

(2) 垂直磁化水平薄板

$$\text{公式: } |Z(\omega)| = 2\pi M_s e^{-H\omega} \frac{\sin B \omega}{B}$$

程序: **STO** I 2 π E * e^x (-) H I D X sin B I D : B ,
I + I

(3) 垂直磁化无限延深直立薄板

$$\text{公式: } |Z(\omega)| = 2\pi M_s e^{-H\omega}$$

程序: **STO** I 2 π E * e^x (-) H I D , I + I

(4) 顺层磁化无限延深薄板

$$\text{公式: } |Z(\omega)| = 2\pi M \sin \alpha e^{-H\omega}$$

程序: **STO** I 2 π E * sin B * e^x (-) H I D , I + I

结 束 语

1. 本计算器, 可以进行程序运算, 但不用学习任何算法语言知识。程序编制容易, 基本上根据所要计算的数学模型。

2. 磁法野外数据的整理, 以及常规的磁异常推断解释方法, 均可应用本计算器来完成。

3. 携带方便, 适于野外使用。

4. 价格便宜, 适于普及推广。

边界元法及其在物探工作中的应用

王 书 惠

边界元法在数值解法中利用拉普拉斯方程的基本解和格林公式, 简单易行, 可以解决物性参数分区均匀的一类正演问题 (电法和重、磁法勘探问题), 也可计算向上延拓。特别是将它与有限元法结合, 解决复杂边值问题, 可取得较理想的效果。

边界元法的基本计算方法有直接法和间接法两种。

边界元法的直接法

现以磁法勘探正问题为例来说明。

解磁法正问题可归结为在求解区域 Q 上解拉普拉斯方程的边值问题, 并可用边界元法求解, 先求出边界面上各点的磁位和磁位的法向导数, 然后通过调和函数与边值间的函数关系, 算出磁性介质内外各点的磁位, 进而求出各点的磁场强度。由于磁位是实际存在的物理量, 故称其为边界元法的直接法 具体作法如下。

考虑磁性介质中导磁率 μ 的分布是分区均匀的情况, 每一个 μ 值相同的区称为磁性的子区 Q_i , 包围每个子区的封闭界面称为该子区的边界 S_i^+ , 子区之间可以是衔接的, 也可以是分离的, 但不相交; 磁介质可以由一个或几个这样的磁性子区组成。在这些磁性子区外部是无穷大的无磁性空间 Q_0 , 称它为外区。包围它的边界是无穷大的封闭曲面 S_∞ 和与各磁性子区边界面 S_i^+ 相重合的 S_i^- ; S_i^+ 和 S_i^- 为曲面 S_i 的外侧面和内侧面, 整个求解区域 Q 由外区 Q_0 和若干个

磁性子区 Q_i 构成, 记为 $Q = Q_0 + \sum_{i=1}^n Q_i$, Q 的完整边界 S 是 Q_0 的边界和各 Q_i 的边界的总体, 记为

$$S = S_\infty + \sum_{i=1}^n S_i^+ + \sum_{i=1}^n S_i^-$$

总磁位 U 在各子区中均满足拉普拉斯方程, 在 Q 中连续, 特别是在各边界上连续, U 是调和函数。

根据格林定理^[4]

$$\int_{\Omega} U \nabla^2 V dv - \int_{\Omega} V \nabla^2 U dv = \oint_{S_i} U \frac{\partial V}{\partial n} ds - \oint_{S_i} V \frac{\partial U}{\partial n} ds \quad (1)$$

式中, U 为调和函数, V 为在磁介质 Ω_i 内某点 Q 作用一个单位磁距的点源所形成的位势函数, 即:

$$V(P) = \ln \frac{1}{r_{PQ}} \quad (\text{二维}) \quad (2)$$

$$V(P) = \frac{1}{r_{PQ}} \quad (\text{三维}) \quad (3)$$

r_{PQ} 为 Q 点与 P 点间的距离。

求解区域 Ω 和其边界 S 的定义如前所述。根据调和函数的性质, 对每个子区可由 (1) 式导出:

$$cU(P) = \oint_{S_i} U \frac{\partial V}{\partial n} ds - \oint_{S_i} V \frac{\partial U}{\partial n} ds \quad (4)$$

其中, $P \in \Omega_i + S_i$, c 是一个系数

$$c = \begin{cases} 4\pi, & \text{当 } P \in \Omega_i \text{ 时} \\ 2\pi, & \text{当 } P \in S_i, \text{ 且 } P \text{ 点所在处曲面光滑时} \\ S_i \text{ 在 } P \text{ 点所张之立体角, 当 } P \in S_i, \\ & \text{且 } P \text{ 点所在处曲面不光滑时。} \end{cases}$$

(以上是三维情况, 二维情况与此类似, 故从略)

如果在 S_i 上磁位 U 及其法向导数 $\partial U / \partial n$ 均为已知, 则由 (4) 式便可求 Ω_i 内任一点 P 的总磁位 $U(P)$, 而 $\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{S_i^+} - \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{S_i^-} = 4\pi\sigma$ (σ 为界面上的面磁荷密度), 因此, 空

