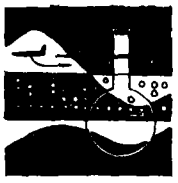
第21卷 第2期
1985年2月
地质与勘探
GEOLOGY AND PROSPECTING
Vol. 21, No. 2
February, 1985

任意形状均匀磁化体磁异常的计算

徐 世 浙

（山东海洋学院）



考虑了磁性体的退磁效应，磁性体内的磁化强度 J 为

$$\vec{J} = \frac{\kappa \vec{T} + \vec{J}_r}{1 + N\kappa} \qquad (1)$$

式中 κ 是磁化率，$\vec{T}$ 是磁化磁场，$\vec{J}_r$ 是剩磁强度，N 是退磁系数。对二次曲面包围的磁性体而言，N 是常数，所以这类磁性体是均匀磁化体；对于任意形状的物体，N 是坐标的函数，此时磁性体不再是均匀磁化。但 N 的变化范围在 $0 \sim 4\pi$ 之间。当 $\kappa < 0.001$ CGSM时，用1代替 $1 + 4\pi\kappa$，误差约为1%，可近似地认为是均匀磁化。

对于任意形状的均匀磁化体，磁异常计算常采用表面积分法[1,2]。前人的表面积分法采用坐标旋转，推出计算磁场的解析式。本文也采用这种方法，不过所用的是高斯数值积分公式，简化了推导和运算过程，并使计算精度提高。

二维情况

在均匀磁化的假设下，任意形状二维磁性体的水平磁异常 X 和垂直磁异常 Z 可表示为

$$X = 2\oint_{\Gamma} \frac{\cos\alpha}{r} J_n d\Gamma, \qquad Z = 2\oint_{\Gamma} \frac{\cos\gamma}{r} J_n d\Gamma \qquad (2)$$

式中 Γ 为磁性体的边界线，J_n 为磁化强度 $\vec{J}$ 在 Γ 的外法向的投影，r 是边界点至计算点 P 的距离，α 和 γ 是矢径 $\vec{r}$ 分别与 x，y，z 轴的夹角（图1）。

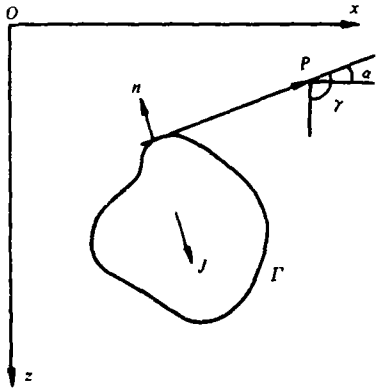


图 1

将边界 Γ 分为 n 个单元，每个单元 Γ_e 近似为直线，而且长度小于至计算点的距离。将（2）式分解为诸单元积分之和：

$$X = \sum_{\Gamma_e=1}^{n} \int_{\Gamma_e} \frac{\cos\alpha}{r} J_n d\Gamma, \qquad Z = \sum_{\Gamma_e=1}^{n} \int_{\Gamma_e} \frac{\cos\gamma}{r} J_n d\Gamma \qquad (3)$$

为了应用一维高斯求积公式，对每个单元进行数值积分，需要将直线单元上的二维坐标变换成一维坐标。

直线单元 Γ_e 两端点按坐标轴的旋转方向编号为 j，k，单元上任取一点 q，这三点的坐标的矢径为 (x_j, y_j)，(x_k, y_k)，(x, y)。从坐标原点到这三点的矢径记为 $\vec{B}_j$，$\vec{B}_k$ 和 $\vec{B}$（图2）。根据矢量加法显然有：$\vec{B} - \vec{B}_j = \xi_k(\vec{B}_k - \vec{B}_j)$，其中 ξ_k 是0至1的数，整理后得 $\vec{B} = \xi_j \vec{B}_j + \xi_k \vec{B}_k$，式中

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\xi_j = 1 - \xi_k$或$\xi_j + \xi_k = 1$。将各矢径的坐标代入，得

$$x = \xi_j x_j + \xi_k x_k, \qquad z = \xi_j z_j + \xi_k z_k \qquad (4)$$

从上式解出

$$\xi_j = \frac{x z_k - x_k z}{x_j z_k - x_k z_j}, \qquad \xi_k = 1 - \xi_j \qquad (5)$$

ξ_j，ξ_k是x，y的线性函数，而且满足：

$\xi_j = 1$，$\xi_k = 0$（在j点）；$\xi_j = 0$，$\xi_k = 1$（在k点）。

（5）式将直线单元的二维坐标（x，z）变换成（ξ_j，ξ_k）坐标，但由于$\xi_j + \xi_k = 1$，只有一个变量是独立的，所以是一维坐标。它与直线单元的方向无关，故称为长度坐标。

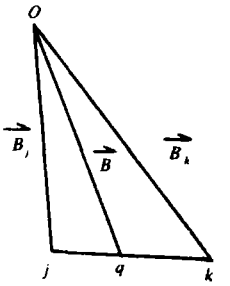


图 2

经上述坐标变换后，可用一维高斯求积公式对单元进行数值积分[3]。单元Γ_e的高斯积分为

$$\left.\begin{aligned} 2\int_{\Gamma_e} \frac{\cos a}{r} J_n d\Gamma &= 2 J_n \sum_{q=1}^{m} \frac{\cos a_q}{r_q} w_q l \\ 2\int_{\Gamma_e} \frac{\cos \gamma}{r} J_n d\Gamma &= 2 J_n \sum_{q=1}^{m} \frac{\cos \gamma_q}{r_q} w_q l \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

式中m是高斯求积公式所用的点数，

$r_q = [(x_p - x_q)^2 + (z_p - z_q)^2]^{1/2}$是高斯求积所用$q$点至计算点$P$的距离（图3），$q$点的坐标由（7）式及表1决定，$a_q$和$\gamma_q$是矢径$\vec{r}_q$分别与$x$轴和$z$轴的夹角，$w_q$是加权系数（见表1），$l$是单元$\Gamma_e$的长度，$q$点的坐标按下式计算：

$$\begin{aligned} x_q &= x_j \xi_j^{(q)} + x_k \xi_k^{(q)}, \\ z_q &= z_j \xi_j^{(q)} + z_k \xi_k^{(q)}, \quad (q = 1, \cdots\cdots m) \end{aligned} \qquad (7)$$

$\xi_j^{(q)}$，$\xi_k^{(q)}$的值见表1。

高斯求积所用的点数（m）少，计算时间节省，但计算精度较低；点数多则相反。根据经验选m等于2～4即可，相应的$\xi_j^{(q)}$，$\xi_k^{(q)}$，w_q可从有关的数值计算方法的书籍中查出[3]。现将$m = 2$，3，4的$\xi_j^{(q)}$，$\xi_k^{(q)}$和w_q的值列于表1。

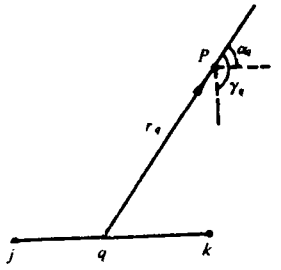


图 3

表 1

m	q	$\xi_j^{(q)}$	$\xi_k^{(q)}$	w_q
2	1	0.788675	0.211325	0.5
	2	0.211325	0.788675	0.5
3	1	0.887298	0.112702	0.277778
	2	0.500000	0.500000	0.444444
	3	0.112702	0.887298	0.277778
4	1	0.930568	0.069432	0.173927
	2	0.669990	0.330010	0.326073
	3	0.330010	0.669990	0.326073
	4	0.069432	0.930568	0.173927

磁化强度的外法向分量J_n和$\cos a_q$，$\cos \gamma_q$可写成：

$$J_n = \frac{J_x(z_k - z_j) - J_z(x_k - x_j)}{l}, \quad \cos a_q = \frac{x_p - x_q}{r_q}, \quad \cos \gamma_q = \frac{z_p - z_q}{r_q}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中J_x，J_z是J的x和z分量。将以上各式代入(6)中，并将（3）式写成便于编制计算程序的式子，

$$\left.\begin{aligned} X &= 2\sum_{\Gamma_e=1}^{n}\left[J_x(z_k-z_j)-J_z(x_k-x_j)\right]\sum_{q=1}^{m}\frac{(x_p-x_q)\,w_q}{(x_p-x_q)^2+(z_p-z_q)^2} \\ Z &= 2\sum_{\Gamma_e=1}^{m}\left[J_x(z_k-z_j)-J_z(x_k-x_j)\right]\sum_{q=1}^{m}\frac{(z_p-z_q)\,w_q}{(x_p-x_q)^2+(z_p-z_q)^2} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

按上式很容易编制计算程序，在计算机上实现运算。

三维情况

均匀磁化条件下，任意形状的三维磁性体的水平磁异常X，Y和垂直磁异常Z可表示为：

$$X=\oint_{\Gamma}\frac{\cos\alpha}{r^2}J_n d\Gamma,\quad Y=\oint_{\Gamma}\frac{\cos\beta}{r^2}J_n d\Gamma,\quad Z=\oint_{\Gamma}\frac{\cos\gamma}{r^2}J_n d\Gamma \tag{9}$$

式中Γ为磁性体的边界面，J_n为磁化强度$\vec{J}$在Γ的外法向的投影，r是边界点到计算点的距离，α，β，γ是矢径$\vec{r}$与坐标轴x，y，z的夹角。

用三角单元对边界面Γ进行剖分，使每个单元Γ_e近似为平面，并且Γ_e的线度小于至计算点的距离。将（9）式分解为诸单元积分之和：

$$X=\sum_{\Gamma_e=1}^{n}\int_{\Gamma_e}\frac{\cos\alpha}{r^2}J_n d\Gamma,\quad Y=\sum_{\Gamma_e=1}^{n}\int_{\Gamma_e}\frac{\cos\beta}{r^2}J_n d\Gamma,\quad Z=\sum_{\Gamma_e=1}^{n}\int_{\Gamma_e}\frac{\cos\gamma}{r^2}J_n d\Gamma \tag{10}$$

式中n是单元数。为了应用三角形的高斯求积公式对每个单元进行数值积分，需将任意三角单元上的三维坐标变换成二维坐标。

三角单元Γ_e的三个顶点，按坐标轴旋转方向编号为j，k，m，单元上任一点为q。这四点的坐标为(x_j, y_j, z_j)，(x_k, y_k, z_k)，(x_m, y_m, z_m)，(x, y, z)。从坐标原点O到这四点的矢径记为$\vec{B}_j$，$\vec{B}_k$，$\vec{B}_m$和$\vec{B}$（图4）。根据矢量加法，显然有

$$\vec{B}-\vec{B}_j=\xi_k(\vec{B}_k-\vec{B}_j)+\xi_m(\vec{B}_m-\vec{B}_j),$$

其中ξ_k，ξ_m是0至1的数，整理上式得

$$\vec{B}=\xi_j\vec{B}_j+\xi_k\vec{B}_k+\xi_m\vec{B}_m$$

其中$\xi_j=1-\xi_k-\xi_m$，或$\xi_j+\xi_k+\xi_m=1$。将各矢径的坐标代入，得

$$x=\xi_j x_j+\xi_k x_k+\xi_m x_m,\quad y=\xi_j y_j+\xi_k y_k+\xi_m y_m,\quad z=\xi_j z_j+\xi_k z_k+\xi_m z_m \tag{11}$$

从上式解出

$$\left.\begin{aligned} \xi_j &= \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} x & x_k & x_m \\ y & y_k & y_m \\ z & z_k & z_m \end{vmatrix} \qquad \xi_k = \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} x_j & x & x_m \\ y_j & y & y_m \\ z_j & z & z_m \end{vmatrix} \\ \xi_m &= \frac{1}{2\Delta}\begin{vmatrix} x_j & x_k & x \\ y_j & y_k & y \\ z_j & z_k & z \end{vmatrix} \qquad \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_j & x_k & x_m \\ y_j & y_k & y_m \\ z_j & z_k & z_m \end{vmatrix} \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Δ是三角元的面积，ξ_j，ξ_k，ξ_m是x，y，z的线性函数，并满足：

$\xi_j=1$，$\xi_k=\xi_m=0$（在j点）；$\xi_k=1$，$\xi_m=\xi_j=0$（在k点）；$\xi_m=1$，$\xi_k=\xi_j=0$（在m点）。

将(12)式中三角单元的三维坐标(x, y, z)变换成坐标(ξ_j, ξ_k, ξ_m)，但由于$\xi_j+\xi_k+\xi_m=1$，只有两个变量是独立的，所以是二维坐标，它与三角单元的形状无关，称为面积坐标。

经上述坐标变换后，可用二维的三角形的高斯求积公式对三角单元进行数值积分[3]。单元Γ_e的高斯积分为：

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

高斯积分为:

$$\left.\begin{aligned}\int_{\Gamma_e}\frac{\cos a}{r^2}J_n d\Gamma &= J_n\sum_{q=1}^{m}\frac{\cos a_q}{r_q^2}w_q\cdot\Delta\\ \int_{\Gamma_e}\frac{\cos\beta}{r^2}J_n d\Gamma &= J_n\sum_{q=1}^{n}\frac{\cos\beta_q}{r_q^2}w_q\cdot\Delta\\ \int_{\Gamma_e}\frac{\cos\gamma}{r^2}J_n d\Gamma &= J_n\sum_{q=1}^{n}\frac{\cos\gamma_q}{r_q^2}w_q\cdot\Delta\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

式中m是高斯求积公式所用的点数,

$r_q=[(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2+(z_p-z_q)^2]^{1/2}$是高斯求积所用$q$点到计算点$P$的距离，$q$点的坐标由（14）式和表2决定。

a_q，β_q和γ_q是矢径$\vec{r}_q$与x．y，z轴的夹角，w_q是加权系数（见表2），Δ是三角元的面积〔见(12)式〕，q点的坐标按下式计算:

$$\left.\begin{aligned}x_q &= x_j\xi_j^{(q)}+x_k\xi_k^{(q)}+x_m\xi^{(q)}\\ y_q &= y_j\xi_j^{(q)}+y_k\xi_k^{(q)}+y_m\xi^{(q)}\\ z_q &= z_j\xi_j^{(q)}+z_k\xi_k^{(q)}+z_m\xi^{(q)}\end{aligned}\right\}\quad,\ q=1,\ \cdots\cdots m,\qquad(14)$$

$\xi_j^{(q)}$，$\xi_k^{(q)}$，$\xi_m^{(q)}$的值见表2。

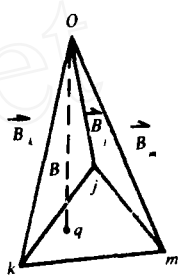


图 4

根据经验高斯求积所用点数m可选为3，4或7。相应的$\xi_j^{(q)}$，$\xi_k^{(q)}$，$\xi_m^{(q)}$和w_q值可从有关数值计算方法书籍中查得[3]。现将$m=3$，4，7的$\xi_j^{(q)}$，$\xi_k^{(q)}$，$\xi_m^{(q)}$和w_q的值列于表2

表 2

m	q	$\xi_j^{(q)}$	$\xi_k^{(q)}$	$\xi_m^{(q)}$	w_q
3	1	1/2	1/2	0	1/3
	2	0	1/2	1/2	1/3
	3	1/2	0	1/2	1/3
4	1	1/3	1/3	1/3	−9/16
	2	3/5	1/5	1/5	25/48
	3	1/5	3/5	1/5	25/48
	4	1/5	1/5	3/5	25/48
7	1	0.333333	0.333333	0.333333	0.225000
	2	0.794427	0.101287	0.101287	0.125939
	3	0.101287	0.794427	0.101287	0.125939
	4	0.101287	0.101287	0.797427	0.125939
	5	0.059716	0.470142	0.470142	0.132394
	6	0.470142	0.059716	0.470142	0.132394
	7	0.470142	0.470142	0.059716	0.132394

磁化强度的法向分量J_n以及$\cos a_q$，$\cos\beta_q$，$\cos\gamma_q$可写成:

$$J_n=\frac{J_x\Delta_x+J_y\Delta_y+J_z\Delta_z}{\Delta}$$

$$\cos a_q=\frac{x_p-x_q}{r_q},\quad\cos\beta_q=\frac{y_p-y_q}{r_q},\quad\cos\gamma_q=\frac{z_p-z_q}{r_q}$$

其中J_x，J_y，J_z和Δ_x，Δ_y，Δ_z分别是$\vec{J}$和三角元面积矢量$\vec{\Delta}$在x，y，z轴上的投影。Δ_x，Δ_y，Δ_z，

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

按下式计算：

$$\left.\begin{aligned}\Delta_x&=\frac{1}{2}[(y_k-y_j)(z_m-z_j)-(z_k-z_j)(y_m-y_j)]\\ \Delta_y&=\frac{1}{2}[(z_k-z_j)(x_m-x_j)-(x_k-x_j)(z_m-z_j)]\\ \Delta_z&=\frac{1}{2}[(x_k-x_j)(y_m-y_j)-(y_k-y_j)(x_m-x_j)]\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

将上式代入（13），将（10）写成便于编制计算程序的式子：

$$\left.\begin{aligned}X&=\sum_{\Gamma_e=1}^{n}(J_x\Delta_x+J_y\Delta_y+J_z\Delta_z)\sum_{q=1}^{m}\frac{(x_p-x_q)w_q}{[(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2+(z_p-z_q)^2]^{3/2}}\\ Y&=\sum_{\Gamma_e=1}^{n}(J_x\Delta_x+J_y\Delta_y+J_z\Delta_z)\sum_{q=1}^{m}\frac{(y_P-y_q)w_q}{[(x_P-x_q)^2+(y_P-y_q)^2+(z_P-z_q)^2]^{3/2}}\\ Z&=\sum_{\Gamma_e=1}^{n}(J_x\Delta_x+J_y\Delta_y+J_z\Delta_z)\sum_{q=1}^{m}\frac{(z_P-z_q)w_q}{[(x_P-x_q)^2+(y_P-y_q)^2+(z_P-z_q)^2]^{3/2}}\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

按上式很容易编制程序，在计算机上实现运算。

算　例

图5是二维的水平圆柱体上的计算结果。将圆柱体的边界线划分为20个单元，高斯求积点数 $m=4$，圆柱体半径 $r=1$，中心埋深 $h=1.2$。磁性参数 $J_x=0.0007$，$J_z=0.0007$。本方法的计算结果与理论计算结果非常吻合。在极大值附近约有0.3%误差；稍远处，几乎在5位有效数字内重合。若干点上的理论计算结果与本方法计算结果列于表3，便于对比。

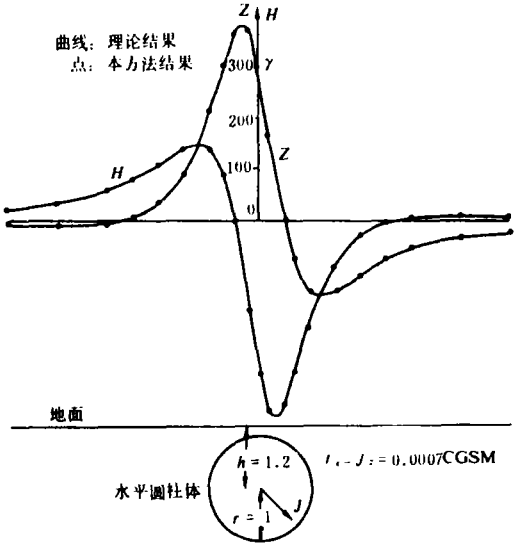


图　5

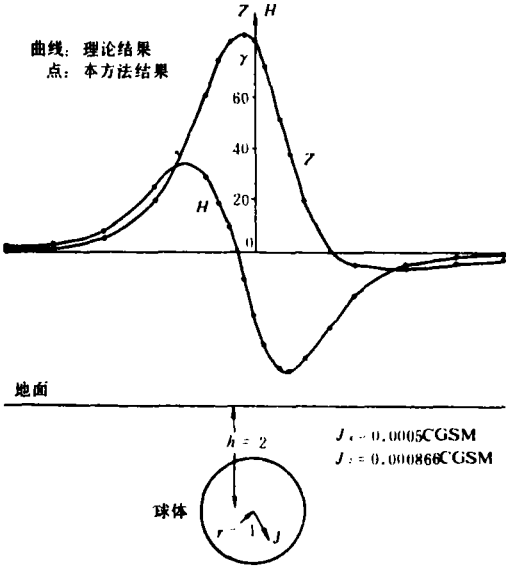


图　6

图6是三维球体上的计算结果。球体边界划分为120个单元，高斯求积点数 $m=4$，球体半径 $r=1$，球心埋深 $h=2$。磁性参数 $J_x=0.0005$ CGSM，$J_z=0.000866$ CGSM。本方法计算结果与理论计算结果基本吻合，误差一般小于1%。若干点上的计算值与理论值列于表3。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

续 3

二维水平圆柱体				三维球体			
Z		H		Z		H	
计算值	理论值	计算值	理论值	计算值	理论值	计算值	理论值
362.02	362.01	-305.46	-305.45	83.160	82.916	-44.142	-43.904
300.43	301.14	-371.32	-370.60	86.266	85.884	-45.466	-45.305
-142.43	-142.43	140.12	140.12	38.587	38.760	-5.2341	-5.2993
-79.083	-79.083	22.006	22.006	-2.4479	-2.4676	-2.4240	-2.4741

以上两例的计算是在mv/6000机上进行的，计算时间不到1分钟。

参 考 文 献

[1]《重磁资料数据处理问题》编写组：重磁资料数据处理问题，北京，地质出版社，1977年

[2] 王邦华等：物化探电子计算技术，1980年，第2期

[3] Brebbia, C. A.: The Boundary Element Method for Engineer, Pentech Press, 1978

一个含金石英脉矿床的品位统计方法

徐忠元

含明金的矿床中，金的分布往往是不均匀的，地质品位变化大，难以圈出矿体获得工业储量。但在生产中，这类矿床有的也具有一定的经济价值。

例如，湖南某石英脉型金矿在1976～1980年期间，人平均采金达10两左右，每年都上缴较大的利润。该矿每年的生产品位都高于地质品位。根据有关资料，按年度对生产品位和采区的平均地质品位统计对照如下：

年度	年平均生产品位S 克/吨	采区平均地质品位D 克/吨	S/D
1976	8.89	2.40	3.75
1977	5.35	2.20	2.43
1978	13.33	3.10	4.30
1979	15.94	3.04	5.24
1980	17.58	4.27	4.12
1981	9.16	3.80	2.41
1982	6.88	3.77	1.82
1983·1～4	13.10	4.75	2.76
总平均	11.28	3.42	3.32

上表中生产品位的计算采取：（黄金年产量÷出窿矿石+尾砂平均品位）×（1+年贫化率）。

在生产品位与地质品位之间建立如下数学模型：

$$S = A + B \times D$$

由回归分析得：

$$S = 3.45 + 2.29 \times D$$

（其中，相关系数 $\gamma = 0.466$ ）

生产品位比地质品位平均高3.3倍；回归分析而得的 A、B 系数都比较高。这些数据不能不引起地质人员的深思。

生产品位是矿体（母体）在一定空间范围内的平均品位，而单个地质品位只是样本（子样）品位，即使是许多子样的平均品位，也只是矿体上许多点的平均品位，这在品位变化大的矿床方面，它所能代表的空间范围仍然是非常有限的。更何况地质品位在采样、加工、分析等环节上都是随机数。在这种情况下，样品随机品位的代表性是非常有限的。生产中往往碰到地质品位高的地段并非是富矿段；而地质品位低的地段也采到了富矿。

面对这类品位变化大的矿床，怎么办？能否采取如下措施：从这类矿床的勘探和开采两方面进行调查，根据较多的资料建立生产品位与地质品位之间的数学模型，回过来对地质品位进行数理统计改正，利用改正后的品位圈定矿体、计算储量。山金矿床中，不少是属于这类金颗粒大因而分布很不均匀的类型。若能对传统的作法进行必要的改革，则这类矿床将出现转机，必将促进黄金生产的发展。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net