

# 二维最佳线性滤波器 参变量λ求解问题

安徽冶金地质勘探公司808队 王宗器 桂林冶金地质学院 吴虹

有人给出了一种旨在提高物探实测数据"信噪比"的频率域"最佳线性数字滤波器"<sup>[1]</sup>。 而最小平方滤波器则是上述滤波器的参变量λ恒取1时的特例。经验表明,最小平方滤波器 用于重、磁数据处理,缺乏灵活性。因此,为适应实际资料中信号和干扰成份在组合上的千 差万别,研究最佳线性滤波器参变量λ如何具体取值问题是很有必要的。本文讨论了λ 在滤 波器中的作用及其数值求解方法。编制了计算λ值的专用程序(为节约 篇幅,未予 刊出 — 编者),计算了一些模型组合的算例,并对计算结果作了初步分析。现分别介绍如下。

### λ问题的提出及其在滤波器中的作用

众所周知,最小平方滤波理论建立在非随机信号与于扰互相关系数为零的假设上,而这 与物探重、磁数据的实际情况相距甚远。实际情况是,数据所包含的信号和干扰成份并非完 全不相关,而是"你中有我,我中有你",在波数域中各自表现的波谱分布,往往彼此重 叠。数据滤波之后,通常不可能将干扰压低到极小而不使信号失真。同样,使信号失真最小 而不让干扰保留一定比例,也是不可能的。这就是物探数据处理中线性滤波的基本矛盾。最 小平方滤波对处理这类矛盾是无能为力的。

文献〔1〕中分析了这一基本矛盾,提出了适应重、磁数据处理工作需要的"最佳线性滤 波器"(本文只讨论其中的第一类),它在二维波数域中的基本提法是

 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - L(f, k)]^{2} |S(f, k)|^{2} df dk = \min$   $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L^{2}(f, k) |N(f, k)|^{2} df dk = r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |N(f, k)|^{2} df dk$ (1)

式中S(f, k)、N(f, k)分别是输入信号s(x, y)和输入非随机干扰n(x, y)的富氏 复数波谱, r是干扰的压缩比(0<r<1), L(f, k)称为第一类最佳线性滤波器的波数 响应, 其表达式为(略去推导过程):

L(f,k)=|S(f, k)|<sup>2</sup>/[S(f, k)|<sup>2</sup>+ $\lambda$ (r)|N(f,k)|<sup>2</sup>] (2) 式中参变量 $\lambda$ (r)>0,其作用在改进滤波器的灵活性,以便根据实测数据中信号与干扰相 关程度的大小和具体问题所允许的信号失真度,改变 $\lambda$ (r)值来决定对干扰压制的强弱,从 而得到最佳滤波效果。具体地说, $\lambda$ (r)取值减小,对干扰的压制相对地减弱, $\lambda$ (r)取值 增大,对干扰的压制相对地加强,这无疑地也会使信号失真度增大。在这种情况下,就得根 据具体问题确定一个可以获得最佳滤波效果的 $\lambda$ (r)值。为叙述方便,将 $\lambda$ (r)值记为 $\lambda_0$ 。

#### λ。零的数值解法

文献[1]给出了求解λ(r)的一般形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |N(f,k)|^{2} \left( \frac{|S(f,k)|^{2}}{|S(f,k)|^{2} + \lambda(r)|N(f,k)|^{2}} \right)^{2} df dk$$

41

$$= r \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |N(f,k)|^2 df dk$$
 (8)

式中各符号的意义同前。由于功率谱具有实的和对称的性质, (3)式的积分限可改为由0 至∞, 将(3)式等号右边项移至等号左边, 令移项后所得式子为 F(λ), 则得到一 个关 于变量λ的方程:

$$F(\lambda) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} |N(f,k)|^{2} \left\{ \left( \frac{|S(f,k)|^{2}}{|S(f,k)|^{2} + \lambda(r)|N(f,k)|^{2}} \right)^{2} - r \right\} df dk = 0 \quad (4)$$

于是问题便化为当信号和干扰功率谱的具体形式以及干扰压缩比r的值给定后,求满足方程  $F(\lambda) = 0 时的\lambda信,此值即为\lambda_o(\lambda的定义域为全体正实数集合)。$ 

