



二维位场曲面延拓的等效源法

冶金部物探公司研究室 杜维本

在任意起伏地形条件下,重磁位场解析延拓(简称曲面延拓)原理、方法的研究是位场解释理论中一个难度较大的重要课题,许多物探工作者做了大量工作,其中布哈塔卡尼亚(B.K. Bhattacharyya, 1979)等人提出的方法^[1]比较成功地解决了曲面延拓中的“上延拓”问题;“下延拓”问题,由于问题本身的复杂性,一直还没有令人满意的解决办法。

本文所论述的解析延拓原理和方法适用于任意起伏地形条件下的解析延拓,既可以作“上延拓”,也可以作“下延拓”。限于篇幅,本文只讨论二维问题。

位场曲面延拓的数学原理

在 $o-xz$ 平面内(图1), S 代表任意的起伏地形线,沿地形 S 测得的位场值用 $u(PS)$ 表示(它可以是 $\Delta z, \Delta g, \Delta T \dots$), $PS \in S$; $z_S = z(x_S)$ 为曲线 S 的方程。引入另一曲线 K , $PK \in K$; $z_K = z(x_K)$ 为曲线 K 的方程。 K 曲线应满足以下要求:

① $z_S \leq z_K$, 当 $x_S = x_K$ 时。

② 要求所有的源都位于 K 曲线之下,即 K 曲线以上的区域 $\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega$ 为无源域。

③ 为连续、光滑、单值曲线;或者是逐段光滑的曲线。

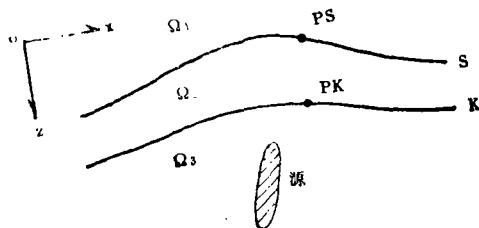


图1

这样,所谓位场曲面延拓问题便可归结为:求一函数 $u(M)$,它在 $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ 内调和,在 S 上取已知值 $u(PS)$,在无穷远处正则,即:

$$A: \begin{cases} \Delta u(M) = 0, M \in \Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \\ u(PS) \text{ 已知}, PS \in S \\ u \rightarrow 0, (\text{当 } r \rightarrow \infty) \end{cases}$$

称此为“问题A”。

显然,当 K, S 重合时问题A就是经典的边值问题(简称“问题D”):

$$D: \begin{cases} \Delta u(M) = 0 \\ M \in \Omega_1 \\ u|_S = u(PS) \\ u \rightarrow 0, \text{当 } r \rightarrow \infty \text{ 时} \end{cases}$$

解经典边值问题D只能解决“上延”问题,而“问题A”却允许我们在整个 Ω 内实现解析延拓。由于 K 曲线的任意性,它可以是直线,也可以是曲线;可以和 S 重合、部分重合或完全不重合。这要依物探问题的实际需要和可能而定。因而问题A具有相当普遍性,可以说在勘探地球物理中所遇到的解析延拓问题几乎可以归结为求解问题A。

求解问题A的等效源法

如果已经找到了问题A的解,那么解的存在性显然不成问题。进而也不难证明这个解便是问题A的唯一解。因为若 $u(M)$ 是问题A的解,那么在 Ω_1 内它必满足问题D的全部条件,因而与问题D的解相重合。关于问题D,是一个经典的边值问题,解的存在性、唯一性已肯定无疑。又 $\Omega_1 \in \Omega$,根据调和函数的“内唯一性定理”^[2]可知,在 Ω 内调和,在 Ω_1 内等于确定函数值(即等于问题D的解)的函数,在整个 Ω 内是唯一的。

