

薄板磁性体磁测资料的一种解释方法

中国科学技术大学

徐世浙

本文提出一种根据磁测资料直接计算薄板磁性体顶端和底端位置的方法。这种方法的基本思想是：将二维磁场展成泰勒级数，泰勒级数中的系数与磁性体的端点位置有关。根据实测资料求出泰勒级数的系数后，就能算出端点的位置。

无限延深的薄板

用 Z 表示观测点的座标， ζ 表示薄板顶端的座标。无限延深薄板的共轭复场强是

$$\bar{T} = H - iz = 2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha e^{-i\gamma} \frac{-1}{z - \zeta} = K \left(\frac{-1}{z - \zeta} \right) \quad (1)$$

式中 I ， a ， $2b$ 和 γ 的意义见图 1， $K = 2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha e^{-i\gamma}$ 是复常数。

从 a_0 ， a_1 可解出顶端座标：

$$\zeta = a_0 / a_1 \quad (4)$$

和复常数

$$K = a_0^2 / a_1 \quad (5)$$

从 K 可得

$$2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha = |K| = |a_0^2 / a_1| \quad (6)$$

磁化方向和板面的夹角

$$\gamma = -\arg K = -\arg (a_0^2 / a_1) \quad (7)$$

可见从泰勒级数的前两个系数 a_0 ， a_1 即可求得我们从磁测曲线上所能获得的一切参数。

同样，由系数 a_1 ， a_2 也可获得这些参数。

$$\zeta = a_1 / a_2$$

$$\left. \begin{aligned} 2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha &= |K| = |a_1^2 / a_2| \\ \gamma &= -\arg K = -\arg (a_1^2 / a_2) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

下面我们阐明如何根据实测曲线求出泰勒级数的前两个系数。

泰勒级数是无穷级数，但我们取有限项作为近似。如果泰勒级数的展开范围 $|z|$ 与 $|\zeta|$ 相比较小，则项数可以取得较少。根据笔者的经验，

如果 $|z| < \frac{1}{3} |\zeta|$ ，取两项就可以了，于是 $\bar{T}$ 可写成

$$\bar{T} = a_0 + a_1 z$$

在空间取两点 z_1 ， z_2 ，其磁场分别为 $\bar{T}_1$ ， $\bar{T}_2$ ，代入上式，得一个方程组

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_1 &= a_0 + a_1 z_1 \\ \bar{T}_2 &= a_0 + a_1 z_2 \end{aligned} \right\}$$

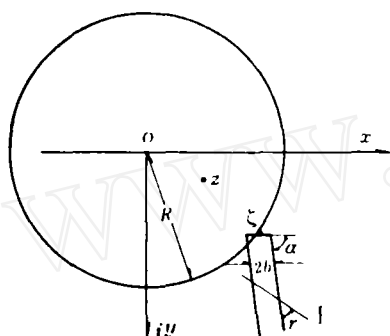


图 1

由(1)可见，顶端座标 ζ 是解释函数 $\bar{T}$ 的奇点。现在我们将 $\bar{T}$ 展成以座标原点 O 为中心的泰勒级数。根据幂级数理论，泰勒级数只能在以原点为中心，原点与奇点 ζ 的距离 R 为半径的圆内展开。在这个圆内有 $|z| < |\zeta|$ 。根据下列公式 $(1-t)^{-1} = 1 + t + t^2 + \dots$ ， $|t| < 1$ ，将(1)展成泰勒级数：

$$\begin{aligned} \bar{T} &= K \left(\frac{-1}{z - \zeta} \right) = K \frac{1}{\zeta [1 - (z/\zeta)]} \\ &= (K/\zeta) [1 + (z/\zeta) + (z/\zeta)^2 + \dots] \\ &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= K/\zeta \\ a_1 &= K/\zeta^2 \\ a_2 &= K/\zeta^3 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

从上式解出

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{\bar{T}_1 z_2 - \bar{T}_2 z_1}{z_2 - z_1} \\ a_1 &= \frac{\bar{T}_2 - \bar{T}_1}{z_2 - z_1} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

特别当测线是水平线时, 在坐标原点 (泰勒级数的展开中心, 是任意选定的) 的左、右两侧等远的地方各取一点, 即令 $z_1 = -x$, $z_2 = x$, 于是式(9)可简化为

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{\bar{T}_2 + \bar{T}_1}{2} \\ a_1 &= \frac{\bar{T}_2 - \bar{T}_1}{2x} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

我们用理论曲线对这种方法进行检验。理论曲线是在 $\gamma = 30^\circ$, $2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha = 1$ 的条件下计算出来的。图2a是水平线上的理论曲线, 图2b是起伏地形上的理论曲线, 对它们分别按(10)和(9)式用图上相邻两点的磁场计算 a_0 , a_1 , 然后求出 ζ , 点在图上, 结果是很好的。用(7)计算 γ 角的误差在 5° 以内, 用(6)计算 $2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha$ 的误差小于10%。

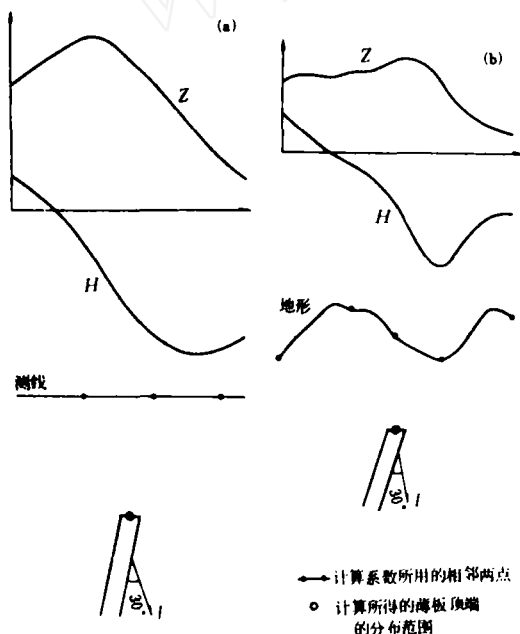


图 2

为了简化计算, 在起伏地形上也可用(10)计算。这时, 将 z_1 至 z_2 的方向取为 x' 轴 (图3),

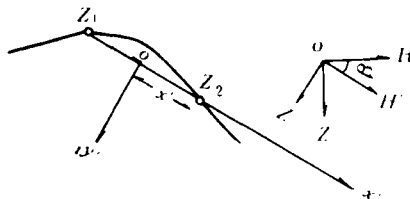


图 3

以 z_1, z_2 的中点为坐标原点, z_1, z_2 二点的距离之半为 x' [即(10)中的 x], 并取相应的 y' 轴组成左旋坐标系。按(10)和(4)式计算的 ζ 是与这个坐标系对应的。在计算中, 磁场分量按旧坐标系定义, 这时由(10)、(7)式计算的 $-\arg K$ 将不再是 γ 。用 $\bar{T}'$ 代表新生坐标系中的磁场, 新旧坐标系中的 $\bar{T}'$ 和 $\bar{T}$ 有如下关系

$$\bar{T}' = \bar{T} e^{-i\beta}$$

式中 β 是新坐标系相对于旧坐标系的转角, 在新坐标系中, 磁场表达式是

$$\bar{T}' = 2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha e^{-i(r-\beta)} \left(\frac{-1}{z' - \zeta} \right)$$

将 $\bar{T}$ 代入上式, 得

$$\bar{T} = 2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha e^{-i(r-\beta)}$$

$$\left(\frac{-1}{z' - \zeta} \right) = K \left(\frac{-1}{z' - \zeta} \right)$$

所以在磁场分量的坐标系不变时, 在新坐标系中, 按(10)、(7)计算出的幅角的负值是

$$-\arg K = \gamma + \beta$$

于是

$$\gamma = -\arg K - \beta \quad (11)$$

下面举一个实际计算的例子。图4是某铁矿的磁测井曲线, 资料引自吴至善“几种规则磁性体磁场 $\Delta T \cdot \psi$ 的空间分布及曲线坐标解释法”一文 (《物探与化探》, 1981年第3期), 为了与地面磁测的 Z 、 H 分量的方向一致, 将原图的地面线变成垂线, 垂线变成水平线; 将原图的 Z 分量看成 $-H$ 分量, H 分量看作 Z 分量。图4是改变后的图。用公式(10)、(4)解释的结果是: 矿项在深度340米处, 距钻孔约95米, 与实际钻探资料基本吻合。解释得出的 $2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha$ 约为1.26 CGSM-米, 磁化方向与层面夹角 $\gamma = 10^\circ$

(方向从浅部指向深部)。

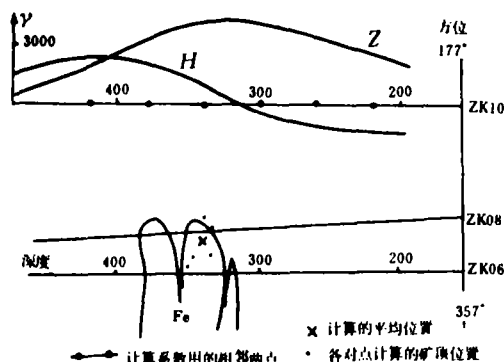


图 4

有限延深的薄板

有限延深薄板的共轭复场强是

$$\begin{aligned}\bar{T} &= 2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha e^{-i\gamma} \\ &\cdot \left(\frac{1}{z - \zeta_2} - \frac{1}{z - \zeta_1} \right) \\ &= K \left(\frac{1}{z - \zeta_2} - \frac{1}{z - \zeta_1} \right)\end{aligned}\quad (12)$$

式中 ζ_1, ζ_2 是薄板顶、底端的座标(图 5), $K = 2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha e^{-i\gamma}$ 是复常数。

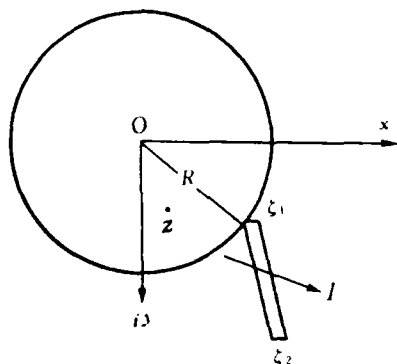


图 5

由(12)可见, ζ_1, ζ_2 是解析函数 $\bar{T}$ 的奇点。现在将 $\bar{T}$ 展成以原点为中心的泰勒级数。根据幂级数理论, 泰勒级数只能在以原点为圆心, 原点与最近的奇点 ζ 间的距离 R 为半径的圆内展开。在这个圆内有 $|z| < |\zeta_1|, |z| < |\zeta_2|$, 于是

$$\begin{aligned}\bar{T} &= K \left(\frac{1}{z - \zeta_2} - \frac{1}{z - \zeta_1} \right) \\ &= K \left[\frac{1}{\zeta_1 \left(1 - \frac{z}{\zeta_1} \right)} - \frac{1}{\zeta_2 \left(1 - \frac{z}{\zeta_2} \right)} \right] \\ &= K \left(\frac{1}{\zeta_1} - \frac{1}{\zeta_2} \right) + K \left(\frac{1}{\zeta_1^2} - \frac{1}{\zeta_2^2} \right) z + \\ &\quad K \left(\frac{1}{\zeta_1^3} - \frac{1}{\zeta_2^3} \right) z^2 + \dots \\ &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\end{aligned}\quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned}a_0 &= K \left(\frac{1}{\zeta_1} - \frac{1}{\zeta_2} \right) \\ a_1 &= K \left(\frac{1}{\zeta_1^2} - \frac{1}{\zeta_2^2} \right)\end{aligned}\quad (14)$$

$$a_2 = K \left(\frac{1}{\zeta_1^3} - \frac{1}{\zeta_2^3} \right)$$

从(14)解出顶、底端的座标

$$\zeta_1, \zeta_2 = \frac{2a_0}{a_1 \pm \sqrt{4a_0 a_2 - 3a_1^2}}\quad (15)$$

和复常数

$$K = \frac{2a_0}{\sqrt{4a_0 a_2 - 3a_1^2}}\quad (16)$$

从 K 可得

$$\begin{aligned}2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha &= K \\ &= \left| \frac{a_0^2}{\sqrt{4a_0 a_2 - 3a_1^2}} \right|\end{aligned}\quad (17)$$

磁化方向和板面的夹角

$$\begin{aligned}\gamma &= -\arg K \\ &= -\arg \frac{a_0^2}{\sqrt{4a_0 a_2 - 3a_1^2}}\end{aligned}\quad (18)$$

当泰勒级数展开范围较小时, 取级数(13)的前三项作为近似

$$\bar{T} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$$

在空间取三点 z_0, z_1, z_2 , 其磁场为 $\bar{T}_0, \bar{T}_1, \bar{T}_2$ 代入上式后, 得一个方程组

$$\begin{aligned}\bar{T}_0 &= a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 \\ \bar{T}_1 &= a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 \\ \bar{T}_2 &= a_0 + a_1 z_2 + a_2 z_2^2\end{aligned}\quad (19)$$

由(19)解出

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{T}_0 & z_0 & z_0^2 \\ \bar{T}_1 & z_1 & z_1^2 \\ \bar{T}_2 & z_2 & z_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 \\ 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \end{vmatrix}}, a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \bar{T}_0 & z_0^2 \\ 1 & \bar{T}_1 & z_1^2 \\ 1 & \bar{T}_2 & z_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 \\ 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \end{vmatrix}}, a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z_0 & \bar{T}_0 \\ 1 & z_1 & \bar{T}_1 \\ 1 & z_2 & \bar{T}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 \\ 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \end{vmatrix}} \quad (20)$$

特别当测线呈水平时, 取 $z_0 = 0, z_1 = -x, z_2 = x$ 三点, 于是 (20) 简化为

$$\begin{aligned} a_0 &= \bar{T}_0 \\ a_1 &= \frac{\bar{T}_2 - \bar{T}_1}{2x} \\ a_2 &= \frac{\bar{T}_2 + \bar{T}_1 - 2\bar{T}_0}{2x} \end{aligned} \quad (21)$$

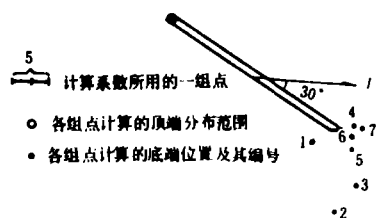
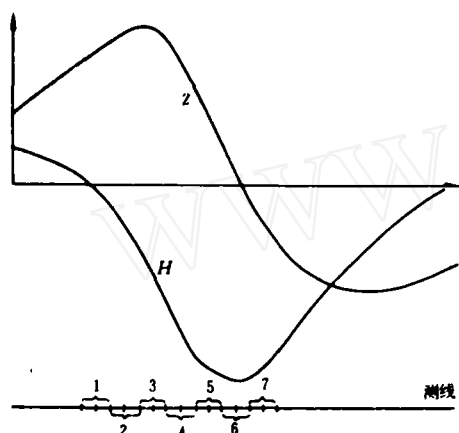


图 6

$$\begin{aligned} \bar{T} &= H - iz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_n = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + iB_n)(u_n + iv_n) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n u_n - B_n v_n) + i[B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n v_n + B_n u_n)] \end{aligned} \quad (23)$$

于是

$$Z = -[B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n v_n + B_n u_n)] \quad (24)$$

为了求解顶端坐标 ζ , 必需取 $n = 3$, 于是

我们用理论曲线对这种方法进行检验。理论曲线是在 $\gamma = 30^\circ$ 、顶端深度为 1、底端深度为 2、两端水平距离为 1.5 的条件下计算出来的, 画在图 6 上。用图 6 上相邻三点, 按 (21) 式计算系数 a_0, a_1, a_2 , 然后由 (15) 计算顶端和底端的坐标, 点在图上。由图 6 可见, 顶端的结果很好, 底端的结果比较分散, 但离底端较近的点的计算结果还是较好的。按 (18) 式计算的 γ 的误差约 7° , 按 (17) 式计算的 $2I \cdot 2b \sin \alpha$ 的误差约 10%。

为了在起伏地形上简化计算, 取距离较近、在一直线上的三个点, 也可用 (21) 式计算系数, 并用 (15)、(16) 式计算 ζ_1, ζ_2 和 K , 但这时 ζ_1, ζ_2 是相对于新坐标系的。还可用 (11) 和 (17) 式分别计算 γ 和 $2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha$ 。

只有 Z 曲线的解释法

上面介绍的方法既适用于水平地形, 也适用于起伏地形, 但需同时具备测有 Z 和 H 两种分量的结果。下面介绍只用 Z 分量求无限延深薄板顶端的方法。

用 A_n, B_n 代表泰勒级数的系数的实、虚部, u_n, v_n 代表 $Z_n = (x + iy)_n$ 的实、虚部, 即

$$\begin{aligned} a_n &= A_n + iB_n \\ Z_n &= u_n + iv_n \end{aligned} \quad (22)$$

代入泰勒级数

$$Z = -(B_0 + A_1 v_1 + B_1 u_1 + A_2 v_2 + B_2 u_2) \quad (25)$$

上式中有五个待求系数： B_0 、 A_1 、 B_1 、 A_2 、 B_2 。根据测线上5个点（相距不能太远）的座标和Z值，代入（25），得到一个联立方程组，从它解出五个系数后，得到

$$a_1 = A_1 + iB_1$$

$$a_2 = A_2 + iB_2$$

再按（8）计算薄板顶端坐标 ζ ，参数 $2I \cdot 2b \cdot \sin \alpha$ 和 γ 。

应当指出，当测线水平时，由于 $v_1 = y$ ， $u_1 = x$ 是线性相关的，这时不能从（25）中解出系数 A_1 、 B_1 、 A_2 、 B_2 。所以这种方法不适用于水平测线，只能用于起伏地形。

在原则上，这种方法也可用于求有限延深薄板底端的座标，但这时 n 要取4，于是有七个系数待求，计算起来比较麻烦，本文不拟讨论。

偶极—偶极IP测量结果的等值线图示法

引言

偶极—偶极IP测量数据（即视电阻率 ρ_a 、金属因数 MF_a 和频率效应 FE_a ），经常用多层剖面图或所谓的假断面图来表示，推断的极化体的位置则用粗横杠标出（图1）。由剖面图或假断面图构制的IP平面图，也都是由这些横杠构成的（图2）。

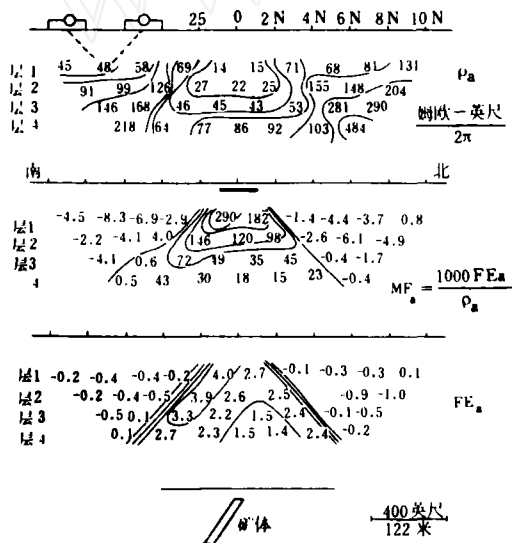


图1 加拿大魁北克省诺兰达附近马古西河铜锌矿床上0号线断面图。粗横杠表示推断极化体的大概赋存位置，偶极长度为60米（200英尺）

近年来方法技术的发展，可由假断面图IP数据反演求得极化体参数，如激发体的真电阻率、频率效应、金属因数、埋藏深度以及大致的形状

等。然而通常并不进行反演工作，数据仍主要是用图1或图2的形式表示。图上用定性的横杠表示激发体的方法有一个缺点，就是无法提供异常相对不同地质背景情况下的强度。

有时分别构制假断面各层的平面图，但结果往往并不能令人满意，因为大多数异常值一般并不在矿体上方。在图1的例子中，如果根据矿体上方的测线构制第三或第四层的平面图，就会产生上述那种现象。从图1就可以看出这个问题，第三、第四层频率效应的低值段与矿体位置对应，较浅的层位上所构制的平面图，往往不会遇到上述问题，但浅层结果所表示的勘探深度当然是有限的。

本文目的是介绍一种定量表示偶极—偶极IP数据的图示方法。此法可采用简单的求平均滤波器，必要时可以手算。对每个测点都可求得反映假断面所有各层数据的单个数值。使用这种方法，大多数异常值都将落在矿体上方。

滤波方法

图3说明了滤波方法。先对每个层使用一种简单的平均滤波。对第二层取两相邻值的平均值，对第三层取相邻三个值的平均值，依此类推。第一层保持不动。图3（b）给出了这种平均方法的结果，此处的平均值称为“中间输出结果”，最终输出结果是这些输出结果的平均值。如果窗口内的某些测点没有数值（如图12），该层的