为便于求解,让我们先考察F(λ)函数的一些简单性质:

1.函数F(λ)在区间(0,∞)上单调递减。将(4)式对λ求导数得:

$$F'(\lambda) = -2 \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \frac{|N(f,k)|^{4}}{|S(f,k)|^{2}} \left( \frac{|S(f,k)|^{2}}{|S(f,k)|^{2} + \lambda(r)|N(f,k)|^{2}} \right)^{8} df dk \quad (5)$$

容易看出上式等号右边的积分结果仍然具有某种总能量的含义\*,根据能量的非负性质,易知在开区间(0,∞)上有F'( $\lambda$ )<0且F'( $\lambda$ )  $\neq$ 0。由于F( $\lambda$ )是连续函数,据此可知F( $\lambda$ ) 在(0,∞)上无极值且单调下降。

2.由(4)式还可得知,当λ=0时

$$F(0) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} |N(f,k)|^{2} df dk - r \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} |N(f,k)|^{2} df dk$$
 (6)

不一定为零,因为干扰压缩比r是事先给定的(0≤r≤1),只有当r=1时F(0)=0, 否则F(0)>0,而且其值是有限的(如上式所示)。量值F(0)在某种意义上表 征被滤掉 的干扰总能量。

3.按同样方法分析, 当λ→∞时, F(λ)趋向渐近直线F=C, 其斜率为零, 截距为

$$C = -r \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} |N(f,k)|^2 df dk, 在设计意义上它表征输出干扰的总能量的负值。$$

结合上述三点可知: 方程(4)在区间(0,∞)有唯一解,即能使 F(λ) = 0 的λ₀值 是唯一的。

为了使方程(4)适合于计算机作数值求解,还需要对它作离散化处理。注意到,实测数据通常是长度有限的离散序列,它们的波谱也就只能是有限长线状谱。此事实蕴含着下述 意义:即在实测资料中信号和干扰的波谱S(f,k)、N(f,k)并不是波数变量f、k的连续函数,而是通过狄拉克δ函数定义,并经过截断处理的有限长等距脉冲序列,(现只讨论一维情形,但并不失其一般性):

<sup>•</sup> 从物理意义看,被积式中方括号内的量无量纲(它是滤波器的波数响应),因而整个被积式的量纲由因于
[N(f,k)]<sup>4</sup>
因子(f,k)<sup>2</sup>
决定,它具有某种瞬时功率的含义,积分后则为总能量。

$$\widehat{S}(f) = \sum_{n=0}^{N} S(nf_0)\delta(f - nf_0)$$

$$\widehat{N}(f) = \sum_{n=0}^{N} N(nf_0)\delta(f - nf_0)$$
(7)

式中f<sub>0</sub>为等距脉冲间隔,Nf<sub>0</sub>为序列总长度。既然实测数据的波谱有这种离散性和长度的有限性,那末,方程(4)中以连续形式出现的信号和干扰的波谱也就应该对它进行模拟。从数学角度上讲,由S(f)、N(f)变为S(f)、N(f)要经过波形抽样和截断处理。抽样就是将波形S(f)和N(f)分别乘以图1所示的等间距无穷脉冲序列 $\Delta$ (f),

$$\Delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0)$$
(8)

截断就是将S(f) $\Delta$ (f)和N(f) $\Delta$ (f)再分别乘以图2所示的矩形函数H(f):



将上述讨论推广到二维,并把结果代入(4)式,积分便化为求和\*:

$$F(\lambda) = f_0 k_0 \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} |N(mf_0, nk_0)|^2 \left\{ \left( \frac{|S(mf_0, nk_0)|^2}{|S(mf_0, nk_0)|^2 + \lambda(r)|N(mf_0, nk_0)|^2} \right)^2 - r \right\}$$

= 0

-7

(10)

式中 $f_0$ 、 $k_0$ 分别是富氏波谱沿f轴和k轴的基本波数,亦即波数域抽样间隔。M+1和N+1 即分别是对应于f轴和k轴的样品总数。(10)式提供了数值求解 $\lambda_0$ 的数学原型,按此式已编制 了121机专用程序及程序说明,为节约篇幅,这里不准备附出。

