

二维良导体的电阻率及面激发极化异常的计算

徐世浙 刘云峰

(山东海洋学院) (中国科技大学)



物探与化探

文献 [1, 2] 讨论了计算水平地形下三维矿体的面激发极化异常的方法。但对于走向延伸较长的矿体, 用三维模型来计算, 需要对整个矿体的表面进行剖分, 工作量较大, 同时占用计算机内存和所需的计算量也较大, 显然是不太合适的。本文提出的水平地形点源二维良导体的电阻率及面激发极化异常的边界元解法, 适用于计算这种情况下的电阻率及面激发极化异常。本方法只需在矿体截面的边界上进行剖分, 原始数据的准备工作简单, 加之引进了理想导体的假定, 使所需计算机的内存和计算量都大大减少, 便于在微型机上实现运算。下面分别对电阻率及面激发极化情况进行讨论。

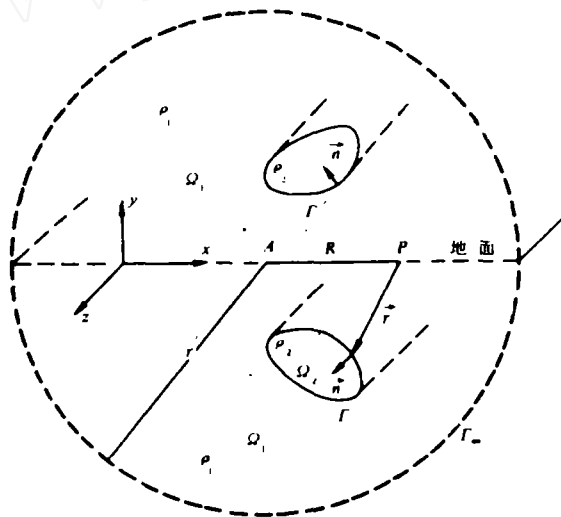


图1. 区域和边界

电 阻 率 法

如图1所示, 在水平地形下埋藏有沿走向无限延伸的矿体。假定矿体是理想导体, 其电阻率 $\rho_2 = 0$, 围岩电阻率为 ρ_1 , 在地面A点放置强度为 I 的点电源。用镜象法以地面为对称面, 把地下介质映射到上半空间, 并把电流强度改为 $2I$ 。由唯一性定理可证明, 此时地下部分的电场分布和原来完全相同。再对映射后的全空间问题进行求解。选取坐标系的 z 轴平行地形走向, x 轴垂直, z 轴, 保持水平并通过点源A, y 轴垂直向上。用 Q_1 , Q_2 分别表示围岩和矿体的区域, Γ 为矿体和围岩的边界, Γ' 是上半空间象矿体和围岩的分界面, u 和 v 分别表示 Q_1 , Q_2 中的位函数。在 Q_1 中 u 满足:

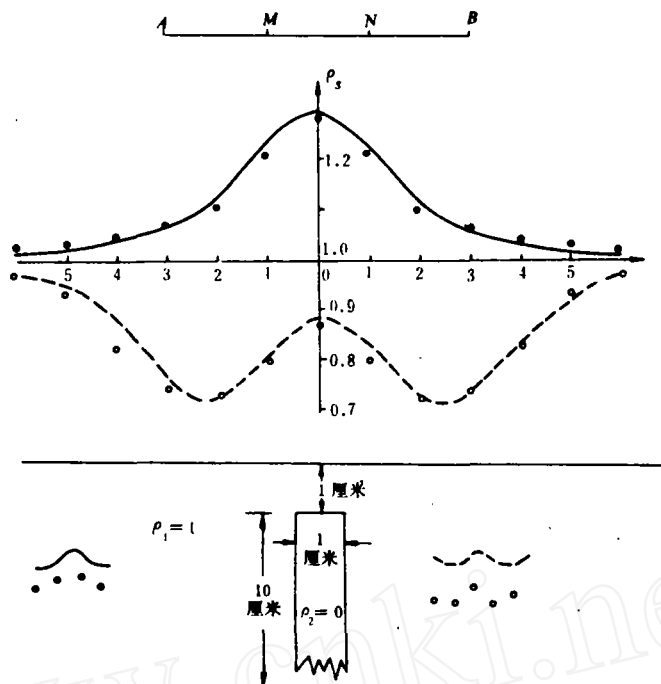


图2 本方法与 Eskola 法及 Guptasarma 模型实验结果的比较

- 1—有面极化效应时, Eskola 对三维模型的计算结果 (模型大小 $1 \times 10 \times 50$ 厘米);
- 2—有面极化效应时, 本方法对二维模型的计算结果 (模型大小 1×10 厘米);
- 3—频率1000赫时, Guptasarma 的模型实验结果 (模型大小 $1 \times 10 \times 98$ 厘米);
- 4—无面极化效应时, 本方法对二维模型的计算结果 (模型大小 1×10 厘米)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2I\rho_1 \delta_3(A) \quad (1.1)$$

其中 $\delta_3(A)$ 是以电源点 A 为中心的三维狄拉克函数, 为了和后面的二维情况相区别, 加注了脚标 3。

因为 $\rho_2 = 0$, Ω_2 中的位 $v = K$ 是一常数。

以电流点为中心, 以 $r' = \infty$ 为半径, 平行地形走向, 作一假想的圆柱面 Γ_∞ , Γ_∞ 上的电位是点电源的电位。

$$u|_{\Gamma_\infty} = C / (r'^2 + z^2)^{1/2} \quad (1.2)$$

其中 C 为比例系数。

矿体表面上的边界条件为

$$u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = K \quad (1.3)$$

微分方程 (1, 1) 和边界条件 (1, 2), (1, 3) 构成了三维边值问题。下面对其进行傅里叶变换, 使之变成二维边值问题, 再进行处理。

考虑到 u 是 z 的偶函数, 定义下列傅氏变换:

$$U(x, y, k) = \int_0^\infty u(x, y, z) \cos kz \, dz \quad (1.4)$$

记作 $U = F[u]$ 。根据傅里叶变换的性质, 有

$$F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] = -k^2 U$$

此外还有

$$\int_0^{\infty} \delta_3(A) \cos kz \, dz = \frac{\delta(A)}{2}$$

其中 $\delta(A)$ 是以 A 为中心的二维 δ 函数。利用以上结果, 对 (1, 1) 进行傅氏变换, 得:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - k^2 U = -I\rho_1 \delta(A)$$

记作:

$$\nabla^2 U - k^2 U = -I\rho_1 \delta(A) \quad (1.5)$$

其中: ∇^2 是二维哈密顿算子。方程 (1, 5) 是二维的, k 作为参数出现在方程中, 若对足够多的 k 求解方程 (1, 5), 然后进行傅氏反变换

$$u(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U(x, y, k) \cos kz \, dk \quad (1.6)$$

即可求得电位函数 u 。实际计算表明, 只要选取 9 个 k , 便可用于傅氏反变换。

下面再对边界条件 (1, 2), (1, 3) 进行傅氏变换。变换后的二维区域及其边界仍用对应的三维时的符号 $Q_1, Q_2, \Gamma, \Gamma', \Gamma_\infty$ 表示。对 (1, 2) 进行变换, 有

$$U|_{r=\infty} = \int_0^{\infty} u(x, y, z) \cos kz \, dz = C \int_0^{\infty} \frac{\cos kz}{(r'^2 + z^2)^{1/2}} \, dz = CK_0(kr') \quad (1.7)$$

其中 K_0 是第二类零阶修正贝塞尔函数。对 (1, 3) 进行傅氏变换, 可写成:

$$U|_r = \int_0^{\infty} K \cos kz \, dz = K \int_0^{\infty} \cos kz \, dz$$

显然在古典意义下, 上式是不收敛的。我们作如下处理。考虑函数 $e^{-\beta z}$ 的傅氏变换:

