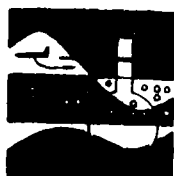


# 用样条函数插值的电阻率地形改正方法

中南矿冶学院 何继善 任宝琳



物探与化探

地形切割使电阻率法结果发生畸变,导致错误的解释,故有必要在推断解释之前对地形影响予以改正。我国早在60年代就系统地开展了这方面的研究。从理论和实践来看,应用效果较好的是“比较法”。这是一种基于经验的方法,可在很大程度上削弱地形影响,从而提高地质效果。这种地改方法,是将野外实测的视电阻率值逐点除以相应的地形异常:

$$\rho_s^G = \rho_s^S / (\rho_s^D / \rho_0) \quad (1)$$

式中:  $\rho_s^G$ —经地形改正的  $\rho_s$  值;  $\rho_s^S$ —野外实测  $\rho_s$  值;  $\rho_s^D / \rho_0$ —归一化的纯地形  $\rho_s$  值。方法的关键是如何得到相应的纯地形异常。最初是用土槽模拟实际地形进行实测,所取得的大量结果,证实了比较法的有效性,但用土槽模拟在造型方面有困难,观测精度也不高。后来改用薄水层、导电纸或二度电阻网络等方法进行模拟。另外还采用保角映射数学方法来计算各种纯地形的异常曲线。上述这些物理的、数学的模拟方法均比较简便,但只能解决二维问题,即其应用条件要求不但地形是二维的,场源也必须是二维的(场为无限长的线电流源,而野外实际工作中是用点电流源供电)。几年前,解决了点源场角域纯地形异常的实际计算问题,于是可用角域的叠加求得起伏二度地形的纯地形异常。这是一个可喜的进展。然而点源场角域电位的表达式包含了多重无穷级数,计算时间长,在奇点附近收敛慢。因此,本文提出了利用三次样条函数插值的方法,来计算电位畸变值,进而得到纯地形异常,以此进行地形改正。该方法不仅计算速度快,而且可以计算由  $90^\circ$  山脊角域到  $270^\circ$  山谷角域之间角度为任意的角域单元所组成的任意有限个角域单元的叠加地形。已编制了该方法的 FORTRAN 语言电算程序,可用来快速计算测区地形的纯地形异常,和经改正后的视电阻率值,并能直接打印出成果图件。计算精度完全能满足野外生产要求。

## 有关数学公式

(1) 角域单元电位畸变公式 图1中,  $AOB$  为二度地形的一个基本单元——角域,当顶角  $\varphi$  大于  $180^\circ$  时,角域相当于山谷,当顶角  $\varphi$  小于  $180^\circ$  时,角域相当于山脊,  $\beta$ ,  $\alpha$  分别为角域的左、右坡角,并且有关系式:

$$\alpha + \beta + \varphi = \pi \quad (2)$$

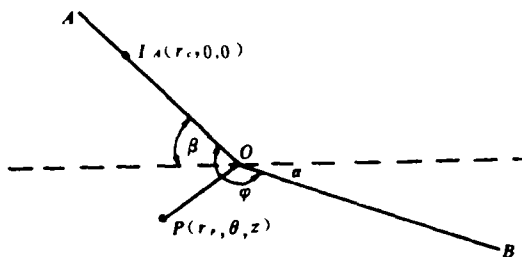


图1 角域单元示意图

建立柱坐标系,通过解拉普拉斯方程,可得角域某动点  $P(r, \theta, z)$  的电位表达式:

$$V_P = -\frac{Ip_0}{\pi \varphi \sqrt{r_P \cdot r_C}} \left\{ \frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\theta\pi}{\varphi} \cdot Q_{\frac{m\pi}{\varphi}-\frac{1}{2}}(\xi) \right\} \quad (3)$$