间任一点的磁场强度为:

$$\begin{cases} H_x(P) = \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \frac{\sigma}{r_{PQ}^2} \cos \alpha ds \\ H_y(P) = \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \frac{\sigma}{r_{PQ}^2} \cos \beta ds \\ H_z(P) = \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \frac{\sigma}{r_{PQ}^2} \cos \gamma ds \end{cases} \quad (5)$$

式中 α, β, γ 是矢径 r 的方向余弦。

由此可见, 关键问题是要求出磁介质界面上各点的总磁位 U 及法向导数 $\partial U / \partial n$, 为此将 P 点从 Ω_i 中移到界面 S_i 上, 并用 Q 表示, 同样有:

$$cU(Q) = \oint_{S_i} U(Q') \frac{\partial V(Q')}{\partial n} ds - \oint_{S_i} V(Q') \frac{\partial U(Q')}{\partial n} ds \quad (6)$$

$Q \in S_i, Q' \in S_i$

现讨论 S_∞ 和 S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的离散化, 为简单起见, 以二维问题为例。假定只有一个磁性子区 Ω_i , 并设 S_∞ 和 S_i 退化为平

面封闭曲线 Γ_∞ 和 Γ_i , 先在外区 Ω_0 及边界 Γ_∞ 和 Γ_i 上考虑, 将 Γ_∞ 离散为 m_2 条线段组成的封闭折线, Γ_i 离散为 m_1 条线段组成的封闭折线。

$$\text{总磁位 } U(\xi, \eta) \sim \sum_{m=1}^M \alpha_m(\xi, \eta) U_m, \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_\infty + \Gamma_i^- \quad (7)$$

$$\text{法向导数 } \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial n} \sim \sum_{m=1}^M \beta_m(\xi, \eta) \hat{U}_m \quad (8)$$

$$M = m_1 + m_2$$

$U_m, \hat{U}_m$ 分别为 U 和 $\partial U / \partial n$ 在 Γ_∞ 和 Γ_i 上

第 m ($m = 1, 2, \dots, M$) 个离散结点的取值, 采用向量表示:

$$(U) = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{m_1+m_2} \end{Bmatrix}, \quad (\hat{U}) = \begin{Bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \vdots \\ \hat{U}_{m_1+m_2} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

其中 $\alpha_m(\xi, \eta)$, $\beta_m(\xi, \eta)$ 为 $\Gamma_\infty + \Gamma_1$ 上的分段连续函数, $\alpha_m(\xi_m, \eta_m) = 1$, $\beta_m(\xi_m, \eta_m) = 1$, 当 $j \neq m$ 时, $\alpha_m(\xi_j, \eta_j) = 0$, $\beta_m(\xi_j, \eta_j) = 0$, 可以根据 $\Gamma_\infty + \Gamma_1$ 上各线段

l_m 及相应结点的具体坐标写出并计算 $\alpha_m(\xi, \eta)$ 和 $\beta_m(\xi, \eta)$ 的表达式。将 (2)、(7)、(8) 式代入 (6) 式, 经整理后得到:

$$c_l U_l = - \sum_{m=1}^M P_{lm} U_m - \sum_{m=1}^M q_{lm} \hat{U}_m^{(1)} \quad (10)$$

$$([P] + [C])(U) = [Q](\hat{U}) \quad (11)$$

其中 $[P]$ 和 $[Q]$ 均为 $M \times M$ 阶非对称的实矩阵, $[C]$ 为 M 阶对角矩阵, 最后导出:

$$(\hat{U}) = [A](U) \quad (12)$$

$$(U) = [A]^{-1}(\hat{U}) \quad (13)$$

其中 $[A] = [Q]^{-1}([P] + [C])$

现在考虑磁性子区 $\Omega_1 + \Gamma_1^+$ 内, 因为假定导磁率为均值 μ , 则 $\nabla \cdot J = 0$ (J 是 Ω_1 内任一点的磁化强度)。在磁介质 Ω_1 内, 总磁位 U 亦满足拉普拉斯方程, 在 Γ_1 上满足连续性条件, 为便于下面的叙述, 将 $\Omega_1 + \Gamma_1^+$ 内的总磁位记为 ϕ , 于是,

$$\phi|_{\Gamma_1^+} = U|_{\Gamma_1^-} \quad (14)$$

$$\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma_1^+} = \left(- \frac{\partial U}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma_1^-} \quad (15)$$

和 Γ_1^- 一样, 用同一条封闭折线代替 Γ_1^+ , 并将 ϕ 离散化, 用向量 (Φ) 记 m_1 个结点上的磁位值 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{m_1}$, 用向量 $(\hat{\Phi})$ 表示其相应的 $\partial \phi / \partial n$ 值, 即:

$$(\Phi) = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{m_1} \end{Bmatrix} \quad (\hat{\Phi}) = \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{m_1} \end{Bmatrix}$$

