

三层斜触层的直流电测深问题

史 磷 华

(福建省地震局地震研究所)

两层斜触层的位场问题已有许多作者作过研究,但对三层斜触层的电测深问题,只是对一些特殊情况作过研究[2], [3], [4], [5],并未得到完全解决。过去一直是利用三层水平层的研究成果来推断解释三层斜触层的问题,并认为当倾角小于20°时,这种方法是可行的。对其可能引起误差的大小,也未作深入研究。

近年来,我国数学工作者提出了可供计算斜触层的点源位场公式[7, 8]。本文是在此基础上,通过模拟实验和理论计算分析,讨论了三层斜触层的定性和定量解释问题。

三层斜触层的数学模型

1. 数学模型 设有一直角坐标系(图1),其原点位于斜触层的公共点, x轴位于地形水平面内, z轴为各层面的交线, y轴垂直向上。各层面和 x轴的夹角分别为 $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ 。角度按 x轴反时针方向为正。为方便计,引入柱面坐标系:

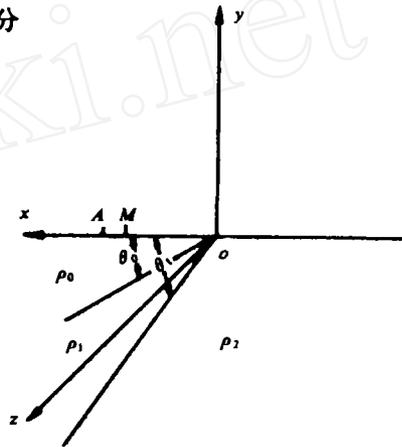


图1 三层斜触层的数学模型

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \\ z &= z \end{aligned}$$

令 U_0, U_1, U_2 分别代表各斜触层中的电位,它们应满足拉普拉斯方程和边界条件:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} &= 0 \\ (U_i - U_{i+1}) \Big|_{\phi=\theta_i} &= 0 \quad (i = 0, 1, 2) \\ \left(\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial U_i}{\partial \phi} - \frac{1}{\rho_{i+1}} \frac{\partial U_{i+1}}{\partial \phi} \right) \Big|_{\phi=\theta_i} &= 0 \\ \frac{\partial U_0}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} &= 0, \quad \frac{\partial U_2}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\theta_2} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

在 A 极附近, $U_0 \approx I \rho_0 / 2 \pi R$; 在无穹远点, U_0, U_1, U_2 均趋于零。

用分离变量法求解上述方程得:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{I \rho_0}{2 \pi \sqrt{r r_0}} \left[\frac{(1 + K_{01} + K_{12} + K_{01} K_{12}) Q_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{z^2 + r^2 + r_0^2}{2 r r_0} \right)}{\theta_2 + K_{01} (2 \theta_0 - \theta_2) + K_{12} (2 \theta_1 - \theta_2) + K_{01} K_{12} (2 \theta_0 - 2 \theta_1 + \theta_2)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \right. \\ &\frac{\cos \Gamma_n (\phi - \theta_2) + K_{01} \cos \Gamma_n (2 \theta_0 - \theta_2 - \phi) + K_{12} \cos \Gamma_n (2 \theta_1 - \theta_2 - \phi) + K_{01} K_{12} \cos \Gamma_n (2 \theta_0 - 2 \theta_1 + \theta_2 - \phi)}{\theta_2 \cos \Gamma_n \theta_2 + K_{01} (2 \theta_0 - \theta_2) \cos \Gamma_n (2 \theta_0 - \theta_2) + K_{12} (2 \theta_1 - \theta_2) \cos \Gamma_n (2 \theta_1 - \theta_2) + K_{01} K_{12} (2 \theta_0 - 2 \theta_1 + \theta_2) \cos \Gamma_n (2 \theta_0 - 2 \theta_1 + \theta_2)} \\ &\left. \cdot Q_{\Gamma_n - \frac{1}{2}} \left(\frac{z^2 + r^2 + r_0^2}{2 r r_0} \right) \right] \end{aligned} \tag{2}$$