式中:

$$\xi = \left| \frac{r_C + r_P^2 + z^2}{2 r_C \cdot r_P} \right| \quad (4)$$

$$Q_\nu(\xi) = \frac{\Gamma(\nu+1) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{(2\xi)^{\nu+1} \cdot \Gamma(\nu+\frac{3}{2})} \cdot F\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+2}{2}, \nu+\frac{3}{2}, -\frac{1}{\xi^2}\right) \quad (5)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot 1 \cdot 2} x^2 + \dots \quad (6)$$

$Q_\nu(\xi)$  为第二类非整数阶勒让德函数,  $F$  为超几何函数。

经归一化, 可得测线与地形走向垂直时的电位畸变公式:

$$U(\varphi, \tau) = \frac{2|1-\tau|}{\varphi \sqrt{t}} \left\{ \frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\tau}{t}\right)^m \cdot Q_{\frac{m\pi}{\varphi}-\frac{1}{2}}(\xi) \right\} \quad (7)$$

式中:

$$\tau = \begin{cases} r_P/r_C & \text{当 } |r_P| < |r_C| \text{ 时} \\ r_C/r_P & \text{当 } |r_P| > |r_C| \text{ 时} \end{cases} \quad (8)$$

$$t = |\tau| \quad (9)$$

(2) 样条函数插值公式 所采用的是三次样条函数插值法, 能保证函数在插值结点处的函数值不变, 一阶导数和二阶导数都具有连续性, 而且还可以在非结点处 (即插值点处) 得到比较平滑而无振荡现象的曲线。理论和实践均证明: 这种方法的插值精度较高。下面简要介绍三次样条插值函数的理论和公式:

设在区间  $(a, b)$  上给定分划

$$\Delta: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (10)$$

与相应点上的函数值:  $y_0, y_1, \dots, y_n$ 。

定义三次样条函数  $S_\Delta(x)$  为具有下列性质的函数:

(i)  $S_\Delta(x)$  在  $(a, b)$  上有一阶及二阶连续导数;

(ii) 在每个子区间  $[x_{j-1}, x_j]$  上,  $(j = 1, 2, \dots, n)$   $S_\Delta(x)$  是三次多项式;

(iii)  $S_\Delta(x_j) = y_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$ 。

引入记号,  $M_j = S''_\Delta(x_j), m_j = S'_\Delta(x_j), (j = 1, 2, \dots, n)$  分别表示  $S_\Delta(x)$  在分点  $x_j$  处的二阶及一阶导数值。

由函数的定义可推导得:

$$S_\Delta(x) = M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6 h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6 h_j} + (y_{j-1} - \frac{M_{j-1}}{6} h_j^2) \frac{x_j - x}{h_j} + (y_j - \frac{M_j}{6} h_j^2) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

式中:

$$h_j = x_j - x_{j-1}; \quad x_{j-1} \leq x \leq x_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

利用函数  $S_\Delta(x)$  一阶导数的连续性可得方程组:

$$\mu_j M_{j-1} + 2 M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (12)$$

式中:

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}};$$

$$\mu_j = 1 - \lambda_j;$$

$$d_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \right)$$

方程组 (12) 是  $n+1$  个未知数  $(M_0, M_1, \dots, M_n)$  的  $n-1$  个方程的方程组, 如果要唯一地确定  $n+1$  个未知数还需两个附加的方程, 我们利用边界点处函数的一阶导数值作为两个补充条件, 即使:

$$\begin{aligned} S'_\Delta(a) &= m_0 = y'_0 \\ S'_\Delta(b) &= m_n = y'_n \end{aligned} \quad (13)$$

这样又可以得到两个补充方程式:

$$\begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= 6(y_1 - y_0 - h_1 y'_0)/h_1^2 = d_0 \\ M_{n-1} + 2M_n &= 6(y_n - y_{n-1} - h_n y'_n)/h_n^2 = d_n \end{aligned} \quad (14)$$

与原方程组 (12) 组合便得到  $n+1$  个未知数的  $n+1$  个独立方程, 从而可以唯一地确定这  $n+1$  个未知数, 将组合方程组写成矩阵形式, 则有:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