和 (12)、(13) 式类似, 有:

$$(\hat{\Phi}) = [E](\Phi) \quad (16)$$

$$(\Phi) = [E]^{-1}(\hat{\Phi}) \quad (17)$$

其中 $[E]$ 是 $m_1 \times m_1$ 阶非对称的实矩阵, 由 (14) 式推出:

$$U_i = \phi_i, (i=1, 2, \dots, m_1) \quad (18)$$

采用如下的行向量记号

$$(u)^T = (U_1, U_2, \dots, U_{m_1})$$

$$(\bar{u})^T = (U_{m_1+1}, U_{m_1+2}, \dots, U_M)$$

$$(\hat{u})^T = (\hat{U}_1, \hat{U}_2, \dots, \hat{U}_{m_1})$$

$$(u')^T = (\hat{U}_{m_1+1}, \hat{U}_{m_1+2}, \dots, \hat{U}_M)$$

并用分块矩阵改写 (12) 式, 得:

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ u' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \bar{u} \end{pmatrix}$$

其中:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m_1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_11} & a_{m_12} & \dots & a_{m_1m_1} \end{bmatrix}$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} a_{1m_1+1} & a_{1m_1+2} & \dots & a_{1M} \\ a_{2m_1+1} & a_{2m_1+2} & \dots & a_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_1m_1+1} & a_{m_1m_1+2} & \dots & a_{m_1M} \end{bmatrix}$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} a_{m_1+11} & a_{m_1+12} & \dots & a_{m_1+1m_1} \\ a_{m_1+21} & a_{m_1+22} & \dots & a_{m_1+2m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1} & a_{M2} & \dots & a_{Mm_1} \end{bmatrix}$$

$$[A_4] = \begin{bmatrix} a_{m_1+1m_1+1} & a_{m_1+1m_1+2} & \dots & a_{m_1+1M} \\ a_{m_1+2m_1+1} & a_{m_1+2m_1+2} & \dots & a_{m_1+2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{Mm_1+1} & a_{Mm_1+2} & \dots & a_{MM} \end{bmatrix}$$

$$\therefore (\hat{u}) = [A_1](u) + [A_2](\bar{u}) \quad (19)$$

代入 (15) 式, 得到:

$$\{\mu[E] - [A_1]\}(u) = [A_2](\bar{u}) \quad (20)$$

$$\text{即 } [KB](u) = (G) \quad (21)$$

$$[KB] = \{\mu[E] - [A_1]\},$$

$$(G) = [A_2](\bar{u}) \quad (22)$$

其中 $(\bar{u})$ 为 Γ_∞ 上各离散点的磁位势值,

在第 i 点, $\mathbf{u}_i = -H_0 \mathbf{r}_i$, ($i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, M$), H_0 是均匀的地磁场强度, $\mathbf{r}_i$ 是 i 点的矢径。[E], [A₁], [A₂] 可以根据 Γ_∞ 、

Γ_1 上各结点的坐标、基本解 $\ln \frac{1}{r_{QO}}$ 及 $\alpha_m(\xi, \eta)$, $\beta_m(\xi, \eta)$ 计算出来。

可见 (21) 式就是求 Γ_1 上各点磁位值 U_i ($i = 1, 2, \dots, m_1$) 的线性方程组, 解此方程组求出 ($\mathbf{u}$), 代入 (19) 式可求出 ($\hat{\mathbf{u}}$), 代入 (16) 式可求出 ($\hat{\Phi}$), 再由 $\hat{\Phi}_i - \hat{U}_i = 4\pi\sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, m_1$) 求出 σ_i , 然后利用与 (5) 式类似的公式就可求出空间任一点 P 的磁场强度。从而得到正问题的全部解。

$$U(P) = \oint_S f(P, Q) \sigma(Q) ds \quad (23)$$

$$\Delta Z(P) = \oint_S g(P, Q) \sigma(Q) ds \quad (24)$$

式中 $f(P, Q)$ 为 Q 点 ($Q \in S$) 作用一个单位磁荷的点源在 P 点引起的磁位, 对于二维问题:

$$f(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PQ}} \quad (25)$$

对于三维问题:

$$f(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r_{PQ}} \quad (26)$$

函数 $g(P, Q)$ 表示在 Q 点作用一个单位磁荷的点源在 P 点引起的 ΔZ

边界元法的间接法

前述解磁法正问题, 它实质上是寻求一个在区域 Q 中满足拉普拉斯方程, 在边界 S 上满足边界条件的磁位函数 $U(x, y, z)$ 。

由场论得知, 无限介质中的点源函数除点源所在点外均能满足拉普拉斯方程。显然, 点源集合的函数亦具有这种性质, 如果又能找到满足边界条件的点源集合的函数, 也就得到了所求的磁位函数。这里所谈的点源集合是指分布在某一曲面上的连续分布的点源集合。