#### 算 例

1.模型设计 假设最佳线性滤波器L(f,k)是一种所谓滤通局部场的波数域数字滤波器。 为便于理论分析和计算,我们还进一步假定:作为信号的局部场和作为干扰的区域场,其波 诸都具有点极谱的形式\*\*,它们仅与场源的磁矩和埋深有关而与几何形状无关,即:

<sup>●</sup>除本文所介绍的方法外,利用数值积分方法中的短形积分公式亦可由(4)式导出(10)式。

<sup>●●</sup>自然界中一些含磁性矿物的岩株、火山颈或某些筒状矿体,当其下端延深较大,且顶端截面直径小于埋深时,在地磁场中磁化后,均可视为点极。

$$\begin{cases} |S(m,n)| = Ae^{-H_1D} \\ |N(m,n)| = Be^{-H_2D} \end{cases}$$
 (11)

$$D = [(mf_0)^2 + (nk_0)^2]^{1/2}$$
(12)

式中, A和B分别是信号源和干扰源磁矩的 $2\pi$ 倍, H<sub>1</sub>和H<sub>2</sub>分别是信号源和干扰源的顶端埋 深, 循环变量m = 0,1,2,……M, n = 0,1,2……N。

2. 参数设计 实际问题中,上述A、B、H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub>诸量一般要通过波数域反演方法在二 维波谱(实测谱)上求取,干扰压缩比r则要由计算者根据具体情况事先给定。作为理论计 算,本文取

A = 1单位磁矩;

B = 5、20、50单位磁矩;

H<sub>1</sub>=2、4单位埋深;

H<sub>2</sub>=4、8、12单位埋深;

 $r = 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65, 0.75_{\circ}$ 

改变上述诸量的组合,便相当于改变信号源和干扰源的相对位置、磁矩差别和对干扰的压制 程度。容易看出,要算完上述诸量的每一种组合方案,共需计算108次。为了减少 计算 工作 量,并考虑到本文算例中信号和干扰均为点极,因而方程(10)的计算过程可作如下简化,根 据(11)式,本文算例所用的最佳线性滤波器的波数响应可写成

$$L(\lambda) = |S(m,n)|^{2}/[|S(m,n)|^{2} + \lambda(r)|N(m,n)|^{2}]$$
  
=  $A^{2}e^{-2H_{1}D(m^{*}n)}/[A^{2}e^{-2H_{1}D(m^{*}n)} + \lambda(r)B^{2}e^{-2H_{2}D(m^{*}n)}]$   
=  $1/[1 + \lambda(r) \cdot (B^{2}/A^{2})e^{-2(H_{1}-H)D(m^{*}n)}]$  (13)

Ŷ

$$\lambda'(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r}) \frac{B^2}{A^2}$$
(14)

得

$$L(\lambda') = 1/(1 + \lambda'(\mathbf{r})e^{2(H_1 - H_2)D(\mathbf{w}, \mathbf{n})})$$
(15)

将(15)式代替方程(10)等号右边中括弧里面的项得:

$$F(\lambda') = B^{2}f_{0}k_{0}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}e^{-2H_{2}D(m'n)}\left\{\left(\frac{1}{1+\lambda'(r)e^{2(H_{1}-H_{2})D(m'n)}}\right)^{2}-r\right\}=0$$

实际上只需要求解方程:

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} e^{-2H_2 D(m+n)} \left\{ \left( \frac{1}{1+\lambda'(r)e^{2(H_1-H_2)D(m+n)}} \right)^2 - r \right\} = 0$$
 (17)

式中D(m,n)的定义见(12)式,本文算例取:

 $f_0 = 2\pi/(2 M + 1) \Delta x$ ;  $k_0 = 2\pi/(2 N + 1) \Delta y$ ;

其中 $\Delta x = \Delta y = 1$ 单位长度,它们分别是实测数据沿x轴和y轴的抽样间隔,M=N=15,它 们分别是对应于各轴所抽样品总数之半。

经过化简后的(17)式只含三个参变量H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub>和r,省去了A、B。根据一组H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub>、r 值,先解出满足方程(17)的λ偏,然后再根据不同的A、B值,由(14)式解出λ<sub>0</sub>值。这样处 理之后,要算完本文算例所列的各种滤波器参数组合,由原来所需的108次计算减少到36次 并辅以少量极为简单的乘除运算即可。