由方程组 (15) 求解, 得  $M_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ), 将其代入 (11) 式, 即得所需的插值公式, 对于某点  $x \in (a, b)$ , 直接代入该公式, 即可得该  $x$  点处的插值函数值。

## 二度角域地形的改正

根据公式 (7), 可计算任意顶角  $\varphi$  和任意电极距的各点地形的电位畸变值, 进而求得各点的纯地形异常。例如, 对于联合剖面装置, 其地形异常值为:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_s}{\rho_0}\right)^A &= \frac{K}{2\pi} \left[ \frac{U(\tau_{AM})}{|r_A - r_M|} - \frac{U(\tau_{AN})}{|r_A - r_N|} \right] \\ \left(\frac{\rho_s}{\rho_0}\right)^B &= \frac{K}{2\pi} \left[ \frac{U(\tau_{BN})}{|r_B - r_N|} - \frac{U(\tau_{BM})}{|r_B - r_M|} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

式中:

$\tau_{AM} = r_A/r_M$ ;  $\tau_{AN} = r_A/r_N$ ;  $\tau_{BN} = r_B/r_N$ ;  $\tau_{BM} = r_B/r_M$ ;  $r_A, r_B, r_M, r_N$  分别为供电点  $A, B$  和测量点  $M, N$  到坐标原点 (角域顶点) 的距离;

$$K = 2\pi \frac{AM \cdot AN}{MN} \quad (17)$$

为装置系数。

将每个角域在每个点上的纯地形异常相乘, 即可求得任意复合二度地形的纯地形异常, 即:

$$\left(\frac{\rho_s}{\rho_0}\right)^{\hat{A}} = \left(\frac{\rho_s}{\rho_0}\right)_1 \cdot \left(\frac{\rho_s}{\rho_0}\right)_2 \cdot \frac{1}{\cos \beta_2} \cdot \left(\frac{\rho_s}{\rho_0}\right)_3 \cdot \frac{1}{\cos \beta_3} \cdot \dots \cdot \left(\frac{\rho_s}{\rho_0}\right)_n \cdot \frac{1}{\cos \beta_n} \quad (18)$$

其中:  $(\rho_s/\rho_0)^{\hat{A}}$  为复合地形的纯地形异常,  $(\rho_s/\rho_0)_1, (\rho_s/\rho_0)_2, \dots, (\rho_s/\rho_0)_n$  分别为第 1, 2,  $\dots, n$  个角域的纯地形异常,  $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$  分别为第 2, 3,  $\dots, n$  个角域的左坡角。

具体计算方法是: 先将复杂的二度地形分解为若干个角域单元的组合, 对于每一个角域单元, 根

据顶点 $\varphi$ 的值,利用样条插值函数求出 $\varphi$ 值所对应的各个 $\tau$ 时的 $U$ 值(电位畸变值),由(16)式计算出单个角域的纯地形异常,再由(18)式得到组合地形的纯地形异常。

### 电算程序中的有关处理方法

(1) 在程序中,我们存入了 $\varphi = 90^\circ, 100^\circ, 110^\circ, 130^\circ, 150^\circ, 170^\circ, 190^\circ, 210^\circ, 230^\circ, 250^\circ, 270^\circ$ 相对应的 $\tau$ 为0.9, 0.7, 0.5, 0.3, 0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.0, -0.01, -0.02, -0.05, -0.1, -0.2, -0.3, -0.4, -0.5, -0.7, -0.9, -1.0 时各自的电位畸变值,以及各相应的导数值,一共331个,这些电位畸变值全是由解析解(7)式利用计算机算出的,把这些电位畸变值作为插值基点( $\varphi, \tau$ )的函数值,做两次线插值来完成二维函数 $U(\varphi, \tau)$ 的面插值,插值结果的平均相对误差小于0.02%。

(2) 当供电极与测量极在角域顶点同侧,且远离顶点时,角域的影响可忽略不计,此时仅有斜坡影响。为了节省计算时间,对程序做了如下的自动处理:用四极装置测量时,每个测点共需计算四个 $\tau$ 值,当其中有一个以上的 $\tau$ 值大于0.9值,则认为该测点处无角域影响,四个 $\tau$ 值相应的电位畸变值均不予计算。下面证明这种做法的合理性。