假定沿曲面 S 有按某种规律分布的单位面积强度为 $\sigma(Q)$ ($Q \in S$) 的磁荷源, 在分布源的作用下, Q 内任一点 P 的磁位 U 和 ΔZ 为:

$$g(P, Q) = \frac{\partial f(P, Q)}{\partial z} \quad (27)$$

(若求 ΔX 时, 只要取 $g(P, Q) = -\frac{\partial f(P, Q)}{\partial x}$;

求 ΔY , 与之类似)。 $f(P, Q)$, $g(P, Q)$ 在 Q 中均满足拉普拉斯方程 (在 S 上有奇点), $\sigma(Q)$ 是连续分布的, 我们可以利用给定的边界条件求出 σ 沿 S 的分布函数。方法如下:

设将 P 点由 Q 内移到边界上 Q' 点, 则 (23)、

(24) 式变成:

$$U(Q') = \oint_S f(Q', Q) \sigma(Q) ds \quad (28)$$

$$-\hat{U}(Q') = \oint_S g(Q', Q) \sigma(Q) ds + c\sigma(Q') \quad (29)$$

c 为边界曲面在 Q' 点的形状系数。可以根据该点的几何参数计算:

$$c = \lim_{R_e \rightarrow 0} \frac{R_{ev}}{R_e} \quad (30)$$

R_e 以 Q' 点为球心的微小圆球的体积 (二维时是微圆的面积), R_{ev} 是该微球 (或微圆) 在 Q 外的体积 (或面积)。如果已知 S 上的 $U(Q')$ 或 $\hat{U}(Q')$, ($Q' \in S$), 解积分方程组 (28)、

(29), 便可求得 $\sigma(Q')$ ($Q' \in S$), 然后再用 (23)、(24) 式即可求得 Q 内任意点的 U 和 ΔZ (或 ΔX , ΔY)。

求积分方程组 (28)、(29) 的理论解, 实际上是办不到的, 只能用数值计算方法求其近似解。将边界 S 离散成有 N 个结点的 M 个单元, 根据不同的单元形态确定 $\sigma(Q)$ 的模式, 构造插值函数。设边界上有 k 个点已知磁位 (如在无穷

大的封闭线 Γ_∞ 上已知均匀地磁场的磁位), 另外已知 $N - k$ 个结点的 $\hat{U}$ (如在地平面上已知

$\Delta Z = -\frac{\partial U}{\partial n}$), 则 (28)、(29) 式可化为如下的代数方程组:

$$U_n = \sum_{m=1}^M F(n, m) \cdot (\sigma)_m, \quad (n = 1, 2, \dots, k) \quad (31)$$

$$-\hat{U}_n = \sum_{m=1}^M G(n, m) \cdot (\sigma)_m, \quad + c \sigma_n \quad (n = k+1, k+2, \dots, N)$$

其中 $(\sigma)_m$ 为 N 维向量,

$$(\sigma)_m^T = (0, \dots, 0, \sigma_{i_1}, 0, \dots, \sigma_{i_2}, 0, \dots, \sigma_{i_m}, 0, \dots, 0)$$

在上面的两公式中, $i_1, i_2, \dots, i_m$ 为第 m 个单元所包含的结点的编号, $F(n, m)$, $G(n, m)$ 均为 $1 \times N$ 阶矩阵, 可以根据各边界元的参数、各结点的坐标及 (25) 或 (26) 式算出。(31) 式共有 N 个代数方程, 可以求解出 N 个结点处的 σ 值。

这个方法首先要求沿边界分布的源函数, 此源函数是虚拟的, 目的是借助虚拟的源函数求磁位势, 这种方法也是一种等效源法。

从前面所述可见, 无论是边界元法的直接法或是其间接法均可归结为求解一组积分方程。所以边界元法实质上也是一种积分方程法。因为它只在边界上求解积分方程, 所以又可以称为边界积分方程法。

边界元法与有限元法相结合

单纯用边界元法解物性参数分布比较简单的

问题有简单易行的优点, 但用来解复杂问题就完全失去其优越性, 现将它与有限元法结合起来使用, 充分发挥各自的优点, 对解决复杂问题尤其是涉及到无穷大区域的复杂问题极为有利, 下面仍以解二维磁法正问题为例予以说明。

为叙述简单起见, 设 Ω_0 是无磁性的外区, 只有一个磁介质区域 Ω_1 , 具有磁各向异性, 导磁率张量 $[\mu]$ 的各分量是点 (x, y) 的连续函数, 总磁位 U 满足如下的方程和定解条件:

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{在 } \Omega_0 \text{ 内} \\ \nabla \cdot ([\mu] \nabla U) = 0 & \text{在 } \Omega_1 \text{ 内} \\ U|_{\Gamma_\infty} = \bar{U} \\ U|_{\Gamma_1^+} = U|_{\Gamma_1^-} \\ \mathbf{n} \cdot ([\mu] \nabla U)|_{\Gamma_1^+} = -\frac{\partial U}{\partial n}|_{\Gamma_1^-} \end{cases} \quad (32)$$