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta z} \cos kz \, dz = \frac{\beta}{k^2 + \beta^2} \quad (1.8)$$

其中 β 是参变量, 命其趋于零, 对 (1, 8) 两边取极限, 有:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\beta z} \cos kz \, dz = \int_0^{\infty} \lim_{\beta \rightarrow 0} e^{-\beta z} \cos kz \, dz = \int_0^{\infty} \cos kz \, dz = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\beta}{k^2 + \beta^2} = 0$$

则有

$$U|_r = K \int_0^{\infty} \cos kz \, dz = 0 \quad (1.9)$$

本来不收敛的积分, 现在等于零, 原因是在上面的计算过程中, 将积分号和极限号进行了交换。在古典意义下, 这样做是不允许的, 因此得到上面矛盾的结果。但在许多工程问题中, 如果将积分号和极限号进行交换, 得到的最后结果将是正确的^[3]。因这样的变换是在广义意义下的, 故称之为广义傅里叶变换。后面的计算表明, 广义傅里叶变换对我们这一问题也是适用的。从物理意义上来看, 因为矿体是理想导体, 即等位体, 且延伸到无穷远, 而无穷远处的电位为零, 因此当把其变成二维问题时, 矿体的电位为零, 似乎是合理的。

(1, 5), (1, 7), (1, 9) 是傅里叶变换后的二维边值问题, 下面用二维格林公式

$$\int_{\Omega_1} (U \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 U) \, dQ = \oint_{\Gamma_+ + \Gamma + \Gamma'} \left(U \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial U}{\partial n} \right) \, d\Gamma \quad (1.10)$$

把二维边值问题, 化为积分方程来求解。

在 (1, 10) 中, 选取

$$\varphi = K_0(kr)/2\pi \quad (1.11)$$

其中 r 是 Q_1 中某点 P 至 Q_1 中任意点的距离, φ 具有如下特性:

$$\nabla^2 \varphi - k^2 \varphi = -\delta(P) \quad (1.12)$$

其中 $\delta(P)$ 是以 P 点为中心的二维狄拉克函数。将(1.5)和(1.12)代入(1.10)式的左侧,有:

$$\int_{\Omega_1} (U \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 U) d\Omega = - \int_{\Omega_1} U \delta(P) d\Omega + \int_{\Omega_1} \varphi I \rho_1 \delta(A) d\Omega = - \frac{\omega_p}{2\pi} U(P) + \frac{I \rho_1}{2\pi} K_0(kR) \quad (1.13)$$

其中 R 是 A 点至 P 点的距离, ω_p 是 P 点对 Ω_1 的张角,即二维立体角。

将(1.7)代入(1.10)右边,对边界 Γ_∞ 来说, $r' \rightarrow \infty$,故有 $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}$,于是有

$$\int_{\Gamma_\infty} (U \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial U}{\partial n}) d\Gamma = \int_{\Gamma_\infty} (U \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial U}{\partial r}) d\Gamma = \int_{\Gamma_\infty} \left[- \frac{CkK_0(kr')K_1(kr)}{2\pi} + \frac{CkK_0(kr)K_1(kr')}{2\pi} \right] d\Gamma = 0 \quad (1.14)$$

下面计算边界 Γ, Γ' 的积分,先考虑

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{K_0(kr)}{2\pi} \right] \cos(\vec{r}, \vec{n}) = -k \frac{K_1(kr)}{2\pi} \cos(\vec{r}, \vec{n})$$

将上式及(1.9),(1.11)代入(1.10)右边,有:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma+\Gamma'} (U \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial U}{\partial n}) d\Gamma &= - \oint_{\Gamma} k \frac{K_0(kr)}{2\pi} \cos(\vec{r}, \vec{n}) U d\Gamma - \oint_{\Gamma} \frac{K_0(kr)}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma - \\ &- \oint_{\Gamma'} k \frac{K_1(kr)}{2\pi} \cos(\vec{r}, \vec{n}) U d\Gamma' - \oint_{\Gamma'} \frac{K_0(kr)}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma' = - \oint_{\Gamma} \frac{K_0(kr)}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma - \\ &- \oint_{\Gamma'} \frac{K_0(kr)}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (1.15)$$