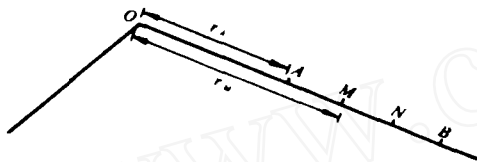


图2 计算角域影响范围

理论计算表明,当供电点 $A$ (图2)到测量点 $M$ 之间的距离 $r_{AM}$ 与供电点到角域顶点的距离 $r_A$ 的比 $r_{AM}/r_A \leq 1/3$ 时,则可以忽略不计角域影响,此时有:

$$\tau_{AM} = \frac{r_A}{r_M} = \frac{r_A}{r_A + r_{AM}} = \frac{1}{1 + (r_{AM}/r_A)} = \frac{1}{1 + (1/3)} = 0.75$$

这样,当某测点四个 $\tau$ 值中最小的一个大于0.75时,则可以认为该测点处无角域影响。

如图2所示, $r_A, r_B, r_M, r_N$ 分别表示 $A, B, M, N$ 到顶点 $O$ 的距离。四个 $\tau$ 值中最大的是 $\tau_{BN}$ ,最小的是 $\tau_{AN}$ 。对于对称四极装置而言,以维纳装置的 $\tau_{AN}$ 为最小。因此,我们就这种最坏的情况进行研究。由维纳装置的排列方式可知:

$$r_A = r_N - 2(r_B - r_N) = r_N \left(3 - \frac{r_B}{r_N}\right)$$

$$\therefore \frac{r_A}{r_N} = 3 - 2 \cdot \frac{r_B}{r_N} = 3 - \frac{2}{r_N/r_B} = 3 - \frac{2}{\tau_{BN}}$$

设 $\tau_{BN} > 0.9$

此时有:  $\tau_{AN} = r_A/r_N = 3 - \frac{2}{\tau_{BN}} \geq 3 - \frac{2}{0.9} \approx 0.78 > 0.75$  即当四个 $\tau$ 值中最大的一个大于0.9时,

最小的一个仍一定大于0.75。因此,对程序做了上述的处理是合理的。

(3) 程序框图见图3。

### 计算结果与实例

(1) 解析解与三次样条插值结果的对比 由大量计算结果得知,插值结果的精度是很高的,例如 $\varphi = 140^\circ$ 和 $\varphi = 220^\circ$ 的电位畸变值,插值结果与解析解相比,除个别几个点外,最大相对误差为0.02%左右,各点相对误差一般都是0.00n%,两者的平均相对误差分别为0.007%与0.005%,完全能满足计算精度的要求。