$$U_2 = \frac{I\rho_0(1+K_{01})(1+K_{12})}{2\pi\sqrt{rr_0}} \left[\frac{Q_{-1/2} \left(\frac{x^2+r^2+r_0^2}{2rr_0} \right)}{\theta_2 + K_{01}(2\theta_0 - \theta_2) + K_{12}(2\theta_1 - \theta_2) + K_{01}K_{12}(2\theta_0 - 2\theta_1 + \theta_2)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\theta_2 \cos \Gamma_n \theta_2 + K_{01}(2\theta_0 - \theta_2) \cos \Gamma_n (2\theta_0 - \theta_2) + K_{12}(2\theta_1 - \theta_2) \cos \Gamma_n (2\theta_1 - \theta_2) + K_{01}K_{12}(2\theta_0 - 2\theta_1 + \theta_2) \cos \Gamma_n (2\theta_0 - 2\theta_1 + \theta_2)} Q_{\Gamma_n - \frac{1}{2}} \left(\frac{x^2+r^2+r_0^2}{2rr_0} \right) \right] \quad (3)$$

式中 Γ_n 为超越方程的解, 即

$$\sin \Gamma_n \phi_2 + K_{01} \sin \Gamma_n (2\theta_0 - \theta_2) + K_{12} \sin \Gamma_n (2\theta_1 - \theta_2) + K_{01}K_{12} \sin \Gamma_n (2\theta_0 - 2\theta_1 + \theta_2) = 0$$

的根, r_0, r_1 是供电极点 A 和电位计算点 M 到坐标原点的距离, $Q_{\Gamma_n - \frac{1}{2}}, Q_{-\frac{1}{2}}$ 是第二类勒让德函数,

$$K_{01} = \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0}, K_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1},$$

$$\theta_2 = 180^\circ, \phi = 0.$$

同理, 可求得供电点 A 位于原点 O 右边, M 点分别在 O 点左、右两边情况下的电位表达式^[7]。

2. 数学模型的验证 为验证上述数学模型, 采用了冻胶有限电阻率模拟法^[9]进行物理模拟。即用琼脂加其他电解质配制冻胶溶液来造型。不仅造型方便, 精度高, 而且更接近实际地电体

的情况, 比用土槽或水槽优越。

图 2 是直立出露的单个分界面的理论计算结果与模拟实验结果的对比。物理模拟是在有限电阻率冻胶造型上, 用对称四极法在 $1/4$ 空间中进行观测。模拟测量重复观测的相对均方误差为 1.26%。理论计算曲线和模拟曲线之间的相对误差为 3.6%。说明方法模拟的精度较高。