把(1.13),(1.14),(1.15)代入(1.10),有

$$\frac{\omega_p}{2\pi} U(P) = \frac{I \rho_1}{2\pi} K_0(kR) + \oint_{\Gamma} \frac{K_0(kr)}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma'} \frac{K_0(kr)}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma \quad (1.16)$$

如果 P 点位于地表,这时 $\omega_p = 2\pi$,考虑到 Γ 和 Γ' 的对称性,有

$$U(P) = \frac{I \rho_1}{2\pi} K_0(kR) + 2 \oint_{\Gamma} \frac{K_0(kr)}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma \quad (1.17)$$

(1.17)表明,如果知道 Γ 上的 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 值,便可以求得地表任意点的 U 。下面讨论求边界 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 值的积分方程。命 P 点在 Γ 上,这时有 $U(P) = 0$,那么(1.16)便成为:

$$0 = \frac{I \rho_1}{2\pi} K_0(kR) + \oint_{\Gamma} \frac{K_0(kr)}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma + \oint_{\Gamma'} \frac{K_0(kr)}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma \quad (1.18)$$

求解(1.18)便可得边界 Γ 上的 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 值,再通过(1.17)即可以求得地表上的 U 。下面用边界单元法^[4]求解这一积分方程。

用 n 个节点把 Γ 剖分成 n 个单元,每个单元 Γ_e 近似为直线,将边界积分分解为诸单元的积分之和。由(1.18)对节点 i 可写成:

$$U_{0i} + \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma_e} \frac{K_0(kr)}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma + \sum_{\Gamma'} \int_{\Gamma_e} \frac{K_0(kr)}{2\pi} \frac{\partial U}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (1.19)$$

其中 U_{0i} 表示 U_0 在 i 点的值, $U_0 = \frac{I\rho_1}{2\pi} K_0(kR)$ 是正常场的位。

单元两端节点编号为 l, m , 其坐标为 $(x_l, y_l), (x_m, y_m)$, 为了进行单元积分, 作如下坐标变换:

$$\xi_l = \frac{xy_m - x_my}{x_ly_m - x_my_l}, \quad \xi_m = 1 - \xi$$

ξ_l, ξ_m 是 x, y 的线性函数, 且满足:

$$\begin{aligned} l \text{ 点: } & \xi_l = 1, \quad \xi_m = 0; \\ m \text{ 点: } & \xi_l = 0, \quad \xi_m = 1. \end{aligned}$$

假定 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 在单元上是线性变化的, 用 $(\frac{\partial U}{\partial n})_l, (\frac{\partial U}{\partial n})_m$ 表示 l, m 点的 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 值, 则在单元上

$\frac{\partial U}{\partial n}$ 可表示为:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \sum_j \xi_j \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_j \quad (j = l, m)$$

单元 Γ_e 上的积分为

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right) \frac{K_0(kr)}{2\pi} d\Gamma &= \sum_{j=l,m} \left(\int_{\Gamma_e} \xi_j \frac{K_0(kr)}{2\pi} d\Gamma \right) \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_j = \\ &= \sum_{j=l,m} d_{ij} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_j \end{aligned} \quad (1.20)$$

其中:

$$d_{ij} = \int_{\Gamma_e} \xi_j \frac{K_0(kr)}{2\pi} d\Gamma, \quad (j = l, m) \quad (1.21)$$

上式积分很难用解析法计算, 但可以用高斯积分计算^[4], 即

$$d_{ij} = \int_{\Gamma_e} \xi_j \frac{K_0(kr)}{2\pi} d\Gamma = \sum_{q=1}^m \xi_j^{(q)} \frac{K_0(kr_q)}{2\pi} W_q L$$