我们利用“等效源法”求问题A的解。

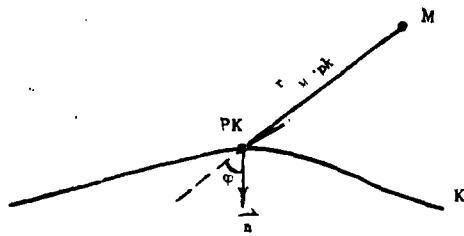


图 2

设在K曲线上定义一矢量函数:

$$\vec{\mu}(PK) = \mu(PK) \cdot \vec{n}$$

其中, \vec{n} 是K在PK点处的单位法线矢量。

$\mu(PK)$ 是定义在K上的连续有界函数。

根据位势理论(图2)可知, 分布在K上的密度为 $\vec{\mu}(PK)$ 的偶极线在空间任意点M产生的“双层对数位”^[8] 为:

$$u(M) = \int_K \mu(PK) \cdot \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_{M,PK}}{r_{M,PK}^2} dl \quad (1)$$

其中, $\vec{r}_{M,PK}$ 一由M向PK点引的矢径。

由(1)式表示的双层对数位在除K曲线以外的整个平面内满足拉普拉斯方程, 当然在 Ω 内调和。以(1)式作为问题A的解就意味着实际位场被等效地看成由分布在K上的偶极线所引起。这里 $\mu(PK)$ 是未知函数, 为了确定它, 我们利用已知值 $u(PS)$, 将(1)式中的M改成PS则有:

$$\int_K [\mu(PK) \cdot \vec{n} \cdot \vec{r}_{PS,PK} / r_{PS,PK}^2] dl = u(PS) \quad B$$

在B式中只有 $\mu(PK)$ 是未知函数, 因而它是关于 μ 的积分方程。解此积分方程, 求得函数 μ , 代入1式就可以计算出任意点M的位。因此, 借助于等效源概念, 把求解A的问题转化为求解积分方程B。

积分方程B的数值解法

设在地形S上有N个等间距的观测点: $PS_i(xS_i, zS_i)$, 相应的位场观测值为 $u_i = u(PS_i)$

$i = 1, 2, \dots, N$

PS_i 在K曲线上的投影为 $PK_i(xK_i, zK_i)$, 形成N个结点。连结这些结点, 得到

一条与K曲线近似的折线。以此折线代替K, 显然它是逐段光滑的(图3)。于是, 对整个K曲线的积分B可以被看成对此折线逐段积分的和,

$$u = \sum_{q=1}^{N-1} u_q \quad (2)$$

其中 u_q 是第q个线段AB在PS点产生的双层对数位。将坐标原点移到PS点, 则AB的端点坐标为: $A(x_1, z_1), B(x_2, z_2)$ (见图4)

则有: $\vec{r} = x \vec{i} + z \vec{k}$

$$z = c_0(x - x_1) + z_1,$$

$$c_0 = (z_2 - z_1) / (x_2 - x_1)$$

$$r^2 = x^2 + z^2 = x^2 + (c_0 x + d_0)^2,$$

$$d_0 = -c_0 x_1 + z_1$$

$$\vec{n} = (-c_0 \vec{i} + \vec{k}) / Q_0,$$

$$Q_0^2 = (1 + c_0^2)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = d_0 / Q_0$$

$$dl = Q_0 \cdot dx$$

因而有:

$$u_q = d_0 \int_{x_1}^{x_2} (\mu / r^2) \cdot dx \quad (3)$$

为了计算积分(3)式, 进一步假定 μ 是座标的线性函数, 即:

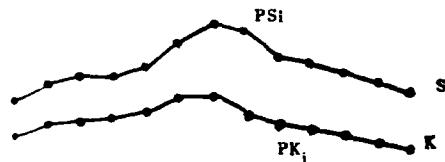


图 3

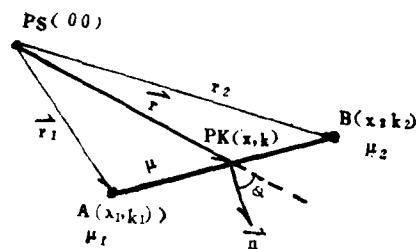


图 4

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\mu_2 - \mu_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + \mu_1 \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1} [(x_2 - x)\mu_1 + \\ &\quad + (x - x_1)\mu_2]\end{aligned}$$