其中 $\bar{U}$ 是 Γ_∞ 上各点的均匀地磁场的磁位。 $\bar{U} = -H_0 \cdot \mathbf{r}$ (设 H_0 为地磁场强度)。

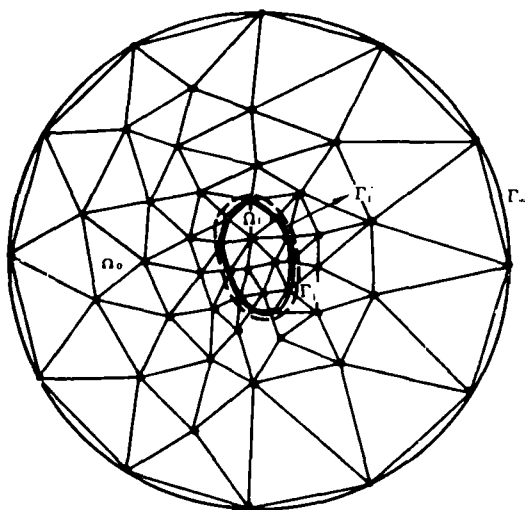


图 1

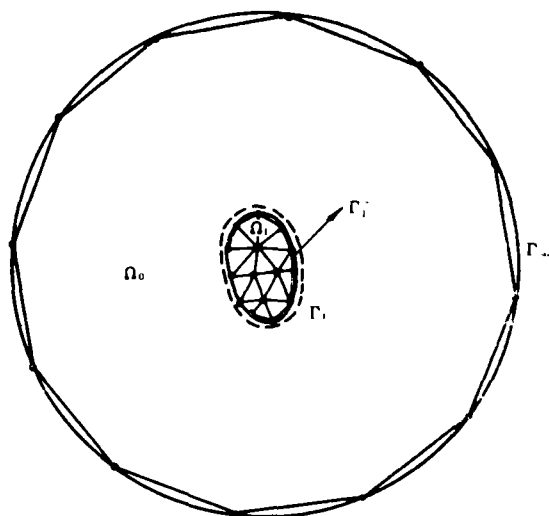


图 2

如用有限元法求解, 首先需要将整个区域 Ω 剖分 (见图 1), 对所有单元及结点予以编号并取结点的坐标数据。为了保证有一定的计算精度, Γ_∞ 不能剖分得太小, 要使 Ω_0 的尺寸比 Ω_1 至少大 5 ~ 10 倍, 这是一项费时间的烦琐工作, 常常成为用有限元法解无穷域问题的限制之一。如果改为在 Ω_1 内用有限元法, 在外区 Ω_0 中用边界元法, 将两种方法结合起来求解问题 (32), 就只需在 Ω_1 内作有限元剖分, 在 Ω_0 中仅对边界 Γ_∞ 作剖分 (见图 2), 这就省掉了在 Ω_0 中作区域剖分和对大量结点编号、取数据的准备工作, 而且单纯对 Γ_∞ 剖分 (不必考虑与区域剖分的衔接) 很

简单。其次, 正因为对 Γ_∞ 剖分简单, 于是可以随意将 Ω_0 扩大, 取 Ω_0 比 Ω_1 大 100 倍以上也无需增加太多的结点。比如设 Γ_∞ 为一个大圆, 只需在圆上取 12 个等分结点, 通过放大圆的半径可将 Γ_∞ 任意放大, 12 个结点的坐标分量也需要乘以相应的放大倍数, 完全可以不在剖分图上将 Γ_∞ 及结点画出来。这样大的 Ω_0 与 Ω_1 相比较, 更接近无穷域。显然这对提高磁位 U 数值解的精度很有好处。

如何将这两种方法有机地结合起来呢? 从能量的观点来看, 在区域 Ω 上的总磁能可视为在区域 Ω_0 和 Ω_1 上的磁能 W_* 与 W_π 之和, 即:

$$W(U) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_1} \nabla U \cdot (\mu \nabla U) ds + \frac{1}{2} \iint_{\Omega_0} \nabla U \cdot \nabla U ds^* \\ W(U) = W_\pi + W_* \quad (33)$$

根据变分原理, 求解定解问题 (32) 可等价地化为求泛函 $W(U)$ 的极值问题。

$$W_* = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_0} \nabla U \cdot \nabla U ds \\ = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_\infty + \Gamma_1^-} U \frac{\partial U}{\partial n} dl - \frac{1}{2} \iint_{\Omega_0} U \nabla^2 U ds$$

考虑到 U 在 Ω_0 中满足拉普拉斯方程, 则

$$W_* = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_\infty + \Gamma_1^-} U \frac{\partial U}{\partial n} dl \quad (34)$$

由格林定理 (二维时):

$$\iint_{\Omega_0} (U \nabla^2 V - V \nabla^2 U) ds = \oint_{\Gamma_\infty + \Gamma_1^-} (U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}) dl$$