其中 m 为高斯积分所用的点数, r_q 为 i 点至单元 Γ_e 上高斯求积点 q 的距离, q 点的坐标为

$$x_q = \sum x_j \xi_j^{(q)}, \quad y_q = \sum y_j \xi_j^{(q)}, \quad (j = l, m)$$

W_q 为加权系数, L 为单元长度。本文用 $m=4$ 的高斯积分, 相应的 $\xi_j^{(q)}, \xi_m^{(q)}$ 和 W_q 如表 1。

高 斯 系 数			
表 1			
q	$\xi_l^{(q)}$	$\xi_m^{(q)}$	W_q
1	0.930568	0.069432	0.173927
2	0.669990	0.330010	0.326073
3	0.330010	0.669990	0.326073
4	0.069432	0.930568	0.173927

对边界 Γ' 可作同样处理, 这时

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\partial U}{\partial n} \frac{K_0(kr)}{2\pi} d\Gamma = j \sum_{j=l,m} d'_{ij} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_j \quad (1.21)$$

d'_{ij} 与 d_{ij} 的区别是 j 点在 Γ' 上,是对 Γ'_e 积分的。

对各单元的积分进行求和,有

$$\begin{aligned} \sum \int_e \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right) \frac{K_0(kr)}{2\pi} d\Gamma &= [D_{i1} \cdots D_{ij} \cdots D_{in}] \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_1, \cdots, \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_n \right\}^T = \\ &= D_i \frac{\partial U}{\partial n} \end{aligned}$$

其中 D_{ij} 是 j 节点两侧单元的 d_{ij} 之和, $D_i = [D_{i1} \cdots D_{ij} \cdots D_{in}]$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_1, \cdots, \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_n \right\}^T. \text{ 同样可得} \quad (1.22)$$

$$\sum_{\Gamma'} \int_{\Gamma_e} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right) \frac{K_0(kr)}{2\pi} d\Gamma = D'_i \frac{\partial U}{\partial n}$$

把上面诸结果代入(1.19),得

$$U_{0i} + (D_i + D'_i) \frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

对于每一个节点 i ($i=1,2,\cdots,n$)都可得到如上的一个方程,由全部节点,得一方程组,记作

$$(D + D') \frac{\partial U}{\partial n} = -U_0$$

其中

$$\begin{aligned} D &= [D_1 \cdots D_i \cdots D_n]^T, \quad D' = [D'_1 \cdots D'_i \cdots D'_n]^T \\ U_0 &= \{U_{01} \cdots U_{0i} \cdots U_{0n}\}^T \end{aligned}$$

方程组(1.22)共有 n 个方程和 n 个未知数 $\left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_1, \cdots, \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_n$ 。用高斯消去法解此线性代

数方程组,可得边界 Γ 上各节点的 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 值。

用和上面一样的方法,对(1.17)进行离散,得

$$U_P = \frac{I\rho_1}{2\pi} K_0(kR) + 2 \sum_{i=1}^n D_{Pi} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_i \quad (1.23)$$

其中 D_{Pi} 和前面的 D_{ij} 意义相同,只是其算式(1.21)中的 r 和 r' 为地表观测点 P 到积分元的距离。

把(1.22)求得的 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 值代入(1.23),便可得地表任意点的 U 值。若对若干个 k ,求出 $U(P,k)$

其中 P 为坐标, k 为参数,代入(1.6)进行傅氏反变换,即可算出 $u(P)$ 。通常我们只关心通过电源点的剖面上的电位,这时 $z=0$,由(1.6),有

$$u(P) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U(P,k) dk \quad (1.24)$$

