1}(x/z) \quad (6)$$

2. 有限延深圆柱

$$g(x) = \delta \left[(x^2 + y^2 + z_{01}^2)^{-1/2} - (x^2 + y^2 + z_{02}^2)^{-1/2} \right] \quad (7)$$

同(5)式, 可得

$$\tilde{g}(x) = \frac{2\delta}{\pi} \left[\frac{\sinh^{-1}(x/z_1)}{(x^2 + z_1^2)^{1/2}} - \frac{\sinh^{-1}(x/z_2)}{(x^2 + z_2^2)^{1/2}} \right] \quad (8)$$

其中, $z_1 = (y^2 + z_{01}^2)^{1/2}$; $z_2 = (y^2 + z_{02}^2)^{1/2}$ 。

从而

$$\frac{\tilde{g}(x)}{g(x)} = \frac{2}{\pi} \frac{(x^2 + z_2^2)^{1/2} \sinh^{-1}(x/z_1) - (x^2 + z_1^2)^{1/2} \sinh^{-1}(x/z_2)}{(x^2 + z_2^2)^{1/2} - (x^2 + z_1^2)^{1/2}} \quad (9)$$

当 $\tilde{g}(x_0) = g(x_0)$ 时,

$$\frac{(x_0^2 + z_1^2)^{1/2}}{(x_0^2 + z_2^2)^{1/2}} = \frac{1 - (2/\pi) \sinh^{-1}(x/z_1)}{1 - (2/\pi) \sinh^{-1}(x/z_2)} \quad (10)$$

球

$$g(x) = \frac{\alpha z_0}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}} \quad (11)$$

因

$$G(\omega) = 2\alpha z_0 \int_0^\infty (x^2 + y^2 + z_0^2)^{-3/2} \cos \omega x dx$$

由(4)式对 z_0 求导

$$\frac{\partial}{\partial z_0} \int_0^\infty (x^2 + y^2 + z_0^2)^{-1/2} \cos \omega x dx = \frac{\partial}{\partial z_0} K_0(\omega \sqrt{y^2 + z_0^2})$$

整理得

$$G(\omega) = 2\alpha z_0 \omega K_1(\omega z) \quad (12)$$

由此

$$\tilde{g}(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \left[z_0 (x^2 + z^2)^{-3/2} \sinh^{-1}(x/z) + z_0 x z^{-2} (x^2 + z^2)^{-1} \right] \quad (13)$$

同理,

$$\frac{\tilde{g}(x)}{g(x)} = \frac{2}{\pi} \left[\sinh^{-1}(x/z) + x z^{-2} (x^2 + z^2)^{1/2} \right] \quad (14)$$

算 例

异常的希尔伯特变换可以按(1)、(2)式在空间域进行,也可以对 $\tilde{g}(x)$ 作富里叶变换在频率域进行。当 $g(x)$ 是偶函数时,

$$G(\omega) = \begin{cases} -jG_R(\omega) & \omega > 0 \\ jG_R(\omega) & \omega < 0 \end{cases} \quad (15)$$

式中, $j = \sqrt{-1}$ 。这种方法自然更简便。只要将异常富里叶变换(FFT)后的 $\omega > 0$ 的实部数据变号,实部与虚部互换后的实部数据置零,再作富里叶变换(FFT⁻¹),结果即为所求的希尔伯特变换。

例 1: 球

$\alpha = 10^5$, $Z_0 = 10^3$, 点距取500。计算了中心剖面64个点重力异常值的希尔伯特变换。结果是,异常中心附近13个点的相对误差小于10%,以外点的误差逐渐增大;这是由于吉布斯效应的影响,中央部分的计算结果示于图1。

因此,作定量解释可按异常中间部位的转换值来进行,用(14)作反演,因其为超越函数,故可用最简单的二分法求它的根 Z_0 。仍以图1所示的中心剖面求解,用计算的 $\tilde{g}(x)/g(x)$ 值计算结果如表1所示。10个点用二分法求解的平均值 $\bar{Z}_0 = 1054$ 。平均相对误差为5.4%。

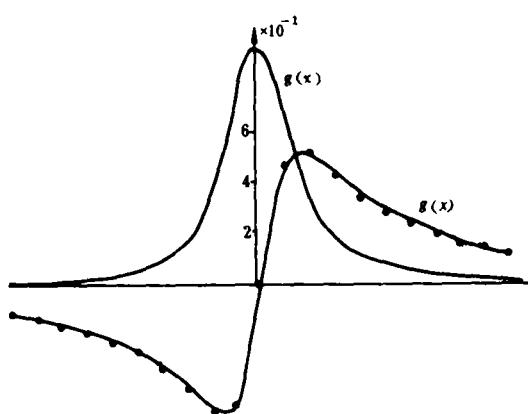


图1 球体重力异常及其希尔伯特变换(中心剖面)

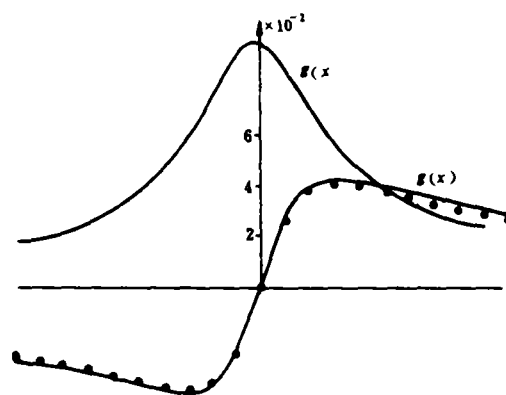


图2 直立柱体重力异常的希尔伯特变换(中心剖面)

点线—计算值; 实线—理论值

点线—计算值; 实线—理论值

球 体 反 演 结 果

表 1

x		500	1000	1500	2000	2500
$\Delta \tilde{g}(x)$	理 论	0.6622	1.461	2.482	3.766	5.334
	计 算	0.6657	1.444	2.486	3.684	5.287
Z_0		987.9	1039.8	992.7	1157.7	1083.3

例 2: 无限圆柱 (直立)

参数值同球体。计算结果如图 2 所示。

据 (6) 式用计算 $\tilde{g}(x)/g(x)$ 值按两方法求解结果列于表 2。

柱 体 反 演 结 果 表 2

x		500	1000	1500	2000	2500
$\tilde{g}(x)$	理 论	0.3063	0.5611	0.7606	0.9190	1.0490
$g(x)$	计 算	0.3032	0.5512	0.7440	0.8890	1.0066
z_0		1011.2	1022.4	1032.0	1054.5	1075.2

$z_0 = 1093$, 误差和上例相近。

由此可以得出结论, 以 64 个点作变换计算, 用异常中心部位数据作反演, 精度不低于 10% 整个工作可在 PC-1500 微机上进行, 取样 64 个, 运行时间总计不超过 20 分钟。

参考文献

- (1) Mohan, N. L. et al.: Geophysics, 1962, v. 47, No 3
- (2) 李九亮: 地质与勘探, 1983, 第 11 期
- (3) 王硕儒等: 山东海洋学院学报, 1983, 第 3 期
- (4) Pattella, D.: Geophys. Prosp., 1980, No 5
- (5) Watson, C. N.: A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge at the press, 1952, p. 388

Interpretation of 3D Gravity Anomalies by Hilbert Transformation

Wang Shuoru Yu tao

(Shandong College of Oceanology)

Abstract

In this paper Hilbert Transforms for gravity anomalies of some regularly shaped three dimensional bodies are derived. Taking a sphere and a vertical cylinder of infinite length as two examples, quantitative interpretations are carried out by making use of the transformed values of the data over the central part of the principal anomaly profile. The accuracy for the interpretation is satisfactory.

作者更正

1987 年第 2 期 32 页右边第 7 行 $a_0 > 1.9125$, 应为 $a_0 > 4.9125$ 。