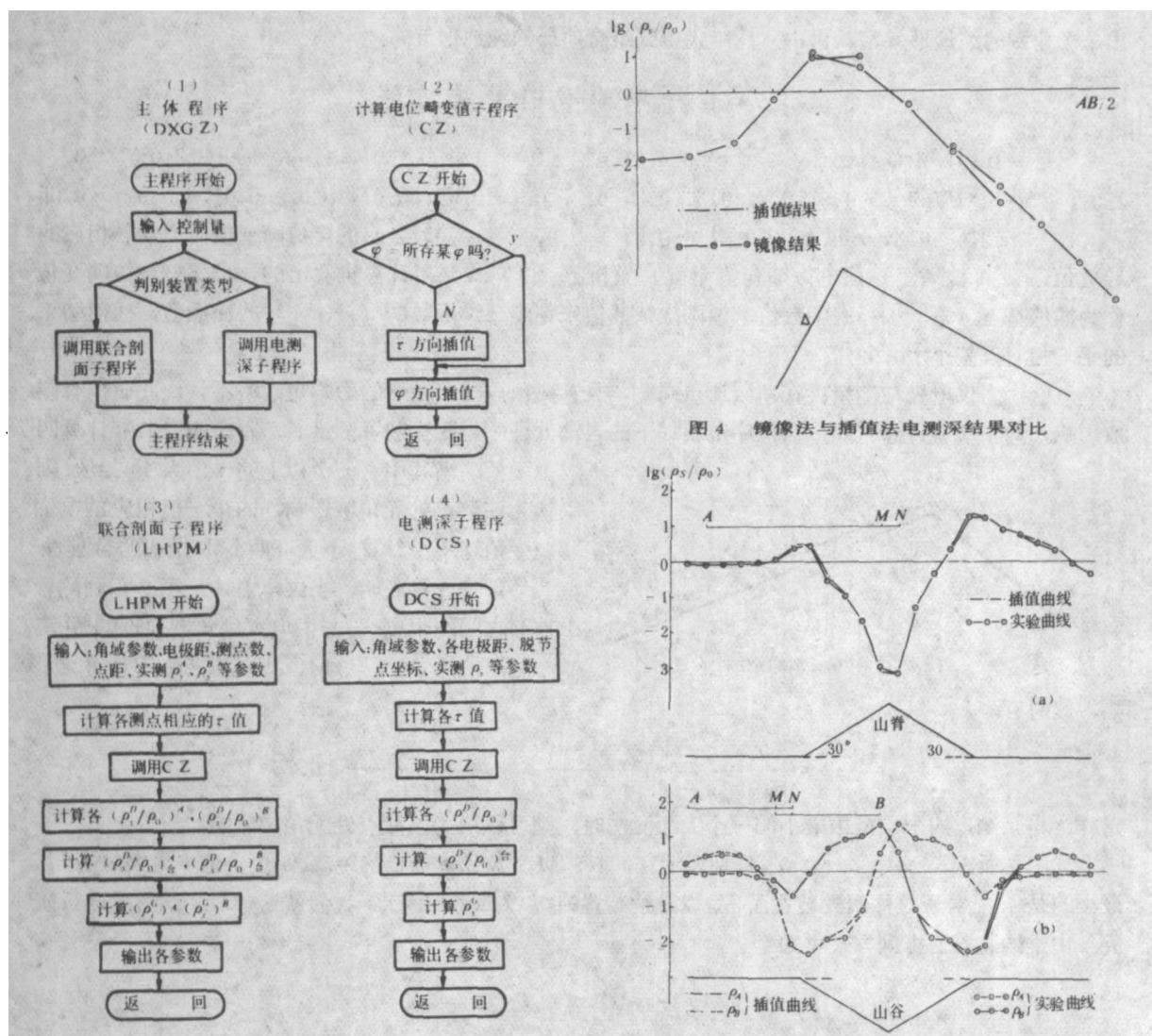


图 3

图 5 组合地形模拟实验与插值结果对比

(2) 单个角域时的计算结果 为了进行精度检查, 对多组单个角域的纯地形异常进行了计算对比。对于  $\varphi = 90^\circ$  的山脊地形, 用镜像法获得的理论值, 与用插值法的结果进行了对比。对联合剖面装置而言, 平均相对误差为 0.100%; 对电测深而言, 平均相对误差为 0.098%。若把两种算法的各自结果标绘在同一图上, 两条曲线完全重合, 图 3 所示是两种算法的电测深结果。

(3) 组合地形模拟实验与样条插值结果的对比 这类计算结果示于图 4, 从图上可以看出, 除个别点 (顶点附近) 拟合不好外, 地形的其余部分, 两种结果所得的相应曲线是重合的。拟合不好的点多半是由于实验曲线不规则所致, 所以在这些点上, 用插值结果来代替, 更为合理。经统计: (a) 最大相对误差为 3.4%, 平均相对误差 1.04%; (b) 最大相对误差 8.6% (仅顶点附近的一个点), 平均相对误差:  $\rho_A$ : 0.994%,  $\rho_B$ : 1.086%。

(4) 实例 图 5 是利用三次样条插值函数方法进行地改的一个实例。未改正的曲线 (a) 有两个交点, 改正后的剖面曲线 (b), 消除了一个交点, 并使有用的低阻正交点向矿脉方向偏移, 基本上指出了矿脉的位置。因此, 经改正后, 可以在很大程度上削弱地形引起的异常, 而突出有用的异常。