上式的计算,我们用分段数值积分进行。共选取 9 个 k 值,上式记作

$$u(P) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^q U(P,k_i) q_i \quad (1.25)$$

k 值和相应的加权因子 g 如表2。

K 和 加 权 因 子

表 2

	1	2	3	4	5
k	0.015000	0.085000	0.162489	0.397009	0.702771
g	0.048281	0.051719	0.156534	0.293466	0.293466
	6	7	8	9	
k	0.937521	1.000000	2.000000	3.000000	
g	0.156534	0.333333	1.333333	1.666667	

上面这样选取 k 和 g 是根据 K_0 函数的特征, 依照高斯求积和辛普生求积公式决定的, 同时带有经验性质。其可靠性可用下面方法验证。

假定地下介质均匀, 且电阻率 ρ_1 和电流强度 I 都为 1, 电位的精确解应为

$$u = 1/2\pi r, \quad (1.26)$$

而此时边界元法的解为 $U = \frac{1}{2\pi} K_0(kr)$, 则

$$u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(kr)}{2\pi} dk \quad (1.27)$$

利用 (1.25) 计算 (1.27), 并将结果和 (1.26) 进行比较, 如表 3。

精 度 比 较 表 3

与电源距离	精 确 解	反变换结果
r	$u = \frac{1}{2\pi r}$	u
0.5	0.318310	0.312016
1.0	0.159155	0.161307
2.0	0.079577	0.080177
6.0	0.026526	0.026531
10.0	0.015916	0.015678
20.0	0.007958	0.008002
30.0	0.005305	0.005330
40.0	0.003979	0.003931

表 3 中 8 个点的平均相对误差不到 1%, 表明用表 2 所列的 9 个 k 值进行反变换, 其精度是令人满意的。

面 激 发 极 化

设围岩的电阻率为 ρ_1 , 矿体的电阻率 $\rho_2 = 0$, 是理想导体, 且是面激发极化的, 其面极化率为 λ 。与电阻率法的情况相同, 先用镜象法把半空间问题变为全空间问题求解。这时电位的微分方程和边界条件为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2I\rho_1 \delta_3(A), \in Q_1 \quad (2.1)$$

$$u = C / (r^2 + z^2)^{1/2} \quad (2.2)$$

$$(u - K) \Big|_r = -\lambda \frac{\partial u}{\partial n} \quad (2.3)$$

式中符号的意义与前面相同, 对 (2.1)(2.2) 进行傅里叶变换, 有:

$$\nabla^2 U - k^2 U = -I\rho_1 \delta(A) \quad \in Q_1, \quad (2.4)$$

$$U \Big|_{r=\infty} = c K_0(kr) \quad (2.5)$$

对 (2.3) 进行广义傅里叶变换, 有:

$$U \Big|_r = -\lambda \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_r \quad (2.6)$$

(2.4) ~ (2.6) 是面极化问题的二维边值问题, 用与前面类似的处理, 可得积分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_p}{2\pi} U(P) &= \frac{I\rho_1}{2\pi} K_0(kR) + \oint_{\Gamma} \frac{\partial U}{2\pi} \left[\frac{K_0(kr)}{2\pi} - \lambda \frac{kK_1(kr)}{2\pi} \cos(\vec{r}, \vec{n}) \right] d\Gamma + \\ &+ \oint_{\Gamma'} \frac{\partial U}{\partial n} \left[\frac{K_0(kr)}{2\pi} - \lambda \frac{kK_1(kr)}{2\pi} \cos(\vec{r}, \vec{n}) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.7)$$

当 P 点位于地面时, $\omega_p = 2\pi$, 考虑到 Γ 和 Γ' 的对称性, 有:

$$U(P) = \frac{I\rho}{2\pi} K_0(kR) + 2 \oint_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial n} \left[\frac{K_0(kr)}{2\pi} - \lambda \frac{kK_1(kr)}{2\pi} \cos(\vec{r}, \vec{n}) \right] d\Gamma \quad (2.8)$$