可取 $V = \ln(1/r)$

$$r = [(y - \xi)^2 + (z - \eta)^2]^{\frac{1}{2}} \\ (y, z) \in \Omega_0 + \Gamma_\infty + \Gamma_1^- \\ (\xi, \eta) \in \Gamma_\infty + \Gamma_1^-$$

$$c U(y, z) = \oint_{\Gamma_\infty + \Gamma_1^-} \left[\left(\ln \frac{1}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] dl \quad (35)$$

若记:

$$\begin{cases} U(\xi, \eta) = u(\xi, \eta) \\ \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial n} = \hat{u}(\xi, \eta) \end{cases}$$

现将 Γ_∞ , Γ_1^- 分别用封闭折线代替, 在 Γ_1 上取 m_1 个结点, 封闭折线由连接这 m_1 个结点的 m_1 条线段构成。完全类似地, Γ_∞ 上有 m_2 个结点及 m_2 条线段。令 $M = m_1 + m_2$, 将 M 个结点

上的 $u(\xi, \eta)$ 和 $\hat{u}(\xi, \eta)$ 值分别用向量 (u) 和 $(\hat{u})$ 表示, 在各线段上用 (u) 和 $(\hat{u})$ 构造分段插值函数, 近似函数 $u(\xi, \eta)$ 和 $\hat{u}(\xi, \eta)$, 于是, 类似 (12) 式的推导,

* 在 $W(U)$ 表达式的各项中, 略去了系数 $1/\pi$

(35) 式变成:

$$(\hat{\mathbf{u}}) = [\mathbf{Q}]^{-1} ([\mathbf{P}] + [\mathbf{C}]) (\mathbf{u}) \quad (36)$$

其中 $[\mathbf{P}]$, $[\mathbf{Q}]^{-1}$ 是 $M \times M$ 阶的不对称实矩

则 $P_{i1} + P_{i2} + \dots + P_{iM} + c_{ii} = 0, (i = 1, 2, \dots, M)$

$$\text{所以 } c_{ii} = - \sum_{k=1}^M p_{ik}, \quad c_{ij} = 0, \quad (\text{当 } i \neq j) \quad (37)$$

代入 (34) 式, 经整理后: $W_{*} = \frac{1}{2} (\mathbf{u})^T [\mathbf{R}] (\hat{\mathbf{u}})$, $[\mathbf{R}]$ 是 $M \times M$ 阶实对称矩阵, 可以根据结点的几何参数及各单元的分段插值函数算出它的各个元素。

$$\therefore W_{*} = \frac{1}{2} (\mathbf{u})^T [\mathbf{R}] [\mathbf{Q}]^{-1} ([\mathbf{P}] + [\mathbf{C}]) (\mathbf{u})$$

$$\text{令 } [\mathbf{KB}] = [\mathbf{R}] [\mathbf{Q}]^{-1} ([\mathbf{P}] + [\mathbf{C}]) \quad (38)$$

$$W_{*} = \frac{1}{2} (\mathbf{u})^T [\mathbf{KB}] (\mathbf{u}) \quad (39)$$

现在来考虑磁介质区域, 将 $\mathcal{Q}_1$ 及 Γ_1^+ 按有限元法作区域剖分, 假定总结点数为 $N + m_1$, 即 $\mathcal{Q}_1$ 内部有 N 个结点, Γ_1^+ 上有 m_1 个结点, 这 m_1 个结点与用边界元法时在 Γ_1^- 上所取得的完全重合, 用 $(N + M) \times 1$ 维向量 $(\mathbf{U})$ 表示整个求解区域上各结点的总磁位值, 并将 $(\mathbf{U})$ 分块表示:

$$(\mathbf{U}) = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \\ \dots \\ U_{N+1} \\ \vdots \\ U_{N+m_1} \\ \dots \\ U_{N+m_1+1} \\ \vdots \\ U_{N+M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ \dots \\ \tilde{U} \\ \dots \\ \bar{U} \end{Bmatrix} \quad (40)$$

U_1 对应 $\mathcal{Q}_1$ 中各结点上的 $U_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 所构成的分向量, $\tilde{U}$ 对应 Γ_1^+ (或 Γ_1^-) 上的 $U_i (i = N + 1, N + 2, \dots, N + m_1)$ 组成

阵, $[\mathbf{C}]$ 是 $M \times M$ 阶对角矩阵。 (35) 式对磁位 $U \equiv 1$ 的情况亦应成立, 当 $U \equiv 1$ 时, $\hat{\mathbf{u}} \equiv 0$

的分向量, $\bar{U}$ 对应 Γ_∞ 上的 $U_i (i = N + m_1 + 1, N + m_1 + 2, \dots, N + M)$ 组成的分向量, 根据定解条件 $\bar{U}$ 是已知的。

根据参考文献 [2] 第 64 页

$$W_{*} = \frac{1}{2} (U_1^T, \tilde{U}^T) [\mathbf{K}] \begin{pmatrix} U_1 \\ \tilde{U} \end{pmatrix}$$

类似地将矩阵 $[\mathbf{K}]$ 和 $[\mathbf{KB}]$ 用分块矩阵表示:

$$[\mathbf{K}] = \begin{Bmatrix} [\mathbf{K}_{11}] & [\mathbf{K}_{12}] \\ \vdots & \vdots \\ [\mathbf{K}_{21}] & [\mathbf{K}_{22}] \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} i=1 \\ i=2 \\ \vdots \\ i=N \\ i=N+1 \\ \vdots \\ i=N+m_1 \end{matrix}$$

$$[\mathbf{KB}] = \begin{Bmatrix} [\mathbf{KB}_{11}] & [\mathbf{KB}_{12}] \\ \vdots & \vdots \\ [\mathbf{KB}_{21}] & [\mathbf{KB}_{22}] \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} i=1 \\ i=2 \\ \vdots \\ i=m_1 \\ i=m_1+1 \\ \vdots \\ i=M \end{matrix}$$

$$j = 1, 2, \dots, N, N+1, \dots, N+m_1$$

$$j = 1, 2, \dots, m_1, m_1+1, \dots, M$$

$$W \approx \frac{1}{2} \{ U_1^T [K_{11}] U_1 + U_1^T ([K_{21}]^T + [K_{12}]) \tilde{U} + \tilde{U}^T ([K B_{11}] + [K_{22}]) \tilde{U} + \tilde{U}^T ([K B_{12}] + [K B_{21}]^T) \bar{U} + \bar{U}^T [K B_{22}] \bar{U} \} \quad (41)$$

$$\text{令 } \frac{\partial W}{\partial U_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N + m_1 \quad (42)$$

又考虑到 $[K]$ 为实对称矩阵, 所以有:

$$\begin{cases} [K_{11}] U_1 + [K_{12}] \tilde{U} = 0 \\ [K_{21}] U_1 + \left\{ [K_{22}] + \frac{1}{2} ([K B_{11}] + [K B_{11}]^T) \right\} \tilde{U} \\ = - \frac{1}{2} ([K B_{12}] + [K B_{21}]^T) \bar{U} \end{cases} \quad (43)$$

如果 Q_1 有剩余磁性, W 中还应加有因剩余体磁荷 ρ_r 和剩余面磁荷 σ_r 引起的磁能, 方程组 (43) 右端还应加上相应的已知项 (见 [2] 64 页), 为叙述方便这里略去不计。

解线性方程组 (43) 求出 $U_i, i = 1, 2, \dots, N + m_1$, 从而可进一步求出空间任何一点的磁场强度和磁介质内部各点的有效磁化强度 (见 [2] 60 页)。

我们应用这个方法计算了一个解二维理论模型的例子, 计算结果与单纯用有限元法的结果相吻合, 同时也算了一个野外实例。

1. 理论模型 (见图 3)

地磁场 $i_0 = 45^\circ, T_0 = 1.10^5 \gamma$

各向同性区 Q_1 : 磁化率 $\kappa = 0.05 \text{ CGSM}$;

各向异性区 Q_2 : 平行于层理方向的磁化率 $\kappa_{||} = 0.15 \text{ CGSM}$; 垂直于层理方向的磁化率

$\kappa_{\perp} = 0.05 \text{ CGSM}$ 。层理面如图 3 所示。

图中曲线为本方法的计算结果, 黑点为用有限元法的计算结果, 在 Q_1, Q_2 内二种方法作同样的区域剖分, 在磁性体外 (Q_0 区) 有限元法还需作区域剖分。

2. 实例 (见图 4)

引自参考文献 [3], 迁安菜园矿区已基本勘探完毕, 我们和首钢勘探公司研究室共同对菜园 0 号勘探线剖面作了定量计算。计算采用实测的磁参数 (详见 [3])。

磁铁矿埋深在 40 米以上部分: $\kappa_{||} = 0.10933 \text{ CGSM}, \kappa_{\perp} = 0.05013 \text{ CGSM}$; 磁铁矿体埋深在 40 米以下部分: $\kappa_{||} = 0.1749 \text{ CGSM}, \kappa_{\perp} = 0.08 \text{ CGSM}$ 。

结 语

边界元法适于解物性参数分区均匀 (特别是仅有二、三个分区) 的正演问题, 如重磁法、电阻率法的正演问题。它只需对边界作离散处理, 简单易行, 节省时间, 能适应界面形状复杂或为无穷大的情况。但方法所导出的线性方程组的系数矩阵不对称、零元素少, 不能压缩存储。如果物性参数变化复杂, 势必存在多个边界面, 相应地使边界离散化的工作量, 也就是使结点数和机器存储量都大为增加, 这就不如用有限元法有利了。

在物性参数变化很复杂以及涉及到无穷域的情况下, 将边界元法和有限元法结合起来解物探正演问题效果很好, 既可以充分发挥有限元法解题能力强、通用性强的优点, 又可充分发挥边界

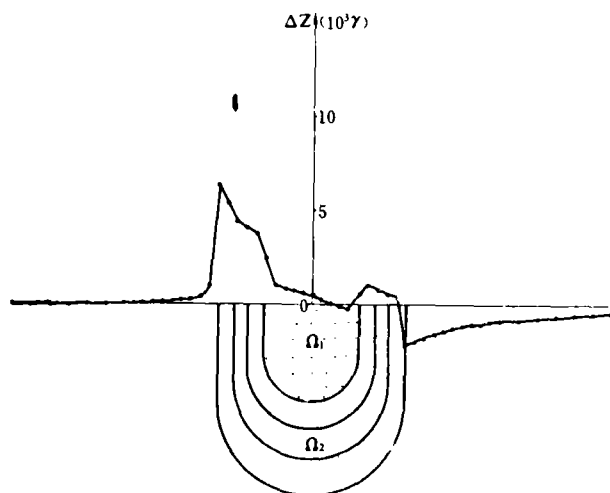


图 3

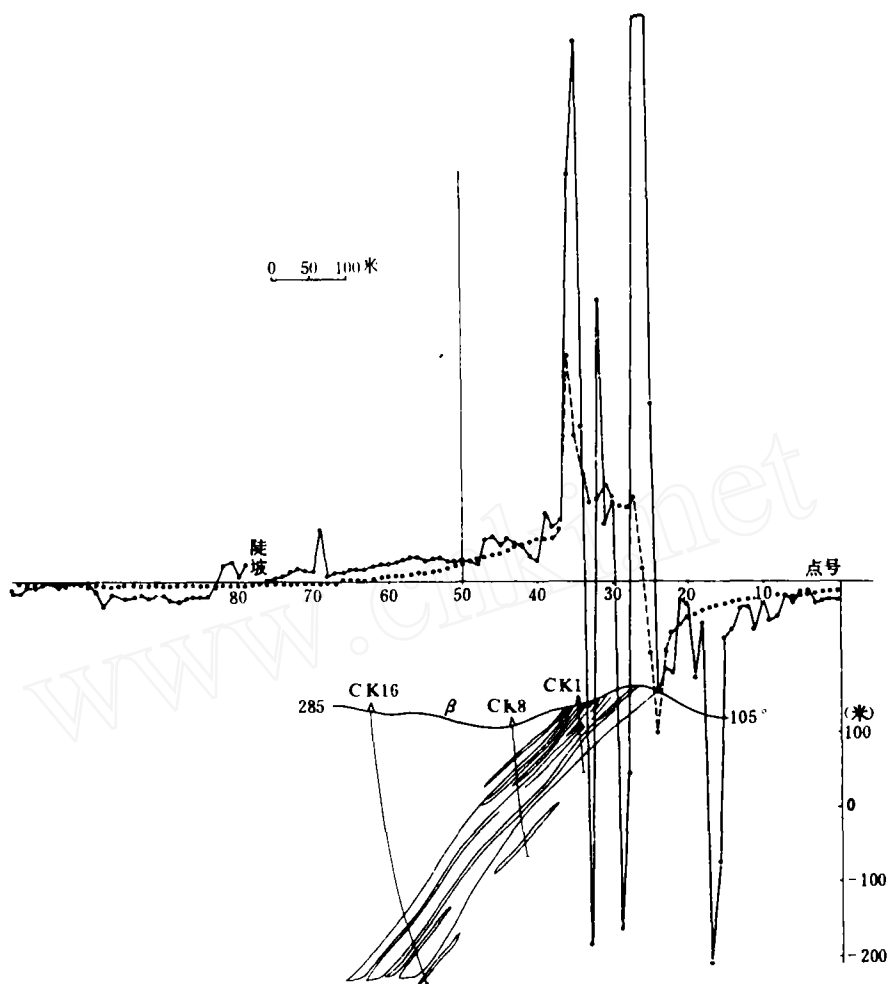


图 4

元法处理无穷区域简单易行的优点。使解题的精度和效率都得到提高，而且计算前的准备工作量比较小，是一种值得推广的方法。

参考文献

[1] C. A. Brebbia, 1978, The Boundary

Element Method for Engineer, Pentech Book Co., London.

[2] 王书惠, 1983, 地球物理学报, 第26卷, 第1期

[3] 王振平、孟繁琪, 1983, 沉积变质类型磁铁矿床矿石磁性特征的研究(研究报告、未发表)

[4] 薛琴访, 1964, 场论, 中国工业出版社

马山金矿累乘晕统计特征及其地质意义

安徽省冶金地质勘探公司812队 祝亚尼 徐运莲

对马山金矿床的研究表明, 化探累乘晕异常可作为金矿的找矿标志。累乘晕异常在各类地质

体(灰岩、砂岩、岩体、硫铁矿等)上都各有其自身特征, 但由于各种地质作用多次活动的影