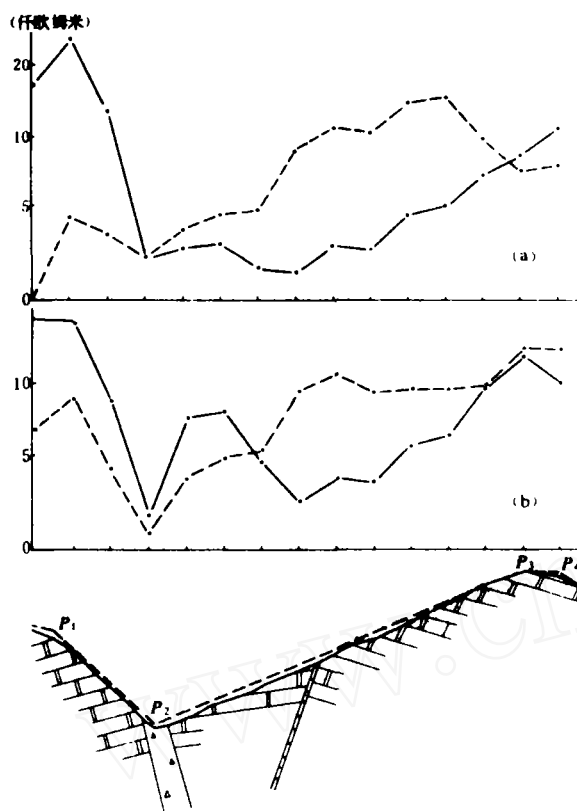


图6 样条插值法改正实例

## 结 论

以上讨论证明, 利用三次样条插值函数来进行地形改正, 精度能完全满足野外生产要求, 而且计算速度快、使用方便。对于各种复杂地形均能一次给出所需的各种结果与图件。目前, 所编程序可以直接处理联合剖面 and 对称四极测深的资料。对程序稍加改变也不难用于其他装置的结果。此外, 本法与多项式拟合法都是快速地形改正方法, 后者可以用TI—59类的可编程计算器进行计算。本文所介绍的方法则具有更高的精度。

## 参 考 文 献

- [1] 屈超纯, 应用数学学报, 1977, 第2期
- [2] 葛为中, 地球物理学报, 1977, 20卷, 第4期

4 期

# 起伏地形条件下二维场分量间的转换与延拓

魏 星

陈太虎 杜维本

(辽宁冶金地质勘探公司物探队)

(冶金部物探公司研究所)

对于起伏地形条件下直接测得的磁场垂直分量 $\Delta Z$ , 为了消除地形起伏的影响, 便于解释推断, 很有必要进行“曲化平”处理。已有许多物探工作者对“曲化平”和场的转换方法做了研究, 其中包括冶金部物探公司研究所提出的“曲化平方法”[2, 3]。该方法不但精度较高, 而且既能完成向上的“曲化平”计算, 也能进行向下的“曲化平”计算。我们在文献[2]、[3]的基础上, 着重研究了起伏地形条件下直接进行场的换算和“曲化平”的方法。文中只阐述二维问题, 用同样的方法推广到解三维问题也是不难的。

## 数 学 原 理

在 $o-xz$ 平面内(图1),  $S$ 代表起伏的地形线, 沿地形线测得的磁场垂直分量用 $\Delta Z$  ( $P_S$ )表示,  $P_S \in S$ ;  $z_S = z(x_S)$ 为地形线 $S$ 的方程。在地形线 $S$ 和场源之间引入任意无限曲线 $K$ ,  $P_K$ 为曲线 $K$ 上的点,  $z_K = z(x_K)$ 为曲线 $K$ 的方程。对 $K$ 曲线的具体要求详见文献[2]和[3]。

设 $K$ 曲线上磁荷密度为 $\mu(P_K)$ , 它在点 $M \in Q$ 处产生的单层对数位为: