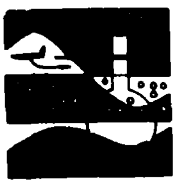
第22卷 第1期
1986年1月
地质与勘探
GEOLOGY AND PROSPECTING
Vol. 22, No. 1
January, 1986

频谱激电数学模型

王庆乙 蒋彬 傅建中 杨生

（中国有色金属工业总公司北京矿产地质研究所）


物探与化探

建立正确的频谱激电数学模型，对利用频谱特征来区分激电异常源的性质，有着重要的意义。本文从电动力学出发，结合实验结果，建立了能反映激电电化学效应的数学模型。据此模型还导出了各种激电参数的表达式，并在复平面图上予以说明。

电动力学数学模型

将金属颗粒置于电解质中，界面就会发生粒子交换的化学反应，在沉积和溶解达到平衡时，界面形成稳定的双电层；呈中性，对周围离子不产生作用，如图1（a）所示。当通电后，在外电场作用下，金属颗粒被感应极化形成两极（电流入端为阴极，出端为阳极）。溶液中的极性离子开始向金属颗粒的两极聚集，形成偶极。当偶极场抵消外电场时，偶极达到稳定，如图1中（b）、（c）所示。切断电源后，形成偶极的束缚离子要回到原来状态。

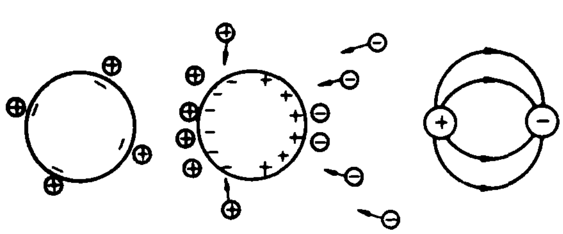


图1 偶极形成的电动力学模型

激电法的装置，一般由A，B极供电，M，N极测量。为简单起见，将B，N极置于“无穷远，如图2所示，电流由A极流入电阻率为ρ_H极化率为m的各向同性均匀介质。现在来求距A极r处M点的电位。

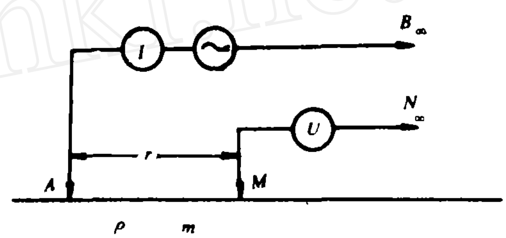


图2 求M点电位的装置

极化介质中偶极的形成需要一定的时间，因此在刚接通电流的瞬间，介质尚未极化，此时介质中的电流由自由离子导电。设这时介质中的电流密度为$\vec{j}_1$，自由离子的体密度为ρ_1。随着时间的推移，极化偶极逐渐形成，介质中出现偶极产生的附加电流，该电流密度为$\vec{j}_2$，束缚离子的体密度为ρ_2。这两种电流密度构成了极化介质中的实际电流密度$\vec{j}$。

$$\vec{j}=\vec{j}_1+\vec{j}_2 \qquad (1)$$

对（1）式两边求散度得

$$\mathrm{div}\vec{j}=\mathrm{div}\vec{j}_1+\mathrm{div}\vec{j}_2 \qquad (2)$$

自由离子和束缚离子都服从电荷守恒律

$$\mathrm{div}\vec{j}_1=-\frac{\partial\rho_1}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\mathrm{div}\vec{j}_2=-\frac{\partial\rho_2}{\partial t} \qquad (4)$$

由电动力学模型可知，极化偶极的形成是由一部分自由离子转为束缚离子的结果。在这个过程中，自由离子体密度不断减小，而束缚离子的

体密度则不断增大。它们保持守恒的关系

$$-\frac{\partial\rho_1}{\partial t}=\frac{\partial\rho_2}{\partial t} \quad (5)$$

由（3）、（4）、（5）可得

$$\mathrm{div}\vec{j}_1=-\mathrm{div}\vec{j}_2 \quad (6)$$

代入（2）式得

$$\mathrm{div}\vec{j}\equiv 0 \quad (7)$$

（7）式表明，极化介质中的电流为稳定电流。由于电流是稳定的、介质是均匀的，则电场也是稳定的（$\mathrm{div}\vec{D}=0$）。这样，求解M点电位将归结为求解下列方程组：

$$\mathrm{div}\vec{j}_1-\frac{\partial\rho_2(r,t)}{\partial t}=0 \quad (\mathrm{div}\vec{j}=0)$$

$$\mathrm{div}\vec{D}=0 \quad (8)$$

在米、千克、秒（m、k、s）制中，电动力学公式为

$$\vec{D}=\vec{E}+\vec{P}$$

$$(\vec{D}=\epsilon\vec{E}) \quad (9)$$

将极化介质的电阻率ρ_H乘（1）式两边后，得

$$\vec{j}\rho_H=\vec{j}_1\rho_H+\vec{j}_2\rho_H \quad (10)$$

与（9）式相比可得

$$\begin{cases}\vec{D}=\vec{j}\rho_H\\ \vec{E}=\vec{j}_1\rho_H\\ \vec{P}=\vec{j}_2\rho_H\end{cases} \quad (11)$$

根据实验结果

$$\vec{j}_2=-\vec{m}\vec{j}_1 \quad (12)$$

将（12）代入（1）式后再分别代入（9）式和（11）式可有

$$\vec{j}=\vec{j}_1(1-m) \quad (13)$$

$$\epsilon=\frac{\vec{D}}{\vec{E}}=1-m \quad (14)$$

$$\vec{P}=-m\vec{j}_1\rho_H \quad (15)$$

为求得极化强度$\vec{P}$与束缚离子体密度$\rho_2(r,t)$之间的关系，在极化介质内取一小圆柱体，见图3；其截面为ds，长为dl，轴线与电流场方向平行。当圆柱足够小时，两端面束缚离子的面密度j为$+\sigma$和$-\sigma$。圆柱的偶电矩为$\vec{P}=-\sigma\cdot ds\cdot dl$（负号是因为$d\vec{l}$和$\vec{j}$方向相反）。按极化强度定义，圆柱的极化强度为$\vec{p}=\vec{P}\cdot dv$。两者均代表同一物理实质，所以 $\vec{P}\cdot dv=-\sigma\cdot ds\cdot d\vec{l}$，即

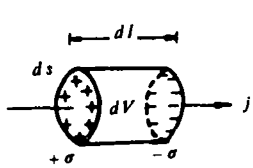


图3　求$\vec{P}$与ρ_2关系图

$$\vec{P}=-\sigma=-\frac{Q}{ds}$$

Q为端面电量。上式对时间求导后，得到

$$\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}=-\frac{\partial Q}{\partial t ds}=-\frac{I}{\partial s}=-\vec{j}_2 \quad (16)$$

对（16）式两边求散度

$$-\mathrm{div}\vec{j}_2=\frac{\partial\mathrm{div}\vec{P}}{\partial t}$$

由（4）式可得

$$\rho_2(r,t)=\mathrm{div}\vec{P} \quad (17)$$

将（15）式代入（17）式

$$\mathrm{div}\vec{j}_1=-\frac{\rho_2(r,t)}{m\cdot\rho_H} \quad (18)$$

因此求解M点电位的（8）式，可归结为求解下列一阶微分方程

$$\frac{\partial\rho_2(r,t)}{\partial t}+\frac{1}{m\cdot\rho_H}\rho_2(r,t)=0 \quad (19)$$

由泊松公式可求距偶极R处观测点M的电位

$$U(r,t)=-\iiint_\tau\frac{\mathrm{div}\vec{P}}{R}d\tau$$

$$=\iiint_\tau\frac{\rho_2(r,t)}{R}d\tau \quad (20)$$

考虑到极化介质的各向同性，则可对$\rho_2(r,t)$进行分离变量

$$\rho_2(r,t)=\rho_A(t)\cdot W(r) \quad (21)$$

则 $$U(r,t)=\rho_A(t)\iiint_\tau\frac{W(r)}{R}d\tau$$

$$=\rho_A(t)\cdot Z(r)+U_0(r) \quad (22)$$

式中，$Z(r)$为积分结果，$U_0(r)$为积分常数，也就是稳定场电位。将（22）式代回（21）式有

$$\rho_2(r,t)=\frac{W(r)}{Z(r)}\left[U(r,t)-U_0(r_1)\right] \quad (23)$$

对上式进行时间求导

$$\frac{d\rho_2(r,t)}{dt}=\frac{W(r)}{Z(r)}\cdot\frac{dU(r,t)}{dt} \qquad (24)$$

将（23）、(24）式代入（19）式则得

$$\rho_H m\cdot\frac{dU(r,t)}{dt}+U(r,t)=U_0(r) \qquad (25)$$

根据上述公式中有关结果（$m=\frac{\rho_L-\rho_H}{\rho_L}$, $\varepsilon=1-m$）以及供电时间足够长后的稳定电位$U_0(r)=\frac{I\rho_L}{4\pi r}$，则（25）式可写成

$$(\rho_L-\rho_H)\cdot\varepsilon\cdot\frac{dU(r,t)}{dt}+U(r,t)=\frac{I\rho_L}{4\pi r} \qquad (26)$$

在全空间中，电阻率、电容率和电阻、电容有下列关系

$$\begin{cases} R_L=\dfrac{\rho_L}{4\pi r} \\ R_H=\dfrac{\rho_H}{4\pi r} \\ C=4\pi r\varepsilon \end{cases} \qquad (27)$$

则（26）式可给出如下的电动力学模型的电路微分方程

$$(R_L-R_H)\cdot C\cdot\frac{dU(t)}{dt}+U(t)=IR_L \qquad (28)$$

上述微分方程的电路图见图4。

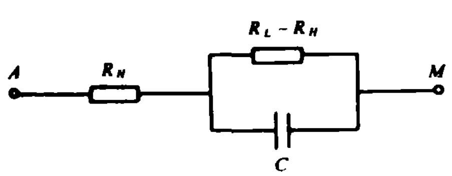


图4　电动力学模型的等效电路图

电路的复阻抗表达式为

$$Z(j\omega)=R_H+\frac{R_L-R_H}{1+j\omega\tau} \qquad (29)$$

$$\tau=(R_L-R_H)\cdot C$$

则M点的复电位为

$$U(j\omega)=U_H+\frac{U_L-U_H}{1+j\omega\tau} \qquad (30)$$

作为电性参数，其复电阻率的表达式为

$$\rho(j\omega)=\rho_H+\frac{\rho_L-\rho_H}{1+j\omega\tau} \qquad (31)$$

$$\tau=(\rho_L-\rho_H)\cdot\varepsilon$$

不难证明，由电动力学模型得到的复电阻率在复平面中，其运动的轨迹为圆心在实轴上的一个半圆（图5）。

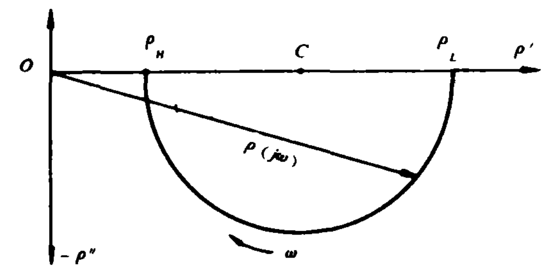


图5　电动力学复电阻率的运动轨迹

可以根据实测复电阻率的实分量$\rho'(\omega)$和虚分量$\rho''(\omega)$值通过下列公式求出电容率ε和高、低频极限电阻率的差值（$\rho_L-\rho_H$），藉此得到时间常数τ值。

$$\varepsilon(\omega)=\frac{\rho''(\omega)}{\omega[(\rho'(\omega)-\rho_H)^2+\rho''^2(\omega)]} \qquad (32)$$

$$(\rho_L-\rho_H)=\frac{[\rho'(\omega)-\rho_H]^2+\rho''^2(\omega)}{\rho'(\omega)-\rho_H} \qquad (33)$$

电化学数学模型

从上述电动力学所建立的数模型可以看出，它正确地反映了极限条件下的极化率定义。由（31）式得

$$\lim_{\omega\to 0}\rho(j\omega)=\rho_L \quad ,$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\rho(j\omega)=\rho_H \qquad (34)$$

则 $$m=\frac{\rho_L-\rho_H}{\rho_L}$$

同时，它指出了激电具有电容性。因此，在时域内出现瞬变过程和在频域内出现供电电流超前于观测电位的相位特征。但是，应该指出，电动力学模型存在严重缺陷，它所反映的电容值是与频率无关的常量，其瞬变过程为负指数函数，这与实际情况不符。这是因为它忽略了极化偶极形成中的电化学反应的缘故。我们知道，离子是带电原子或原子团，它有质量和化学特性。在不同频率的电流场作用下，它的运动速度和在界面上电

化学反应是不相同的。因此，由电化学作用形成的电容值应与频率有关。

为了研究这个问题，我们用BT—6超低频频率特性仪，实测了矿石电阻率的实、虚分量，并由公式（32）计算出不同频率时的电容率。通过实测大量天然矿石和人工标本，发现激电的电容率确实不是一个常值，而是与频率有关。电容率与角频率之间的关系是有规律的。随着频率的升高，电容率值降低，在双对数坐标中为一直线，不同标本的直线斜率有所不同，如图6所示。

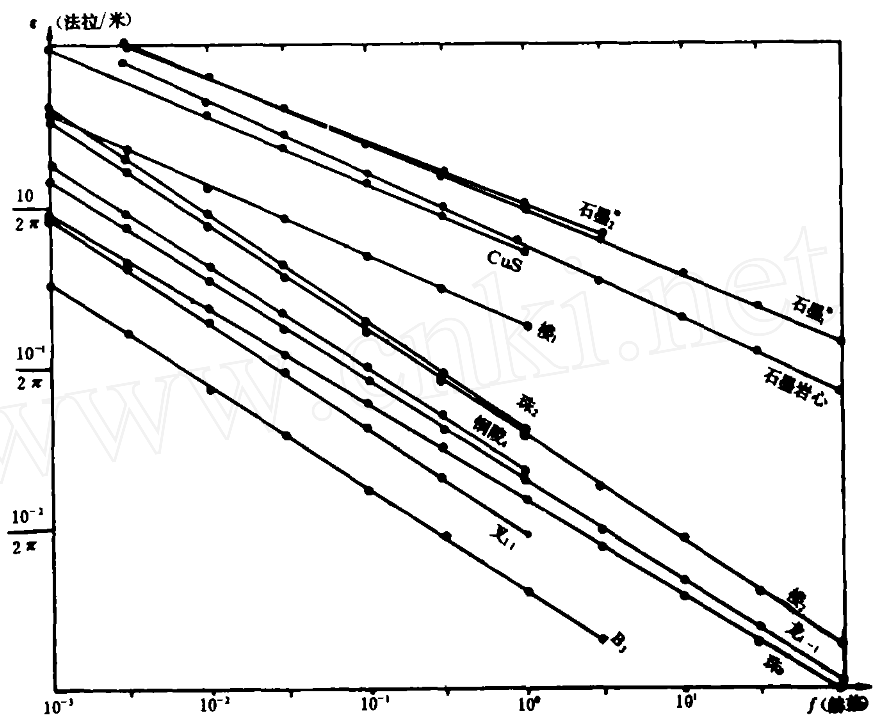


图6　电容率频率特性图

我们令此直线的斜率为α，设角频率$\omega=1$时的电容率为$\varepsilon(1)$，则电容率与角频率的函数关系为

$$\varepsilon_R(\omega)=\varepsilon_R(1)\cdot\omega^{-\alpha} \qquad (35)$$

式中下脚标R表示该电容率为实数量。

用相同方法，可由（33）式计算得$(\rho_L-\rho_H)$值。应该指出，该电阻率差值应该是一个常值，但实测结果它也与频率有关。解释这种矛盾现象，我们推测，激电电容率可能是一个复量。它除了（35）式中的实分量外，还存在着一个虚分量，是它使$(\rho_L-\rho_H)$值随频率而变。

我们由（35）式已知复电容率的实分量与频率的关系，则其复电容率振幅值$|\varepsilon(\omega)|$也有相同的频率关系，

$$|\varepsilon(\omega)|=\varepsilon(1)\cdot\omega^{-\alpha} \qquad (36)$$

这里$\varepsilon(1)$为复电率在$\omega=1$时的值。

复指数运算理论指出，角频率与单位虚数j之间必定有相同的函数形式[2]。则复电容率可写成

$$\varepsilon(j\omega)=\varepsilon(1)\cdot j^{-\alpha}\cdot\omega^{-\alpha} \qquad (37)$$

因有

$$j^{-\alpha}=e^{-j\frac{\pi\alpha}{2}}=\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}-j\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right) \qquad (38)$$

则（37）式为

$$\varepsilon(j\omega)=\varepsilon(1)\cdot\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}-j\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right)\cdot\omega^{-\alpha} \qquad (39)$$

其中

$$\varepsilon_R(1)=\varepsilon(1)\cos\frac{\pi\alpha}{2} \qquad (40)$$

$$\varepsilon_I(1)=\varepsilon(1)\sin\frac{\pi\alpha}{2} \qquad (41)$$

为了验证复电容率的存在，我们将实测随频率变化的$(\rho_L-\rho_H)$值［由（33）式计算］扣去

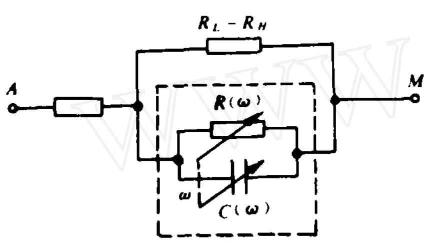
虚电容率$\varepsilon_1(1)$的电阻率并联影响，所得到的（$\rho_L-\rho_H$）值，是与频率无关的常量，且与实测到的低频ρ_L值和高频ρ_H值之差值相吻合。这样，我们证实了激电电容率是个复量，它是激电复电阻率的内因。

由复电容率可得相应的复电容值，其实部具有纯电容性，其虚部具有电阻性。

$$C_R(\omega)=C(1)\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\omega^{-\alpha}$$

$$R(\omega)=C_1(\omega)=C(1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\omega^{-\alpha}$$

这样，我们获得了电化学模型的激电等效电路，如图7所示。



$C(j\omega)=C(1)\cdot(j\omega)$

图7　电化学模型的激电等效电路

由图7，我们可以建立电化学数学模型，其等效电路的复阻抗为：

$$Z(j\omega)=R_H+\frac{R_L-R_H}{1+(j\omega\tau)^{1-\alpha}}$$

$$\tau=[C(1)\cdot(R_L-R_H)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (42)$$