其中, μ_1, μ_2 为 μ 在 A, B 点处之值。
代入 (3) 式则有:

$$u_i = W_1 \mu_1 + W_2 \mu_2 \quad (4)$$

其中,

$$\begin{cases} W_1 = x_2 F_1 - F_2 \\ W_2 = F_2 - x_1 F_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{d_0}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{r^2} dx \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1} \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{Q_0^2 x_2 + c_0 d_0}{d_0} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{tg}^{-1} \frac{Q_0^2 x_1 + c_0 d_0}{d_0} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2 &= \frac{d_0}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\alpha}{r^2} \right) dx \\ &= \frac{d_0 Q_0^2}{2(x_2 - x_1)} \left[\ln \frac{\alpha_2^2 + z_2^2}{\alpha_1^2 + z_1^2} - \right. \\ &\quad \left. - 2c_0 d_0 F_1 \right]\end{aligned}$$

由此可见,在所假定的条件下, u_i 与 μ_i, μ_2 有简单的线性关系。不难想象整个 K 曲线在 PS 点产生的双层对数位为:

$$u_i = \sum_{q=1}^{N-1} u_{iq} = \sum_{j=1}^N a_{ij} \mu_j \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

这里 μ_j —K 曲线各结点处的 μ 值。

a_{ij} 的系数, 对于给定的 PS 和 K 曲线是不难计算的。

(5) 式中, 若 μ_j 已知, 则可算出 u_i (正演)。若 u_i 已知, μ_j 未知, 则 (5) 式就呈关于 μ_j 的线性代数方程组, 简记为:

$$A\mu = u \quad C$$

其中,

μ —未知矢量 (μ_j)

u —已知矢量 (u_i)

A—系数阵 (A_j)

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

解线性代数方程组 C, 求出矢量 (μ_j), 就等于求得 μ 在整个 K 曲线上的分布 (根据假定在 μ_j 间 μ 呈坐标的线性函数), 再利用已求得的 μ 的分布就可以算出 Ω 中任意点 M 处的位 $u(M)$ 。

在数值解法中求解问题 A, 归结为解线性代数方程组 C, 为此我们采用赛德尔迭代法和“迦辽金的加速公式”^[4]。初值取为:

$$\mu_i^{(0)} = u_i / 2\pi \quad i = 1, 2, \dots, N$$

根据上述原理和方法编制了 (扩展) FORTRAN 语言程序, 并在 CYBER172 机上进行了方法检验。

方法检验

这里只用一个算例来说明方法的有效性和特点。

地形、矿体示于图 B—0。地形较陡 (主要部位超过 45°), 矿体在地形线内, 属强地形条件, 在地形 S 上的异常 (图 B—1) 受地形的强烈影响。

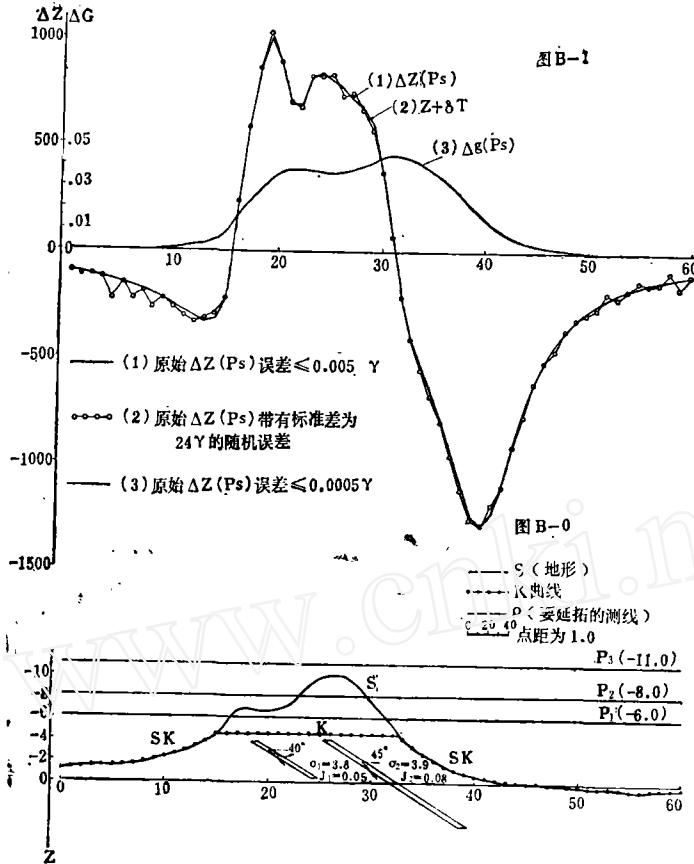
借助于图 B—0 中所示的 K 曲线, 将 S 上的理论异常 ΔZ (最大误差 $\leq 0.005\gamma$) 或 Δg 做为观测值分别延拓到 P_1, P_2, P_3 三条直线上。 P_3 在地形以上 (即 $= -11.0$)。 P_2, P_1 均穿过地形线 S。

图 B—2 是上延到 P_3 线的延拓结果同理论值的对比图, 二者几乎在 10γ 范围内重合, 400γ 以上 13 个点求得均方误差为 2.5γ , 平均相对误差为 0.36% 。

图 B—3 是 P_2 线上延拓结果与理论值的对比图, 二者在 10γ 范围内几乎重合, 500γ 以上 13 个点求得均方误差为 4γ , 平均相对误差 0.29% , 具体数值对比见下表。

图 B—4 是 P_1 线上延拓结果与理论值对比图, 形态完全一致, 整条线上 61 个点上求得均方误差为 47γ , 均方相对误差为 1.8% (其定义为: 均方差/理论 ΔZ_{\max})。图 B—5 是 P_1 线上重力 Δg 的延拓结果与理论值的对比图, 二者几乎重合。

上述延拓结果是在原始数据相当精确 (最大误差 $\leq 0.005\gamma$) 的情况下取得的, 这一结果表明只要原始数据具有足够的精度, 所得到的延拓结果也就相当精确。这一



图B-0 和 图B-1

理论值	525	650	719	725	709	730	827	991	1150	1195	1078	857	617
延拓值	527	651	720	725	710	729	824	996	1152	1186	1071	858	619
相对误差, %	0.4	0.2	0.1	0	0.1	0.1	0.4	0.5	0.2	0.8	0.6	0.1	0.3

事实证明了我们所提出的曲面延拓方法的“方法误差”（指由方法本身所造成的计算结果的误差）是很小的。

然而，实测数据总有一定的误差。

为了研究误差对曲面延拓结果的影响，我们在理论的原始 ΔZ 上加上一组伪随机数，伪随机数的标准差表示原始 ΔZ 的精度。然后将带有随机误差的原始 ΔZ 延拓到 P_1, P_2, P_3 直线上。

从图B-3上可以看出向上延拓或向下延拓距离不大时，原始数据的观测误差对延拓结果的影响并不很大。当向下延拓距离较

大时，原始数据中的误差对延拓结果的影响是很明显的（图B-4），我们研究了具有不同精度的原始数据下延到 P_1 线所得延拓结果的精度，见下表：

原始数据 ΔZ		延拓结果 (P_1 线)	
均方误差 (γ)	均方相对误差 (%)	均方误差 (γ)	均方相对误差 (%)
~ 0	~ 0	47	1.8
12	1.2	129	5.0
24	2.4	221	8.6
36	3.6	321	12.5