当 P 点位于边界 Γ 上时, 利用 (2.6), (2.7) 成为:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \frac{\omega_p}{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_p + \frac{I\rho_1}{2\pi} K_0(kR) + \oint_{\Gamma} \left[\frac{\partial U}{\partial n} \frac{K_0(kr)}{2\pi} - \lambda \frac{kK_1(kr)}{2\pi} \right. \\ &\left. \cos(\vec{r}, \vec{n}) \right] d\Gamma + \oint_{\Gamma'} \frac{\partial U}{\partial n} \left[\frac{K_0(kr)}{2\pi} - \lambda \frac{kK_1(kr)}{2\pi} \cos(\vec{r}, \vec{n}) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.9)$$

(2.9) 是关于边界 Γ 上 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 的积分方程, 进行求解, 可得边界上的 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 值, 然后通过 (2.8) 即可求得地表 U 值。下面仍用边界单元法求解 (2.9)。和前面一样, 将 (2.9) 的积分离散成各单元上的积分之和, 对于节点 i 有

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \frac{\omega_i}{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_i + U_{oi} + \sum_{\Gamma} \oint_{\Gamma_e} \frac{\partial U}{\partial n} \left[\frac{K_0(kr)}{2\pi} - \lambda \frac{kK_1(kr)}{2\pi} \cos(\vec{r}, \vec{n}) \right] d\Gamma + \\ &+ \sum_{\Gamma'} \int_{\Gamma'_e} \frac{\partial U}{\partial n} \left[\frac{K_0(kr)}{2\pi} - \lambda \frac{kK_1(kr)}{2\pi} \cos(\vec{r}, \vec{n}) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.10)$$

作和前面类似的处理, 可得

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \frac{\partial U}{\partial n} \frac{K_0(kr)}{2\pi} d\Gamma &= \sum_j d_{ij} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_j \\ \int_{\Gamma_e} \frac{\partial U}{\partial n} \frac{kK_1(kr)}{2\pi} \cos(\vec{r}, \vec{n}) d\Gamma &= \sum_j f_{ij} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_j \\ \int_{\Gamma'_e} \frac{\partial U}{\partial n} \frac{K_0(kr)}{2\pi} d\Gamma &= \sum_j d'_{ij} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_j \\ \int_{\Gamma'_e} \frac{\partial U}{\partial n} \frac{kK_1(kr)}{2\pi} \cos(\vec{r}, \vec{n}) d\Gamma &= \sum_j f'_{ij} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_j \end{aligned} \right\} \quad (j=l, m) \quad (2.11)$$

其中

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \int_{\Gamma_e} \xi_j \frac{kK_1(kr)}{2\pi} \cos(\vec{r}, \vec{n}) d\Gamma \\ f'_{ij} &= \int_{\Gamma'_e} \xi_j \frac{kK_1(kr)}{2\pi} \cos(\vec{r}, \vec{n}) d\Gamma, \end{aligned}$$

d_{ij} , d'_{ij} 与前面出现的相同。

将 (2.11) 代入 (2.10), 并对所有单元求和, 可得:

$$0 = \lambda \frac{\omega_i}{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_i + U_{oi} + [\mathbf{D}_i + \mathbf{D}'_i - \lambda (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i)] \frac{\partial U}{\partial n} \quad (2.12)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_i &= [D_{i1} \cdots D_{ij} \cdots D_{in}]; \quad \mathbf{D}'_i = [D'_{i1} \cdots D'_{ij} \cdots D'_{in}]; \\ \mathbf{F}_i &= [F_{i1} \cdots F_{ij} \cdots F_{in}]; \quad \mathbf{F}'_i = [F'_{i1} \cdots F'_{ij} \cdots F'_{in}]; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right)_1, \dots, \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right)_n \right\}^T, D_{ij}, D'_{ij}, F_{ij}, F'_{ij} \text{ 分别是 } j \text{ 节点两侧单元的 } d_{ij}, d'_{ij}, f_{ij},$$

f'_{ij} 之和。

对每一个节点可得如 (2.12) 的一个方程, 由全部节点可得如下的方程组:

$$[\mathbf{D} + \mathbf{D}' - \lambda (\mathbf{F} + \mathbf{F}' + \frac{\lambda}{2\pi} \boldsymbol{\omega})] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} = -\mathbf{U}_0 \quad (2.13)$$

其中

$$\mathbf{D} = [D_1 \dots D_n]^T, \mathbf{D}' = [D'_1 \dots D'_n]^T,$$

$$\mathbf{F} = [F_1 \dots F_n]^T, \mathbf{F}' = [F'_1 \dots F'_n]^T,$$

$$\mathbf{U}_0 = \{U_{01} \dots U_{0n}\}^T, \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \omega_n \end{bmatrix}.$$

(2.13) 是面极化情况下关于边界节点上 $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$ 的线性代数方程组, 共有 n 个方程, n 个未知数 $(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}})_1, \dots, (\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}})_n$ 。用高斯消去法解此方程组便可求得边界的 $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$ 值。

对 (2.8) 用类似方法进行离散, 可得地表 P 点电位的傅氏变换:

$$U_p = \frac{\rho_1 I}{2\pi} K_0(kR) + 2 \sum_{j=1}^n (D_{pj} - \lambda F_{pj}) \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right)_j \quad (2.14)$$

式中 D_{pj}, F_{pj} 和前面的 D_{ij}, F_{ij} 意义一样, 只是其中的 r 为 P 点到积分元的距离。

利用 (2.13) (2.14) 可求得地表任意点的 U , 再利用 (1.25) 进行反变换, 便可得地表的 u 。

算 例

为了验证本方法的有效性, 我们计算了板状体模型, 并和 Guptasarma 的模型实验结果^[5], 及 Eskola 对三维模型的计算结果^[1] 进行了对比, 如图 2 所示。

在 Guptasarma 的模型实验中, 铝板大小为 $1 \times 10 \times 98$ 厘米, 顶深 1 厘米, 电源频率 1000 赫, 采用等距四极装置 ($AM = MN = NB = 2$ 厘米) 测量, 其视电阻率曲线如图 2 上的虚线所示。因为模型走向很长, 可视为二度体, 并且由于电源频率高, 面极化效应很小, 故可采用本文第一节中的方法计算视电阻率, 计算结果在图 2 上用 “×” 表示。可以看到, 两者吻合得很好, 一般相对偏差小于 3%。因为 Guptasarma 的曲线是模型实验结果, 而且我们是从原文的图上量下来的, 所以这样小的偏差, 应当认为是满意的。

在 Eskola 的三维理论计算中, 良导体的大小为 $1 \times 10 \times 50$ 厘米, 顶深 1 厘米, 面极化系数 $\lambda = 71.78$ 厘米。Eskola 采用与 Guptasarma 同样的等距四极装置计算了视电阻率, 如图 2 上的实线所示。我们用二维模型在同样参数下, 采用本文第二节中的方法计算视电阻率, 计算结果在图 2 上用 “·” 表示, 与 Eskola 的计算结果的相对偏差小于 2%, 也是令人满意的。

在本文的计算中, 把模型的边界共剖分成 13 个单元, 节点数也是 13 个, 那么方程 (1.22), (2.13) 左侧矩阵的元素只有 13² 个。因此, 占用计算机的内存较少, 完全可在微型机上实现运算, 便于推广应用。

参 考 文 献

- | | |
|---|--|
| [1] Eskola, L., et al.: Geophys. Prosp., 1984, V. 32, No. 1, P. 79~87 | [4] Brebbia, C. A.: The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, 1978 |
| [2] 徐世浙等: 地质与勘探, 1985, 第 4 期, 36~42 页 | [5] Guptasarma, D.: Geophysics, 1983, V. 48, No. 1, p. 98~106 |
| [3] 南京工学院数学教研组: 《工程数学积分变换》, 人民教育出版社, 1978 年 | |