则可得M点的频谱激电复电位为

$$U_M(j\omega)=U_H+\frac{U_L-U_H}{1+(j\omega\tau)^{1-\alpha}} \quad (43)$$

至此，我们通过理论分析和实验验证，建立了频谱激电的数学模型。

其公式与柯尔—柯尔（Cole-Cole[2]）描述电介质弛豫特性的经验公式形式上相同。如果令$1-\alpha=c$，$m=\frac{R_L-R_H}{R_L}$，代入(42)式，可得佩尔顿（Pelton,1972）套用的柯尔模型的复阻抗公式：

$$Z(j\omega)=R_L\left[1-m\left(1-\frac{1}{1+(j\omega\tau)^c}\right)\right] \quad (44)$$

由（42）式，可得复电阻率表达式

$$\rho(j\omega)=\rho_H+\frac{\rho_L-\rho_H}{1+(j\omega\tau)^{1-\alpha}} \quad (45)$$

$$\tau=[\varepsilon(1)\cdot(\rho_L-\rho_H)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

经积分变换，得时域二次电位瞬变过程表达式

$$V_2(t)=V(P)\cdot\frac{\rho_L-\rho_H}{\rho_L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(t/\tau)^{n(1-\alpha)}}{\Gamma[1+n(1-\alpha)]}\right\} \quad (46)$$

其中$V(p)$为极化场电位，Γ为伽马函数。

频谱激电数学模型中，最基本的参数是ρ_H，ρ_L，$\varepsilon(1)$和α。由此可导出频谱激电的全部参数。

极化率（m）

$$m=\frac{\rho_L-\rho_H}{\rho_L} \quad (47)$$

时间常数（τ）

$$\tau=[\varepsilon(1)\cdot(\rho_L-\rho_H)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (48)$$

电阻率实部［$\rho'(\omega)$］

$$\rho'(\omega)=\rho_H+(\rho_L-\rho_H)\frac{1+(\omega\tau)^{1-\alpha}\cdot\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{1+2(\omega\tau)^{1-\alpha}\cdot\sin\frac{\pi\alpha}{2}+(\omega\tau)^{2(1-\alpha)}} \quad (49)$$

电阻率虚部［$\rho''(\omega)$］

$$\rho''(\omega) = -(\rho_L - \rho_H)\frac{(\omega\tau)^{1-\alpha}\cdot\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{1+2(\omega\tau)^{1-\alpha}\cdot\sin\frac{\pi\alpha}{2}+(\omega\tau)^{2(1-\alpha)}} \tag{50}$$

电阻率振幅［$A(\omega)$］

$$A(\omega) = \left\{\rho_H^2+\frac{(\rho_L-\rho_H)^2+2\rho_H(\rho_L-\rho_H)\left[1+(\omega\tau)^{1-\alpha}\cdot\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{1+2(\omega\tau)^{1-\alpha}\cdot\sin\frac{\pi\alpha}{2}+(\omega\tau)^{2(1-\alpha)}}\right\}^{1/2} \tag{51}$$

相位角［$\varphi(\omega)$］

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{-(\rho_L-\rho_H)(\omega\tau)^{1-\alpha}\cdot\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{\rho_H\left[1+2(\omega\tau)^{1-\alpha}\cdot\sin\frac{\pi\alpha}{2}+(\omega\tau)^{2(1-\alpha)}\right]+(\rho_L-\rho_H)\left[1+(\omega\tau)^{1-\alpha}\cdot\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right]} \tag{52}$$

虚部极值角频率（$\omega_{\rho''_m}$）

$$\omega_{\rho''_m} = \frac{1}{\tau} \tag{53}$$

相角极值角频率（ω_{φ_m}）

$$\omega_{\varphi_m} = \frac{1}{\tau}\left[\frac{\rho_L}{\rho_H}\right]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \tag{54}$$

由电阻率实、虚分量可求得下列参数：

时间常数（τ）

$$\tau = \frac{1}{\omega}\left\{\frac{\rho''(\omega)}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}\left[(\rho'(\omega)-\rho_H)-\rho''(\omega)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right]}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{55}$$

极限电阻率差值（$\rho_L-\rho_H$）

$$(\rho_L-\rho_H) = \frac{(\rho'(\omega)-\rho_H)^2+\rho''(\omega)^2}{\left[(\rho'(\omega)-\rho_H)-\rho''(\omega)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right]} \tag{56}$$

激电电容率［$\varepsilon(1)$］

$$\varepsilon(1) = \frac{1}{\omega^{1-\alpha}}\left\{\frac{\rho''(\omega)}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}\left[(\rho'(\omega)-\rho_H)^2+\rho''(\omega)\right]}\right\} \tag{57}$$

可求证复电阻率在复平面上的运动轨迹为一圆弧，其圆弧的方程为

$$\rho'^2(\omega)+\rho''^2(\omega)-(\rho_L-\rho_H)\cdot\rho'(\omega)\left[(\rho_L-\rho_H)\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right]\rho''(\omega)+\rho_L\rho_H=0 \tag{58}$$

其圆心 C 的坐标为

$$\begin{cases} C_{\rho'} = \rho_H+\dfrac{\rho_L-\rho_H}{2} \\ C_{\rho''} = \dfrac{\rho_L-\rho_H}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2} \end{cases} \tag{59}$$

圆半径

$$R=\frac{\rho_L-\rho_H}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \qquad (60)$$

$$\rho''_m=\frac{\rho_L-\rho_H}{2}\cdot\frac{1-\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \qquad (61)$$

圆弧最大虚分量值为

上述参数在复平面上的几何意义如图 8 所示。各参数的表达式在实验中均经过验证。

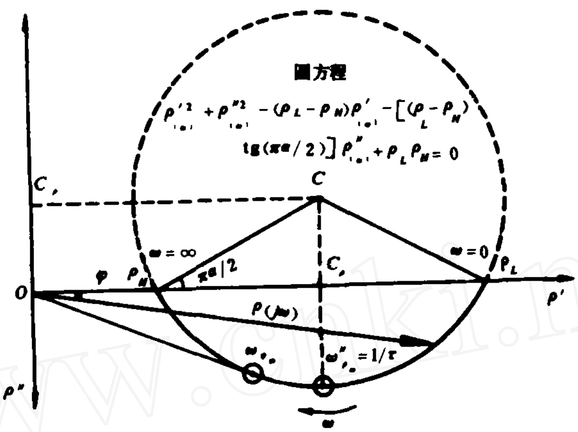


图 8　频谱激电参数的几何意义

参考文献

[1] Pelton, W.H., et al., Geophysics, 1978, v. 43, No. 3

[2] Cole, K. S., et al.: Journal of Chemical Physics, 1941, v. 9, pp. 341~351

[3] Gy. Dankhazi: Geofizikai Kozlemenyek, 1973, v. 21

电阻率法点电源二维地形改正的方法与实践

徐世浙

（山东海洋学院）

消除地形对电阻率法的影响，是提高电阻率法勘探效果的重要课题。二十多年来，国内外许多勘探地球物理工作者对此进行了研究。1966年，我国开始应用保角变换法和基于保角变换原理的坐标网法后[1]，线源二维地形影响的研究取得了进展。但线源与实际应用的点源存在着差别。七十年代后，开始研究点源二维地形影响，提出了多种方法。这些方法大致可分两类：（1）角域地形叠加法[2,3,4]。它将复杂的地形视为若干简单角域地形的组合，用解析法计算单个角域的视电阻率，然后叠加。此法在理论上是一种近似方法，而且不适用于光滑地形。（2）有限单元法[5,6]。方法的理论是严格的，但网格剖分及向计算机输入原始数据的工作十分繁重。为了减轻工作量，在有限单元法中常采用网格自动剖分的方法，但由此而得到的边界形状一般带直角或$\pi/4$的角点，