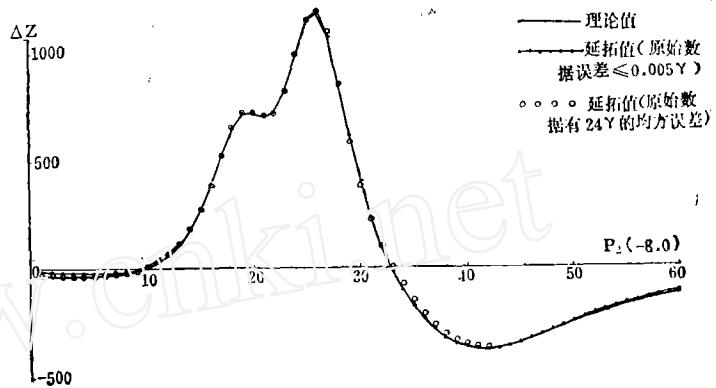
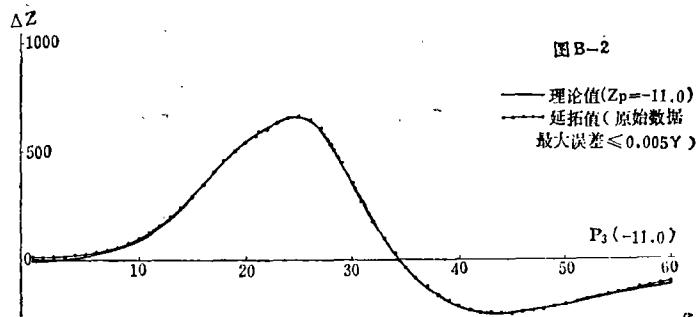
可以看出，延拓结果的误差随原始数据

的误差增大而增大，近于线性关系（比此速度稍快）。若原始数据的均方相对误差 $\leq 3\%$ ，则延拓结果的误差可以小于 10% 。这一要求是相当宽的。图B-4 划出了原始数据均方误差为 12% 时延拓到 P_1 线的拓延结果，结果仍然很好。

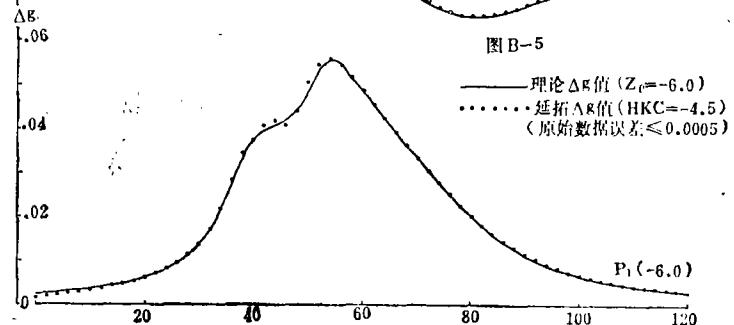
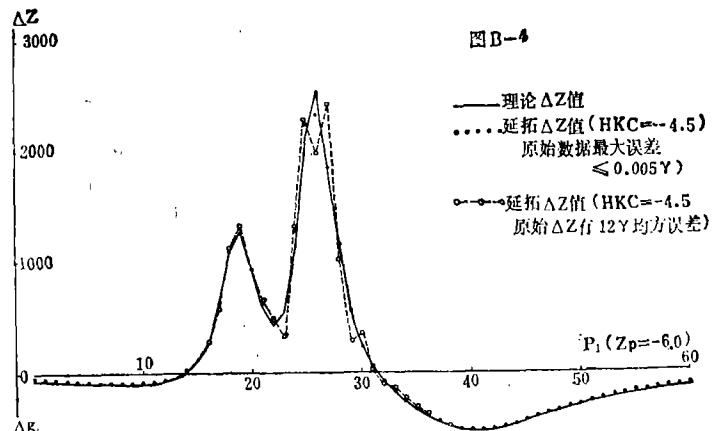
结 语

