

5~20%。即大、中型黑色金属矿床一般为10~20%；大、中型有色金属矿床一般为5~10%。复杂的小型矿床因即使加密工程也难于获得B级储量，而且这种矿床的规模只能作为小型矿山的建设依据，所以可不进行验证对比，但应投入少量工程进行检查，以提高矿体圈定连接的精度。这里值得探讨的是B级储量要否验证，考虑到B级储量不仅是验证C级储量的高级储量，而且是先期生产利用的储量，其误差的大小关系到矿山能否按期建成与建成后能否按期生产和稳产。特别是大、中型矿床多建成为国家的骨干企业，投资巨大，地质勘探阶段应尽可能的满足矿山设计和生产的需要，保证B级储量的精度，使B级储量误差小于20%是十分必要的，因此原则上应当进

行检查对比。但对于不同类型矿床应有所区别，对那些形态比较简单，厚度品位比较稳定的矿床，由于大量的生产实践均以证实其B级储量误差均小于20%，故可不进行检查，而对那些形态比较复杂，厚度、品位变化较大的矿床则应通过加密工程进行验证。新类型矿床则必须进行检查，如广西平果铝土矿属于岩溶崩塌堆积矿床，为了研究对矿体的控制程度，曾选择4个矿体进行加密验证对比，所获资料证明，B级检查C级相对差25%，B级经再加密进行对比其相对差<15%，从而证实B级、C级储量可靠。至于检查验证工作不能任选1~2个中段、矿块、剖面，更不能从检查验证资料中任选一部分进行对比，而必须使用全部资料才能较客观的对储量误差作出评价。

## 再论金矿品位的对数正态分布

杨尔煦

(冶金部地质局)

金矿品位或厚度乘品位(指脉金)符合对数正态分布曲线，这一点在南非已有很多金矿区证明是正确的。作者曾经对山东玲珑52号脉68个样品做过曲线<sup>[1]</sup>，但由于样品太少，实测曲线和理论曲线拟合得不好。为了确切地了解金矿的品位分布规律，这里收集了山东焦家破碎带热液蚀变岩型金矿7180个样品的分析数据，这个母体已足够多了，通过计算和理论曲线拟合得也比较好。从这里更可以看出不存在什么特高品位，因此也不必切除。

### 金矿品位分布曲线的拟合

山东焦家金矿赋存在一个较大的破碎带中，矿体规模大，形态相对稳定。矿石多呈细脉浸染状，金属矿物以黄铁矿为主，矿体边界不明显，金的品位是逐渐变化的。

在这个矿山中，共收集钻孔和坑内样品7180

个。在图1(b)上表示了按等差间隔1克/吨取得的分布曲线，前面的曲线是按图上所表示的比例尺绘出的，后面的曲线是纵坐标放大10倍的曲线。这些曲线都显示了在尾部缓慢下降的特点。放大以后可以看到局部的跳动。在图1(a)上表示了按等比间隔(比值为2)，即按对数间隔求出的分布曲线。从这条曲线可以看出，金矿品位分布曲线是一条很光滑的曲线，并不象图1(b)那样出现跳动。这些跳动是因为等差间隔是一定值，相对于高品位来讲已太小了，在某一个间隔中出现的样品只有一、二个，甚至没有，因此这种跳动不是曲线的固有特征。从图1(a)来看，品位分布曲线是一条光滑曲线，它反映了矿体的客观规律。

按照三参数对数正态分布曲线方程<sup>[2]</sup>，求出某一个区间的概率 $\Delta F$ 。

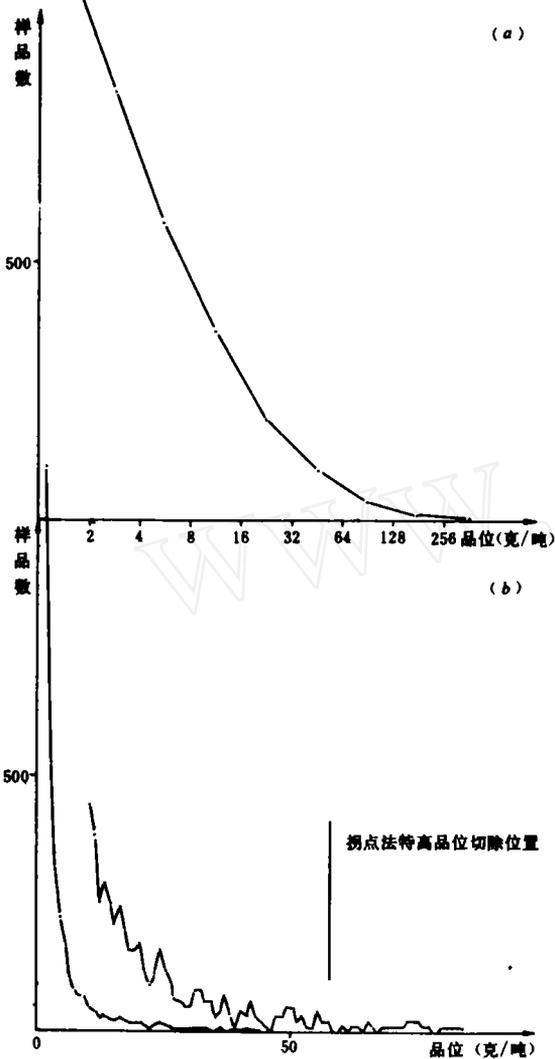


图1 山东焦家金矿的品位分布曲线

$$\Delta F = \frac{N}{M}$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(Z+a)-\xi}{\sigma}\right)^2\right] \frac{1}{Z+a} dZ \quad (1)$$

$$N = M \int_{z_1}^{z_2} (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(Z+a)-\xi}{\sigma}\right)^2\right] \frac{1}{Z+a} dZ \quad (2)$$

上式中,  $N$ 为品位在  $Z_1$  到  $Z_2$  间隔内出现的样品数;  $M$ 为母体总数;  $\xi$  为母体几何平均值的自然对数;  $\sigma^2$ 为  $Z$  的自然对数方差;  $Z$  为品位;  $a$  为常数。

通过不断改变三参数  $\xi$ ,  $\sigma$  和  $a$ , 可以求出一条最好的拟合曲线。焦家金矿的三参数是

$$e^{\xi} = 0.8, \quad \xi = -0.2231436$$

$$\sigma^2 = 3.2, \quad \sigma = 1.7888544$$

$$a = 0$$

表1

品位间隔 (克/吨)	实测 样品数	理论 样品数	百分误差 (%)
0—1	3960	3946.4	- 0.34
1—2	1106	1049.1	- 5.14
2—4	839	862.4	2.78
4—8	573	611.2	6.65
8—16	369	373.5	1.22
16—32	192	196.7	2.44
32—64	93	89.4	- 3.88
64—128	33	35.0	5.93
128—256	10	11.7	17.0
256—512	5	3.5	- 29.6
	$M = 7180$	7178.9	平均7.50

拟合以后, 按公式算出来的理论样品数和实测样品数之间误差并不大, 如表1所示, 在高品位部分, 由于样品数较少, 引起较大的百分误差。即使这样, 平均绝对百分误差也只有7.5%。这个例子说明, 金矿的品位分布可以用三参数对数正态分布曲线来表示。

当然用其他的曲线来拟合也是可以的, 例如用一个  $Z$  为变量的幂级数, 但要用的待定常数太多。三参数对数正态分布曲线是拟合金矿品位分布时参数量最少的曲线。这里所讨论的例子, 实际上只用了二个参数。

这条曲线也有不足之处, 因为它的原始统计是按1克/吨等差间隔统计的, 在0~1克/吨间隔中实际上存在半条对数正态分布曲线, 现在都不能表现出来了。因此, 这个例子实际上只拟合了半条曲线。这半条曲线已足够, 它在1克/吨以上的曲线是比较精确的。

### 平均品位和金属量的曲线

通过拟合可以求出某一金矿的品位分布的方程式，利用这个方程式很容易求出不同边界品位

的平均品位、矿石量和金属量。这对研究确定一个金矿采用哪个边界品位最好，是很有意义的。

根据作者的文章<sup>[1]</sup>，可以写出当边界品位为 $Z_i$ 时，其平均品位为 $Z_i^*$ 。

$$Z_i^* = \exp\left(\xi + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\int_{w_i-\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}W^2\right) dW}{\int_{w_i}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}W^2\right) dW} - a$$

$$= R \cdot \exp\left(\xi + \frac{1}{2}\sigma^2\right) - a \quad (3)$$

其中， $W_i = \frac{1}{\sigma} [\ln(Z_i + a) - \xi]$

$$R = \frac{\int_{w_i-\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}W^2\right) dW}{\int_{w_i}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}W^2\right) dW} \quad (4)$$

为研究 $R$ 的变化规律，这里选用了三种边界品位，即 $Z_i + a$ 为 $\exp(\xi - \sigma^2)$ ， $\exp(\xi)$ 和 $\exp(\xi + \frac{1}{2}\sigma^2)$ ，相应的 $W_i$ 为 $-\sigma$ ， $0$ 和 $0.5\sigma$ 。

这三种边界品位，相当于母体的众值、几何平均值和算术平均值。然后按不同的 $\sigma$ 求出 $R$ ，绘成曲线，如图2所示。从图上可以看出，对于相同的对数方差，随着边界品位的上升，平均品位上升越来越快。

另外还可以求出边界品位 $Z_i$ 以上的矿石量 $T_i$ 。

$$T_i = T \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{w_i}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}W^2\right) dW \quad (5)$$

其中， $T$ 为母体所构成的总矿石量。

还可以求出不同边界品位 $Z_i$ 以上的金属量 $A_i$ 。

$$A_i = T \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \exp\left(\xi + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \int_{w_i-\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}W^2\right) dW - a \int_{w_i}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}W^2\right) dW \right] \quad (6)$$

由于 $T$ 是一个未知数，因此一般只能用某一个边界品位时的矿石量或金属量为100%，求出不同边界品位时矿石量或金属量的相对变化。

图3所示就是(3)，(5)和(6)式求出的山东焦家金矿不同边界品位条件下，平均品位、矿石量和金属量的变化曲线。

从这几条曲线可以看出，当边界品位上升时，平均品位稳定上升。平均边界品位每上升1克/吨

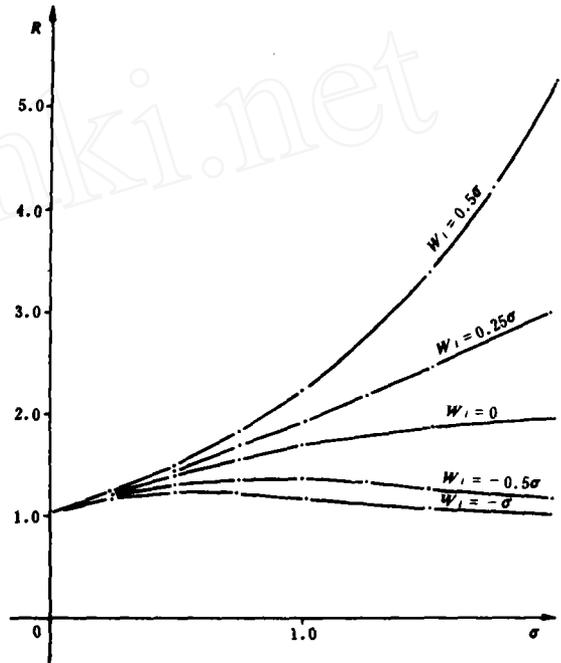


图 2

时，其平均品位上升2.945克/吨。当边界品位上升时，金属量的变化接近直线，缓慢下降。而矿石量则不同，在边界品位从1克/吨上升为2克/吨时，矿石量减少很快，即减少了33%。当边界品位再上升时，矿石量的减少减缓。

从这里可以看出，山东焦家金矿的分布比较分散， $\sigma^2$ 为3.2。这可能体现了热液蚀变岩型金矿的特点，它比石英脉型金矿更为分散。在这种

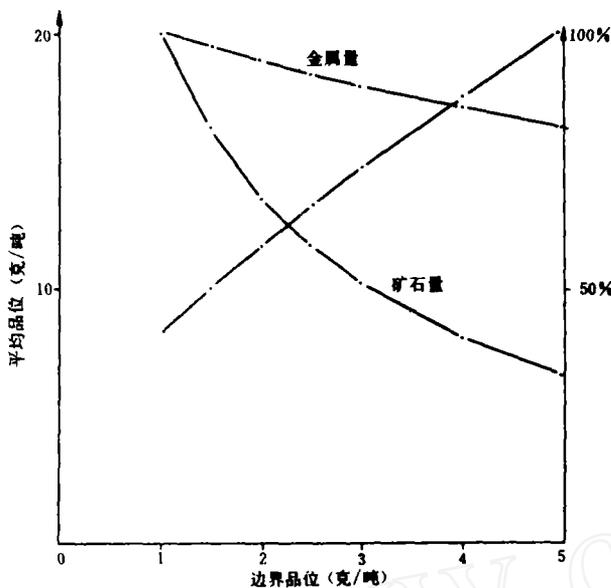


图 3

条件下,有可能降低边界品位,扩大矿体的矿石量,也增加了金属量的回收。矿体规模扩大了,也有利于改善开采条件。另一方面,如果过多地降低了边界品位,大大增加了矿石开采量,而金属量增加很少,也并不合算。例如把边界品位从

2克/吨减为1克/吨,矿石要增加50%,而金属量只增加5%,这就不一定合算。因此,可以利用这些曲线,在矿山开采前,权衡一个最合理的边界品位。

### 关于特高品位处理问题

关于特高品位处理问题,在我国现行的规范中,在设计院或矿山中都有各种不同的规定。共同特点是要切除特高品位,代之以平均品位。现在来具体计算一下,到底切除了多少特高品位。

砂金矿规范中规定,要用1950年的B.И.斯米尔诺夫类比法<sup>[3]</sup>。该法是从正态分布出发按矿体品位变化系数确定特高品位下限,其下限为平均品位的D倍(见表2)。

为了研究按正态分布计算的矿体品位变化系数V和对数正态分布条件下的对数方差σ的关系,需要做下列运算。

边界品位为Z<sub>i</sub>时,算术平均品位Z<sub>i</sub><sup>\*</sup>+a为

$R \exp(\xi + \frac{1}{2}\sigma^2)$ ,那末正态分布的方差δ<sup>2</sup>为:

$$\delta^2 = \frac{\int_{w_i}^{\infty} [Z+a - R e^{\xi + \frac{1}{2}\sigma^2}]^2 \exp(-\frac{1}{2}W^2) dW}{\int_{w_i}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}W^2) dW}$$

$$= R^2 e^{2\xi + \sigma^2} \left[ \frac{1}{R^2} e^{-\sigma^2} \int_{w_i - 2\sigma}^{\infty} \exp(-\frac{W^2}{2}) dW - \frac{2}{R} \int_{w_i - \sigma}^{\infty} \exp(-\frac{W^2}{2}) dW + \int_{w_i}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}W^2) dW \right] / \int_{w_i}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}W^2) dW \quad (7)$$

$$V^2 = \frac{\delta^2}{R^2 e^{2\xi + \sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{R^2} e^{\sigma^2} \frac{\int_{w_i - 2\sigma}^{\infty} \exp(-\frac{W^2}{2}) dW}{\int_{w_i}^{\infty} \exp(-\frac{W^2}{2}) dW} - 1 \quad (8)$$

(8)式表示了矿体在边界品位Z<sub>i</sub>以上的品位变化系数V和对数方差σ的数学关系,但是这个关系太复杂了,只能用曲线形式来表示。图4所示是用三种边界品位求出的V-σ曲线。

设切除特高品位的下限是平均品位  $R \cdot \exp$

$(\xi + \frac{1}{2}\sigma^2)$  的D倍,即  $D R \exp(\xi + \frac{1}{2}\sigma^2)$ ,

这时特高品位的切除部分为

$$\int_{w_0}^{\infty} \exp(-\frac{W^2}{2}) dW \quad (9)$$

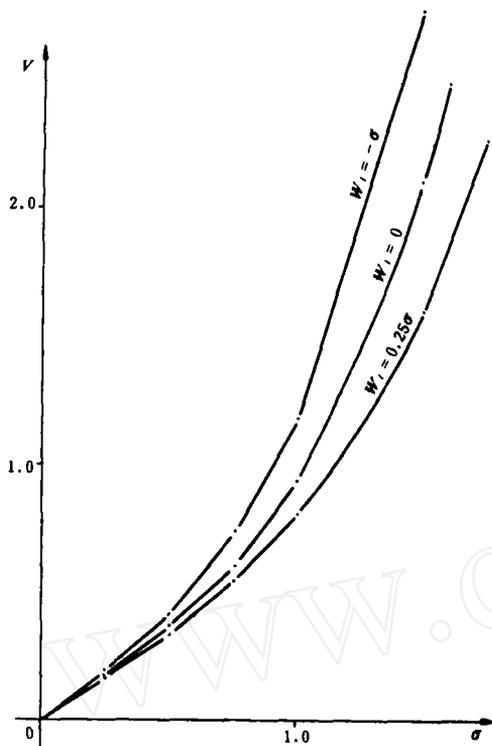


图 4

表 2

V (%)	D	R	σ	W <sub>D</sub>	切除部分 (%)
20	2	1.24	0.29	3.27	0.054
40	4	1.42	0.55	3.43	0.031
100	8	1.70	1.04	3.03	0.124
150	12	1.78	1.28	3.03	0.124
200	15	1.85	1.47	3.00	0.135

$$\text{其中 } W_D = \frac{\ln D \cdot R}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma$$

表 2 中所列前二项就是 B. И. 斯米尔诺夫的规定。假设所用的边界品位为  $Z_i = \exp(\xi)$ ，求出对应的  $R$  和  $\sigma$  值，然后按 (9) 式求出特高品位的切除部分。从结果看，切除部分只占 0.03~0.13%。

在山金储量计算中，不少地区采用平均品位 12 倍为下限。这时切除部分随金矿的对数方差  $\sigma$  而变化。用 (9) 式同样可以求出切除部分占 0.02~0.42%。

在实际工作中，由于实测的平均品位不同于理论平均品位  $R \exp(\xi + \frac{1}{2}\sigma^2)$ ，因此切除部分

会有某些增减，但总的比例大体如此。

山东焦家金矿是采用拐点法确定特高品位的下限。拐点的位置是用等差间隔绘的品位分布曲线确定。品位分布曲线 [图 1 (b)] 逐渐下降，然后变为 0~2 个样品之间跳动的水平线，其转折点就定为拐点，即特高品位的下限。在山东焦家金矿为 58 克/吨，按  $\xi$  和  $\sigma$  求出切除部分为 0.83%。这个方法也是缺乏依据的。首先按等差间隔绘出的品位分布曲线不能代表对数正态分布曲线的特征。前面已经讲过，曲线的跳动是由于在高品位地段所划分的间隔太小引起的，开始时在 0~2 个样品之间跳动，以后变为 0~1 个样品之间跳动，再后面 0 值越来越多。根据这种曲线确定的所谓拐点，显然是没有物理意义的。再从图 1 (a) 对数分布曲线来看，曲线在 58 克/吨位置上并没有什么特殊的变化，毫无理由选择 58 克/吨作为特高品位的下限。

上面讨论的目的，是要定量地估计出各种特高品位下限确定方法所切除部分的大小。从上面计算中可以看出，各种规定所切除的部分是不一致的，说明哪些应该切除，哪些不应该切除都是人为的，而不是有什么客观规律。这个问题在金矿中显得比较突出，其实在很多有色金属矿产中，也采用特高品位切除的办法，同样有类似的问题。从焦家金矿品位分析曲线来看，特高品位也是金矿体中的一部分，它的出现是符合一定概率的。因此，特高品位没有理由切除掉。

#### 小子样求算术平均值的估值

特高品位切除的办法，我国已延用多年。就是因为一个特高品位会影响算术平均值显著的增大，为了避免算术平均值形成很大的误差，就采用了切除的办法。

南非金矿在五十年代初就研究了对数正态分布规律，发现切除特高品位的办法是不恰当的，同时研究了包括特高品位在内时，如何求出算术平均值的估值。

在大子样情况下，首先求出品位分布曲线的三个参数  $\xi$ ， $a$  和  $\sigma$ ，然后再用 (3) 式就可以求出算术平均值的估值。这方面作者已介绍过<sup>[1]</sup>。

在大多数情况下,一个矿区只打几十个钻孔,计算一个矿段时往往只有几个钻孔。这样就不可求出品位分布曲线。通过几个钻孔或加上个别坑道资料,又不准切除特高品位样品,怎么才能求出一个较为准确的算术平均值的估值呢?这个问题在数学上可概括为,在对数正态分布条件下,小子样的推断或估值问题。这个数学问题,由D. J. Finney 在1941年已经解决。

小子样算术平均值的估值问题,是数学地质学家 H. S. Sichel 在1949年的硕士论文中再一次证明的,并广泛地应用于金矿。他从理论上否定了切除特高品位的办法,要求利用所有小子样的数据。

设有  $n$  个子样,则品位的对数平均值为  $\overline{\ln Z}$ 。

$$r_n(P) = \left[ 1 + \frac{1}{2}P + \frac{(n-1)}{2^2 \cdot 2! (n+1)} P^2 + \frac{(n-1)^2}{2^3 \cdot 3! (n+1)(n+3)} P^3 + \dots \right]$$

$r_n(P)$  是随子样的个数  $n$  和子样的对数方差  $P$  而变化。这个数学表达式包括了伽马函数和贝塞尔函数,是一个极为复杂的函数。计算时,参用 Sichel 的  $t$  估值因子表。

现在来举一个例子说明,下面所取的7个样品是南非某金矿一个掌子面上所取的品位数据,变化相当大,如表3所示。

表 3

$Z_j$ (克/吨)	$\ln Z_j$	$\ln^2 Z_j$
32	3.4657357	12.011325
9	2.1972246	4.827796
12	2.4849066	6.174761
127	4.8441871	23.466149
1822	7.5076901	56.365411
104	4.6443909	21.570367
45	3.8066625	14.490679
$\bar{Z} = 307.2$	4.1358282	19.843784 $\overline{\ln^2 Z}$ 17.105075 $(\overline{\ln Z})^2$ $P = 2.738709$ $r_n(P) = 3.302$

从上面这个例子看出,按算术平均值直接计算为307.2克/吨,按  $t'$  计算为246.0克/吨,按 Sichel  $t$  因子计算为206.4克/吨。如果按我国

其对数方差为  $P$ 。

$$\overline{\ln Z} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln Z_j \quad (10)$$

$$P = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\ln Z_j - \overline{\ln Z})^2 \quad (11)$$

则一般所求出的算术平均值的估值为  $t'$ 。

$$t' = \exp \left( \overline{\ln Z} + \frac{P}{2} \right) \quad (12)$$

(12)式对  $n$  趋近无穷大时,这个估值是对的,但对于小子样则有很大出入, H. S. Sichel 求出了小子样算术平均值估值  $t$ , 用下面二个公式表达<sup>[4]</sup>。

$$t = \exp(\ln Z) \cdot r_n(P) \quad (13)$$

某些规定把1822克/吨作为特高品位切除,用307.2克/吨代替,则求出平均值为90.9克/吨。从这里可以看出,不管特高品位如何,直接求算术平均值显然太高。如果把特高品位切除,代之以平均品位,这样求出的算术平均品位又太低了。哪一个算术平均值估值最好,还是应该用小子样的估值理论来求较好,它不但考虑到小子样的数目  $n$ , 还考虑了小子样的对数方差  $P$ 。因此,这一方法值得推荐,希望金矿地质工作者共同来研究这个问题,使我国金矿的品位计算更符合客观实际。

#### 参 考 文 献

- [1] 杨尔煦: 地质与勘探, 1984, 第12期, 第36~41页
- [2] Krige, D. G.: 用于矿产评价的对数正态地质统计学, 南非矿冶研究院丛书, 1978年
- [3] 斯米尔诺夫: 《矿物原料储量计算》, 北京, 地质出版社, 1955年
- [4] Sichel, H. S.: 矿山取样数据统计评价的新方法, 1952年