计算工作是1979年在原桂林冶金地质研究所DJS-6机上完成的\*, 计算结果(部分)

44

<sup>●</sup>我们后来是用121机进行计算的,对原来编制的108机程序作了改进。

见图3。

## 计算结果的初步分析

1.图 3 直观地给出了函数F( $\lambda$ )的图象,并给出了每种组合情形下的 $\lambda_0$ 数值解。在本文 算例所列的各种参数组合中, $\lambda_0$ 最小为0.04(当A = 1 , B = 50, H<sub>1</sub> = 2 , H<sub>2</sub> = 12, r = 0.65时),最大为5.65(当A = 1, B = 5, H<sub>1</sub> = 2, H<sub>2</sub> = 8, r = 0.25时)。其余大都在 10<sup>1</sup>~10<sup>-1</sup>范围内取值,符合预期的设想。此外由图可见,F( $\lambda$ )函数的图象同我们在本文第 二节理论上的描述是一致的。

2.图 4 给出了λ(r)函数的图象,由图可见,对于一组确定了的 A、B、H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub>组合来 说,方程(10)的解λ₀与干扰压缩比r成反比关系。当r设计较大时,入₀取值较小,反 之则增



大。当r=1时, $\lambda_0=0$ ; 当r=0时, $\lambda_0$ →∞。前者相当于不速 波(L(f,k))=1,后者则 相当于滤波器断路。

3.比较图 4 中的各个图,对于同一干扰压缩比r。当H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub>组合确定时,不同的A、B 组合之间的 $\lambda_0$ 值相差较大,而当A、B组合确定时,不同的H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub>组合之间的 $\lambda_0$ 值则相差 较小。这表明在设计最佳线性滤波器时,当r确定之后,信号与干扰在埋深方面的 差别对 $\lambda_0$ 的 取值影响不大,而磁矩的差别对 $\lambda_0$ 的取值影响较大。就所给算例而言,对于任一r值即 $\lambda_0$ 值, 如A取定值,则 $\lambda_0$ 值与B<sup>2</sup>成反比,B<sup>2</sup>越大,则 $\lambda_0$ 越小(见(14)式和图 4)。总的看来,当信 号和干扰磁矩差别很大时(如1:50), $\lambda_0$ 一般取值都很小(小于0.5,当r>0.25时),这 对信号免受失真是有利的。





4.图 5 给出了当入<sub>0</sub> = 1 时,几种 H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub> 组合情况下r - A/B的关系曲线,利用此图,可 对经入<sub>0</sub> = 1 最佳线性滤波后输出中的残留干扰 的总能量作出估计,亦即由A、B、H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub> 反算r(对实测谱作波数域反演后,A、B、H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub> 反算r(对实测谱作波数域反演后,A、B、H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub> 大的力量)。有条件的地区,如果滤波前 资料中包含的干扰总能量可用其他方法确定的 话,利用图 5 这种关系曲线对入<sub>0</sub> = 1 的最佳线 性滤波效果作定量评价是很方便的。由 图可 见,r随比值B/A增大而非线性地增大,当 A/B→1时,对于图中所列的几种埋深组合, r分别等于0.98、0.95、0.90。说明磁矩相差 不大的两磁性体,即使在空间的分布差别较大, 用入<sub>0</sub> = 1 的最佳线性滤波器(即最小平方滤

波器)作区分局部场和区域场的运算也是相当困难的(干扰被滤掉的很少)。只有当磁矩差 别显著时,上述滤波方可取得较好的效果。如图 5 所示,当比值A/B<0.1时,r一般都小于 0.5。在很多情况下,这样的滤波效果还是令人满意的。这时往往要通过增大λ。值来加强对 干扰的压制(当然要牺牲一些有益信号为代价)。最佳线性滤波器的灵活性就是在这种情况 下得到体现的(注意:图5 横轴B/A应为A/B之误)。