1. 我们从勘探地球物理的实践需要和特点出发，给出位场曲面延拓的比较切合实际的合理提法，即归为求解问题A。这一提法的基本特点在于：依实际需要和可能去建立一个K曲线，借助于K曲线尽可能将场域加以合理的扩充，既灵活又实用。而对于地形S和实际源的分布却几乎不加任何特殊的限制。因而所提方法具有相当普遍的意义和较强的解题能力。本方法适用于任意起伏地形条件下的解析延拓，既可做“上延”计算，也可做“下延”计算。

2. 借助于等效源概念化为积分方程。在数值计算中做了一些必要的假定，算例表明，这些假定是可以接受的。在迭代中引用了“加速算法”，以保证方法不仅准确有效，而且具有较高的效率。在CYBER172机上（百万次机）对61个点上的观测数据做一次完整的曲化平计算，上机时间只用了24秒钟（其中计算 2×3721 个系数用机 2×2.668 秒，迭代30次用机 18.999 秒）；对于100点作一次曲化平计算，用机29秒（其中计算 2×10000 个系数用机 2×10.959



图B-2 和 图B-3



图B-4 和 图B-5

秒, 迭代4次用机7.162秒), 对一般的二维曲化平计算, 用机时间是没有问题的。

3. 由于本方法的方法误差很小, 因此, 只要原始数据足够精确, 延拓结果也就相当准确。作为一般“曲化平”问题, 无论向上或向下, 只要原始数据的均方相对误差 $\leq 8\%$ (对于极大值 1000γ 的异常, 要求均方误差为 30γ), 那么延拓结果的均方相对误差可以 $\leq 10\%$ 。可见作为一种曲化平方法, 本方法对原始观测数据的精度要求是相当宽的。

4. 作为曲化平方法的研究, 我们的工作

取得了一些进展, 但作为位场解释理论中的位场解析延拓问题, 我们的工作还仅仅是开始。在推广应用中还发现新的问题。今后要在推广应用中进一步完善, 使它在地质找矿和位场解析中起到更好的作用。

参 考 文 献

- (1) Bhattacharyya B.K. and Chan K.C., *Geophysics*, 1977, V.42, No.7, p.1411~1430
- (2) M.A. 拉夫伦捷夫等, 复变函数论方法(上册), 1956, 高等教育出版社
- (3) C. 索波列夫, 数学物理方程
- (4) 中国科学院计算技术研究所编, 计算方法讲义

利用回归分析鉴别真假重力异常

陈宇同*

山区重力资料解释的第一步工作就是鉴别异常。干扰的存在使假异常混杂于由物质密度差异而产生的真异常之中。为了认出真异常, 不少人作了认真的探索^[1,2]。

很多假重力异常往往位于山脊或沟谷中。有的与地形一道起伏, 有的与地形成镜像关系。但由密度差异产生的重力异常一般并无此特点^[1]。我们对产生假异常的原因进行了分析, 了解到它们与测点座标的关系, 并试用回归分析方法来识别假异常, 经过初步试验, 取得了一定的效果。

方法原理的分析

在重力测量中, 局部异常值是观测值经过布格、地形、区域和纬度等改正后得到的。如果这些改正不完善, 就会产生假重力异常。

1. 布格改正 布格改正的理论公式为

$$\Delta g_{布} = k_1 \cdot z_n$$

式中, $k_1 = 0.308 - 0.0419\sigma$ 为布格改正系数, z_n 是测点的海拔高程, σ 是测点与大地水准面间物质的密度。

当布格改正系数 k_1 由于密度 σ 不准确或其他原因(如重力垂向梯度并非0.308毫伽/米)而有误差 Δk_1 时, 产生的布改误差 $\delta_{g布}$ 是测点高程 z_n 的线性函数

$$\delta_{g布} = \Delta k_1 \cdot z_n \quad (1)$$

2. 地形改正 地形改正的计算公式为

$$\begin{aligned} \Delta g_{地} &= f\sigma \iiint_V \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} dv \\ &= f\sigma \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (H/r)^2}} \right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

* 参加这项工作的还有张敬华同志。