图 3 是三层斜触层理论计算曲线和物理模拟

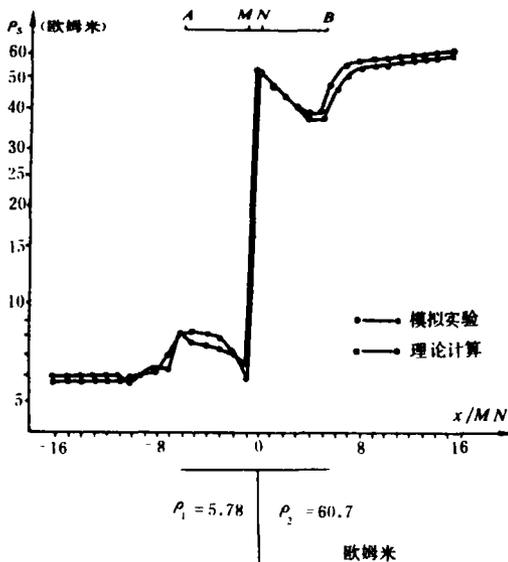


图 2 直立接触面理论曲线与模拟实验曲线对比

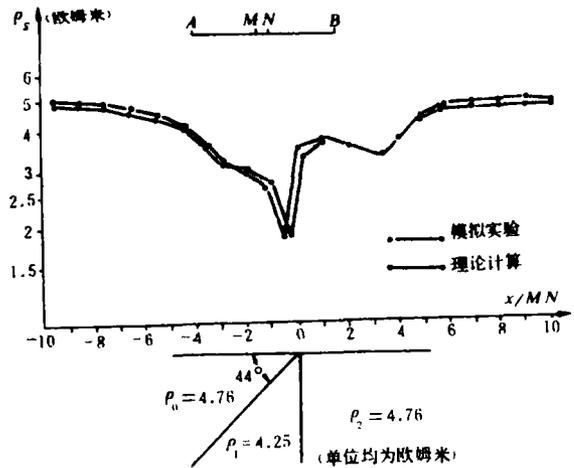


图 3 三层斜触层理论曲线与模拟实验曲线计算对比

曲线的对比 (造型和观测方法同图 2), 重复观测的相对均方误差为 1.42%。理论计算结果和物理模拟结果的相对均方误差为 3.12%。精度完全满足野外要求。对数学模型的验证是适用的。

关于三层斜触层的正演计算与分析

采用 TQ—16 计算机计算^[10]。设测深点距斜触层的交线的距离为 Dx , MO 是 AO 的十分

之一，避免曲线“脱节”，令AO与MO同步增大。

1. 拉线平行斜触层走向的分析 当斜触层的地电参数不变时，由于测深点位置变化得的H型四极测深曲线如图4。其形态与三层水平层的一样，而且正确地反映了地下电性断面的形态。不过，当测深点离接触面较近时，基于第二斜触层的低阻作用向下吸引电力线，使渐近值不趋近 ρ_0 。

随 Dx 值的增大，可能出现测深曲线向右侧移和极小值横坐标向右移的现象。这是由于测深

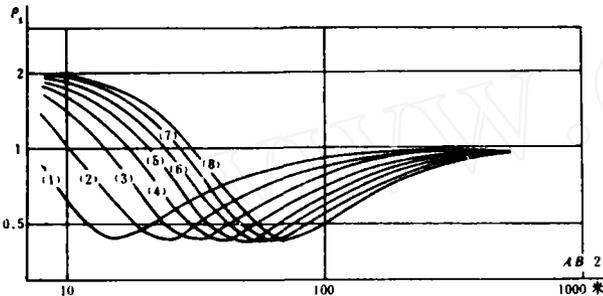


图4 不同测深点的H型三层斜触层测深曲线
(拉线平行走向)

1~8八条曲线的 Dx 值分别为：-15，-30，
-40，-50，-60，-70，-80，-90
 $\theta_0 = 10^\circ$ ， $\theta_2 = 20^\circ$ ， $\rho_0 = 2$ ， $\rho_1 = 0.1$ ，
 $\rho_2 = 2$ (ρ 的单位均为欧姆米)

点位随斜触层顶点的距离变化，使测深点对应斜触层分界面的深度 h 发生变化所导致的。但曲线的纵坐标一般保持不变。因为曲线的极大值或极小值主要取决于 h_2/h_1 的比，此比值并不随 Dx 改变，对三层斜触层而言，如图5所示，有如下的关系：

$$\begin{aligned} h_1 &= \text{tg } \theta_0 \cdot Dx \\ h_1 + h_2 &= \text{tg } \theta_1 \cdot Dx \\ h_2 &= \text{tg } \theta_1 \cdot Dx - h_1 \\ \frac{h_2}{h_1} &= \frac{\text{tg } \theta_1 \cdot Dx - h_1}{h_1} \\ &= \frac{\text{tg } \theta_1}{\text{tg } \theta_0} - 1 \end{aligned}$$

对确定的 θ_0 和 θ_1 ， h_2/h_1 是一常数，而与 Dx 无关。所以三层斜触层电测深曲线极值点的纵坐标值仍然不变。

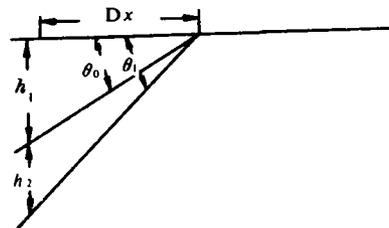


图5 三层斜触层剖面图

同时，计算结果指出：三层斜触层电测深曲线的尾支渐近值，在数值上总是低于或高于第三斜触层的电阻率值 ρ_2 ，与水平层电测深曲线的结果有明显的区别（参见表1，表中计算参数取

表1

$\theta_1 - \theta_0$ (度)	42.5	40	35	30	20	15	10	5
$\rho_s^{(H)} / \rho_2$ (%)	18.1	19.5	21.4	23.9	31	39.5	49.1	62.0
$\rho_s^{(K)} / \rho_2$ (%)	116	112.0	108	104	90	84	80	77
$\rho_s^{(A)} / \rho_2$ (%)	48	39.6	32	27.4	20.6	18.8	16.8	15.4

θ_1 值为 45° ，改变 θ_0 的值)。

表1列出了第一斜触层的倾角 θ_0 为不同值时（其他参数和测深点位不变），测深曲线尾支的渐近值与 ρ_2 的比值。由表1可知，K型曲线尾支的渐近值与 ρ_2 较为接近；H型和A型曲线则偏离较大。说明中间层相对第三斜触层是一低阻层，曲线尾支渐近值偏离 ρ_2 比中间层为高阻

时要大。

值得指出，无论哪种地电断面，欲利用斜触层测深曲线尾支的渐近值来确定 ρ_2 ，总会引起误差，H型和A型地电断面所引起的误差更大。

结果还表明，三层斜触层电测深曲线尾支的渐近值，受第一、二层的电性参数影响较大。尽管 ρ_2 不变，但不同的 θ_0 ， θ_1 ， ρ_0 和 ρ_1 会产

生不同的尾支渐近值。可见这与水平层的电测深的结果不同。水平层测深曲线的尾支渐近值，主要取决于 ρ_2 值的大小。曲线极值点的纵、横坐标的变化与水平层条件下极值点的变化基本一致。

2. 拉线垂直斜层走向的分析 在这种布板的情况下，得出的曲线如图6所示。曲线与水平层的情况相差很大，有明显的畸变。在供电电极A或测量电极B经过接触面时，畸变尤为显著。

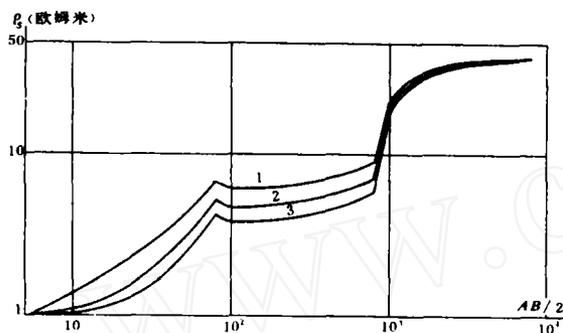


图6 θ_0 变化的A型三层斜触层测深曲线(布板垂直走向)

$Dx = -80$; $\theta_1 = 45^\circ$; $\rho_0 = 1$; $\rho_1 = 5$;
 $\rho_2 = 50$ (均为欧姆米); 1 - $\theta_0 = 5^\circ$;
 2 - $\theta_0 = 10^\circ$; 3 - $\theta_0 = 15^\circ$

除K型地电断面外，测深曲线尾支的渐近值都接近 ρ_2 。可见用垂直斜触层走向布板所得尾支渐近值来确定 ρ_2 值，其精度要高于用平行走向布板所取得的数值。

地电断面的定性解释

图7是H型地电断面的等视电阻率断面曲线，清晰地反映出是一向左倾斜的斜触层。根据曲线的数值变化，定为H型的三层斜触层地电断面。从垂直走向布板的测深曲线出现第一畸点时

供电电极B所处的位置，可判断接触面的位置。

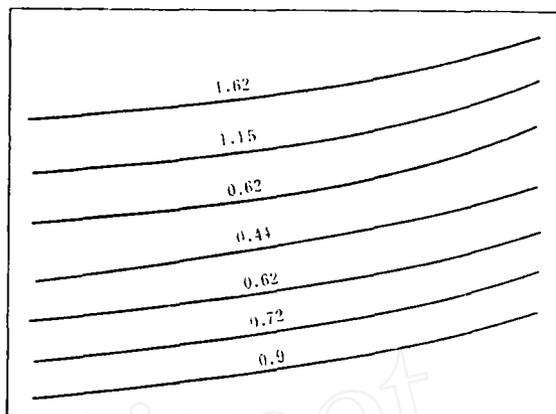


图7 布板平行走向的等视电阻率断面图

$\theta_0 = 10^\circ$; $\theta_1 = 20^\circ$; $\rho_0 = 2$; $\rho_1 = 0.1$;
 $\rho_2 = 2$ (单位均为欧姆米)