综上所述,由(10)式(以及根据它编制的计算程序)计算λ。数值解的方法是切实可行

46

的。上面介绍的几类图件,为设计具体的最佳线性滤波器提供了一些也许是有益的参考。由于条件所限,所完成的研究工作还不全面,尤其对A、B、H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub>各种不 同组 合条件下的 $\lambda_0 \sim r$ 关系的研究还不够深入。最后还需指出: $\lambda_0$ 的定解与计算时所用的基本 波数f<sub>0</sub>、k<sub>0</sub>也 很有关系。而f<sub>0</sub>、k<sub>0</sub>的大小是由截断波长 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 和基波波长(2M+1) $\Delta x$ ,(2N+1) $\Delta y$ 确 定的,f<sub>0</sub>、k<sub>0</sub>取值不同,则同一组A、B、H<sub>1</sub>、H<sub>2</sub>、r组合所算得的 $\lambda_0$ 值也不相同。此问题 在计算富氏波谱时曾遇到过。至于f<sub>0</sub>、k<sub>0</sub>应如何选择?这取决于计算者对本区场源特点的理解程度和经验,不可能有统一的标准。实际问题中,计算 $\lambda_0$ 时所用的f<sub>0</sub>和k<sub>0</sub>应与计算富氏波谱时所用的f<sub>0</sub>、k<sub>0</sub>一致。

本文写作过程中得到王继伦同志的指导;计算工作得到李学圣同志的帮助,在此一并表示谢意。

#### 多考文献

(1)王继伦,地球物理学报,20,2,157-168,1977
(2)E.O.布赖姆,快速富里叶变换,上海科学技术出版社,1979
(8)J.F.克利尔波特,地球物理数据处理基础,石油化学工业出版社,1979

## 金属硫化矿自然电场形成机理的探讨

中南矿冶学院地质系 仇勇海

用自然电场法寻找金属硫化矿,在有利 条件下能取得良好地质效果。关于自然电场 形成的机理问题,迄今还研究得不够清楚。 本文根据矿物的电极电位、矿物的共生组合 以及矿体分带现象,讨论了金属硫化矿自然 电场形成的原因。矿体不同部位具有不同的 电极电位(矿体不均匀或围岩溶液不均匀) 是形成自然电场的主要原因。本文扼要地讨 论了自然电场法有关的某些问题。

## 金属硫化矿物的电极电位

关于金属硫化矿物的电极电位,已得到 大量的实验数据,例如在蒸馏水介质中,黄 铜矿相对于铜丝的电极电位是+0.8~+3.0 伏,而闪锌矿相对于铜丝的电极电 也是 -0.20~-0.40伏<sup>[1]</sup>。

根据热力学数据计算出部分硫化物标准 还原电位如下:

磁黄铁矿	FeS <b>⇒</b> Fe¹⁺+S+2e	0.065伏
闪锌矿	ZnS≓Zn³⁺+S+2e	0.265伏
方铅矿	PbS⇒Pb²⁺+S+2e	0.355伏
铜蓝	CuS <del>z</del> ≥Cu <sup>2</sup> '+S+2e	0、592伏

由于硫化矿物通常含有杂质,在实际测 **量电极电位时所观测到的是稳定**电位。稳定 电位一般可通过实验测定。上述根据热力学 数据计算出的标准电位值,只能定性地说明 磁黄铁矿电极电位较负,铜蓝的电极电位较 正。众所周知,电极电位较负的物质容易发 生氧化反应,而较正的则容易发生还原反 应,无论氧化还是还原反应,都是在电子导 体与离子导体的界面上进行,在电子导体的 表面发生氧化反应的是阳极、发生还原反应 的是阴极。

根据金属硫化物溶度积也可以定性地讨 论金属硫化物的电极电位。部分金属硫化物 的溶度积数据如下<sup>(1)</sup>:

FeS-5.13  $\times$  10<sup>-18</sup>; ZnS-6.9  $\times$  10<sup>-26</sup>; PbS-3.4  $\times$  10<sup>-29</sup>; CuS-3.98  $\times$  10<sup>-86</sup>.

硫化物溶度积虽小,但当它们置于电解 质水溶液时,或多或少有所溶解。金属硫化 物含有大部分共价键和少量离子键,所以置 于水溶液时,是以正、负离于的形式进入水 溶液,并形成水合离子。从胶体化学可知, 硫化物具有负胶体性质,无论多个分子的集 合体还是硫化物颗粒或者块状硫化物,它们 都能吸附负离子而形成特性吸附偶电层。溶 度积大的硫化物,溶解到水溶液中的金属正 离子和硫离子较多,因而被吸附到硫化物表