关于定量反演解释问题

1. 用水平层测深量板解释斜触层所带来的误差 先介绍一下这种解释方法(方法1)的步骤:

(1) 首先利用水平层量板解释计算的三层斜触层测深曲线，求得 ρ_0 、 ρ_2 、 h_1 和 H ($= h_1 + h_2$)的值。

(2) 利用B. H. 达赫诺夫提出的画圆弧、作切线、量角度的方法求得 θ_0 和 θ_1 值^[1]。

(3) 再利用下面的改正公式(图8)，即 $h_{改} = h \cdot \sec \theta$ 对求得的 h_1 和 H 进行改正。

当地电参数为以下值时:

$\theta_0 = 20^\circ$, $\theta_1 = 35^\circ$, $\rho_0 = 2$ 欧姆米, $\rho_1 = 0.1$ 欧姆米, $\rho_2 = 3$ 欧姆米, 用上述解释方法所得结果列于表2。

从表2可见， h_1 解释相对误差在20%以

表2

Dx	解释结果		相对误差		改正结果		改正后的相对误差	
	h_1	H	h_1 (%)	H (%)	$h_{1改}$	$H_{改}$	$h_{1改}$ (%)	$H_{改}$ (%)
-40	12.4	16.5	16.1	51.6	13.0	18.15	11.3	42.6
-60	18.0	24.9	15.3	51.8	18.87	27.39	14.5	42
-80	24.1	33.1	16.0	51.3	25.26	36.41	14.3	42.3

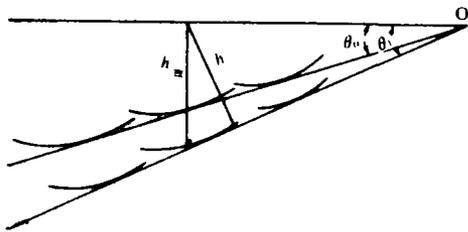


图8 三层斜触层等视电阻
率曲线断面图

内，而 H 的解释误差则达到50%左右。三个测深点的解释误差基本一致，说明三层斜触层定量解释误差的大小，主要取决于地电断面的参数。 ρ_2 和 ρ_1 以及 θ_0 和 θ_1 的差值越大，解释误差也越大。

确定 h_1 和 H 之后，再画圆弧可得 $\theta_0 = 18^\circ$ ， $\theta_1 = 25^\circ$ ，所求 θ_0 值的相对误差达10.5%， θ_1 的误差为33.3%。由于 θ_0 ， θ_1 值有误差，所以改正后的 H 值仍有误差。显然，不能满足定量解释的要求。通过对许多曲线的解释，发现即使倾角小于 20° ，但如果 ρ_0 和 ρ_1 差值较大（假定50倍）， H 解释的相对误差仍将为33%左右。不过此结果在实际工作中还能定性地反映地下电性基底形态。但为定量解释，误差还嫌太大。

2. 关于H型三层斜触层电测深结果的解释 由于斜触层的参数比水平层的多，制作量板非常累赘，不能采取象对待水平层那样，制作量板来进行解释。

从前面的分析得知，要提高解释精度必须提高 θ_0 和 θ_1 的解释精度。前者为10%，后者为40%左右。主要要提高 θ_1 的解释精度；从而提高 H 的精度，也就能提高曲线的解释精度。

通过大量的平行走向布极测深曲线分析，发现只要 Dx 和 ρ_2 值保持不变， θ_1/θ_0 ， ρ_1/ρ_0 比值相同，则无论 ρ_0 ， ρ_1 ， θ_0 和 θ_1 的值如何，曲线的左支切线与水平线的夹角也不变。利用此关系，我们制作了三组 α 曲线量板(图9)，量板的横坐标为 θ_0 与 θ_1 的比值，纵坐标为曲线左支与水平线的夹角，量板是按不同的 ρ_0/ρ_1 值绘制的。

H型斜触层测深曲线的解释(方法2)步骤：

(1) 利用二层水平量板求得 ρ_0 和 θ_0 ，并根据曲线尾支渐近值得 ρ_2 。

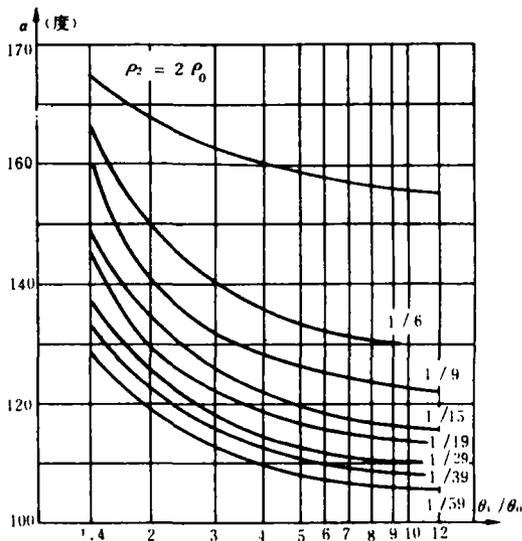
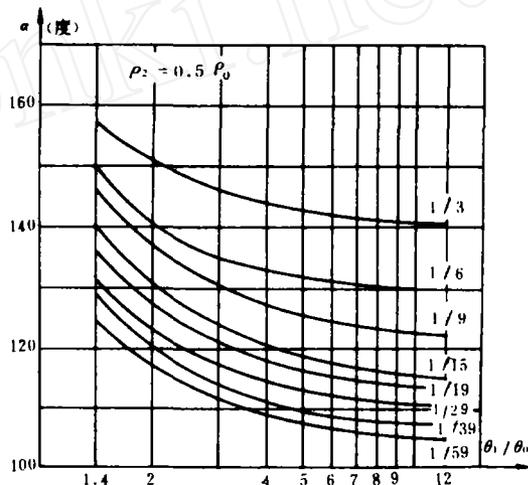
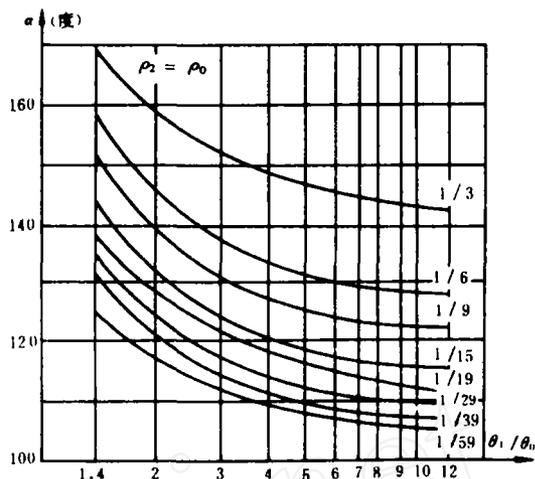


图9 三层斜触层电测深曲线
反演解释的 α 曲线量板

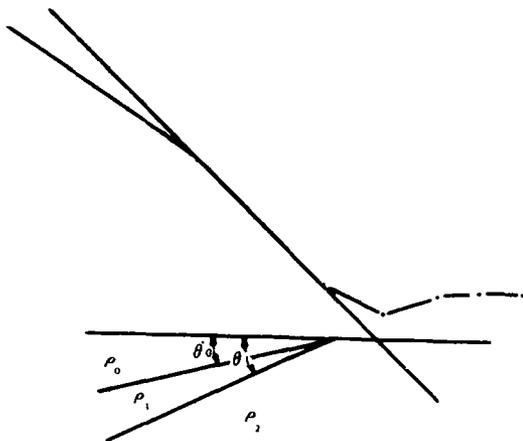


图10 三层斜触层电测深模拟曲线
(拉线平行于斜触层走向)

(2) 作实测曲线左支的切线, 量得 α 角, 然后根据已知的 ρ_1 值, 求得 ρ_1 和 ρ_0 的比。知道 ρ_2 和 ρ_1 / ρ_0 , 可选用比较接近的 α 曲线量板, 求得与 ρ_1 / ρ_0 对应的 θ_1 / θ_0 值 (如 α 量板上无对应的 ρ_1 / ρ_0 比值曲线, 可在相邻两曲线之间内插求得)。

(3) 因为 $\theta_1 / \theta_0 = \alpha$, 所以 $\theta_1 = \theta_0 \cdot \alpha$, 可得出较精确的 θ_1 值。

此法与水平层的解释法相同, 只是在 ρ_1 值为已知时, 才能求得唯一的解。否则解仍将是多值的。

利用上述两种不同解释方法, 对地电断面参数为 $\theta_0 = 15^\circ$, $\theta_1 = 45^\circ$, $\rho_0 = 19$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 6$ (单位均为欧姆米) 的理论曲线进行了解释。由方法 1 求得 $\theta_0 = 14^\circ$ (相对误差为 6.8%), $\theta_1 = 31^\circ$ (相对误差为 36.8%), 由方法 2 求得的 θ_1 为 41.16° (相对误差为 8.9%)。 θ_1 的解释精度提高, H 经改正后, 其精度也得到了提高。

通过大量反演计算, ρ_2 值确定不准, 对确定 θ_1 的影响不大。一般来讲, 选取解释 α 曲线量板的 ρ_2 值如大于实测曲线的 ρ_2 值, 所得 θ_1 解释误差为正, 反之亦然。而且各层之间的电性差异越大, 以及中间层的夹角越大, 解释结果的误差也越大。

3. 模拟实验曲线的反演解释 模拟的地电断面参数为:

$\theta_0 = 12^\circ$, $\theta_1 = 20.5^\circ$, $\rho_0 = 39$, $\rho_1 = 3.1$, $\rho_2 = 9.8$ (欧姆米), 布极平行于走向, 测深点到原点的距离为 5、10、15 厘米。

利用方法 1 求得的 $\theta_0 = 12^\circ$, $\theta_1 = 19.5^\circ$ 。 θ_0 无误差, θ_1 的相对误差为 5%。

利用方法 2, 作图 10 曲线左支的切线, 量得其倾角是 136° 。选用 $\rho_2 = \frac{1}{2} \rho_0$ 量板, 求得 $\theta_1 = 20.4^\circ$ (均方误差为 0.5%)。例中各层电性差异不大, 所以解释结果的误差也比较小。如果各层电性差异较大, 解释误差也将增大。

结 论

大量正演曲线解释, 发现 θ 角即使小于 20° , 解释精度仍与各层间的电性差异有很大的关系。建议采用所介绍的 α 曲线量板, 可以提高解释精度。

对 K 型三层斜触层地电断面计算结果表明, 和 H 曲线一样, 也可制作 α 曲线量板, 用于定量反演解释。对 A 型和 Q 型斜触层地电断面的推断解释, 尚有待进一步探讨。

工作中得到程方道、曾宪明等同志的支持, 在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] 卡连诺夫, E. H. (黄敏煜等译); 《垂向电测深曲线图解释》北京, 石油出版社, 1959年
- [2] Альпин Л. М. : Тр. ВКГР, 1935, Вып. 18, ОНТИ
- [3] Марков А. М. : Геофизика, 1938, №. 5.
- [4] Альпин Л. М. : Геофизика, 1940, №. 2
- [5] Maeda, K. : Geophysics, 1955, Vol. 20. No. 1
- [6] Сахарников Н. А. : Вопросы Геофизики, Ученые Записки ЛГУ, Серия Физических и Геологических Наук, 1963, Вып. 14
- [7] 屈超纯: 应用数学学报, 1978, 第 4 期
- [8] 叶乃庸: 应用数学学报, 1983, 第 2 期, 第 191~204 页
- [9] 中国科学院沈阳计算技术研究所: 《电子计算机常用算法》, 北京, 科学出版社, 1976年