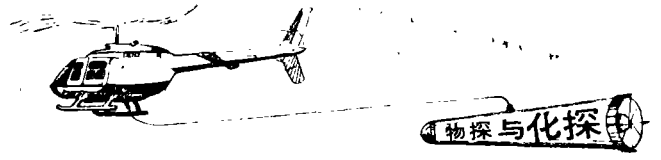

用磁异常的谱及其导数求场源埋深和磁矩

安徽省冶金地质勘探公司八〇八队　王宗器

随着电算的普及，物探重磁数据的处理已广泛使用了数字滤波技术，旨在提取信息、压低干扰的一类线性滤波，例如：根据信号实际输出与希望输出的方差最小为原则设计的维纳滤波和卡曼滤波；根据输出信号的瞬时功率与干扰的平均功率之比最大为原则设计的最大讯噪比滤波（D.O.诺斯，当干扰为白噪声时称为匹配滤波）；根据：①在信号失真最小的同时，将干扰（包括随机干扰和规则干扰）压低到一定程度；②在信号保持一定程度失真的同时，将干扰压低到最小为原则设计的最佳线性滤波（B.H.斯特拉霍夫—空间域，王继伦—频率域）；还有根据反馈原理，采用Z-变换设计的旨在节省计算时间和减少边缘损失的递归滤波（B.K.布哈塔恰赖阿），等等。上述滤波只有事先知道输入信号和干扰的谱的统计表达式时，才能设计出一个可供实用的数字滤波器。但在实际问题中，这些谱的准确表达式当然是不知道的。常用的处理办法是将场源近似看作是形状规则的物体，只考虑场源埋深h和磁矩M对谱的影响，于是给出信号谱和干扰谱的近似表达式。因此，如何通过较准确的频率域反演方法，在已算得的谱曲线上求得尽可能符合实际的场源埋深和磁矩，将关系到滤波结果的好坏。

有的作者（见《地质与勘探》1978年第二期）给出一种在对数振幅谱上利用渐近直线的斜率求埋深的方法，其优点是简单易行，不受区域场和正常场选择的影响，尤其是对下延无限物体，效果很好。但对于下延有限物体（例如水平圆柱体），由于它们的对数振幅谱在ω较小时显然不是一条直线方程，而在ω较大处，干扰强烈，信息容易被噪声淹没，这就影响到计算结果。此外，还有人利用谱的某些特征点求解反问题，方法虽然简单，但由于实际问题很复杂（当场源有一定水平宽度时，极易导致谱的振荡），这就使特征点法的可靠性受到怀疑。为此，本文提出一种利用谱及其导数的组合求场源埋深和磁矩的方法。可以通过计算谱的三次样条函数在样点上的数值导数准确地求得谱的导数，并用此法计算了一些模型和实例。

方　法　的　原　理

对某些形状规则的二度磁性体，不难由它们的谱及其导数解出h和M。例如

1.顺层磁化无限延深薄板　其振幅谱是*

$$|Z(\omega)| = 2\pi M\sin\alpha e^{-h\omega} \qquad (1)$$

式中h为薄板上顶埋深，α为薄板倾角，ω为垂直于薄板走向方向的圆频率（其值恒取正）。M＝2bJ为薄板上顶面磁荷密度，b为薄板半宽度，J为剖面内有效磁化强度。

对（1）式沿ω方向求一阶导数得

$$|Z(\omega)|' = -2\pi Mh\sin\alpha e^{-h\omega} \qquad (2)$$

（2）式除以（1）式，立即解出

$$h = -|Z(\omega)|'/|Z(\omega)| \qquad (3)$$

然后由（1）式解出M

$$M = \frac{|Z(\omega)|}{2\pi\sin\alpha}e^{h\omega} \qquad (4)$$

*参阅中南矿冶学院物探教研组编《频谱分析在磁异常解释中应用的原理与方法》

具体计算时，可在离散谱上取若干个ω_i，分别算出对应的h_i和M_i，取其均值即可。

若薄板斜交磁化，则其复谱为

$$Z(\omega) = 2\pi M\sin\alpha e^{-h\omega} \cdot e^{i(\alpha-\varphi)},\ i=\sqrt{-1} \qquad (5)$$

式中φ为磁化倾角。容易看出对（5）式沿ω方向求出导数后，用上述方法解出h的表达式与（3）式同。这是因为斜磁化时的频谱同顺层磁化时的频谱相比较，除相位谱恒差$\alpha-\varphi$之外，振幅谱完全相同。此结论可推广到其他形状的物体。M的值按（5）式则有

$$M = \frac{Z(\omega)}{2\pi\sin\alpha}e^{h\omega} \cdot e^{-i(\alpha-\varphi)} \qquad (5)'$$

2.垂直磁化水平柱体 分两种情况讨论。对于标准的水平圆柱体，其振幅谱是

$$|Z(\omega)| = 2\pi M\omega e^{-h\omega} \qquad (6)$$

式中h为圆柱的中心埋深，M为圆柱体单位长度的磁矩（$M=J\cdot S$，也称作圆柱体截面磁矩、偶极矩等，S是圆柱体的横截面积）。

对（6）式沿ω方向求导数后，按上述方法便得

$$|Z(\omega)|' = 2\pi Me^{-h\omega} - 2\pi Mh\omega e^{-h\omega} \qquad (7)$$

$$\therefore\quad h = \frac{1}{\omega} - \frac{|Z(\omega)|'}{|Z(\omega)|} \qquad (8)$$

$$M = \frac{|Z(\omega)|}{2\pi\omega}e^{h\omega} \qquad (9)$$

下面证明在一定条件下，对截面为任意形状的水平柱体，可得到同（8）、（9）两式相似的结果。

如图1，设水平柱体的形状和产状沿走向稳定，S为任意截面。在S上取一小面积元dS，$dS=d\xi dh$，它相当于一个中心点位于（ξ，h）的小水平圆柱体的截面积，所产生的谱按（6）式有

$$dZ = 2\pi J\omega \cdot e^{-h\omega} \cdot e^{-i\omega\xi} \cdot dS \qquad (6)'$$

式中 $J\cdot dS=m$为小圆柱体单位长度的磁矩元。等式右边多出一项 $e^{-i\omega\xi}$ 是出于如下考虑：整个水平柱体可看作是很多个小水平圆柱体的叠加。在叠加过程中，除了那些中心坐标为（o，h）的小圆柱之外，其它小圆柱中心在地面的投影都不在坐标原点而有ξ的位移。根据富立叶变换的位移定理，$f(x-\xi)$的谱比$f(x)$的谱应有$\omega\xi$的频移，故式中应有$e^{-i\omega\xi}$项。

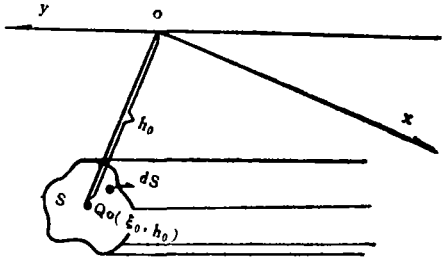

图1 任意截面水平柱体

于是截面为S的整个柱体所产生的谱应为

$$Z(\omega) = \int_s 2\pi J\omega e^{-h\omega} \cdot e^{-i\omega\xi}\, dS = 2\pi J\omega \int_s e^{-\omega(h+i\xi)} dS \qquad (10)$$

根据二重积分中值定理，若$e^{-\omega(h+i\xi)}$在域S上可积，S是域S的面积，则至少存在一点$Q_0(\xi_0, h_0)$，使得下述积分成立

$$\int_s e^{-\omega(h+i\xi)}\, dS = e^{-\omega(h_0+i\xi_0)} \cdot S \qquad (11)$$

将（11）式代入（10）式，并令$M=J\cdot S$为整个水平柱体单位长度的磁矩，即得

$$Z(\omega) = 2\pi M\omega e^{-(h_0+i\xi_0)\omega} \qquad (12)$$

对（12）式沿ω方向求导数得

$$Z'(\omega) = 2\pi Me^{-(h_0+i\xi_0)\omega} - 2\pi M(h_0+i\xi_0)\omega e^{-(h_0+i\xi_0)\omega} \qquad (13)$$

（13）式除以（12）式得

$$h_0 + i\xi_0 = \frac{1}{\omega} - \frac{Z'(\omega)}{Z(\omega)} \tag{14}$$

其中$Z(\omega)$、$Z'(\omega)$均为复谱。为使问题简化，如果水平柱体中心埋深远大于其截面平均半径，则对于观测面而言，可以近似认为积分中值点 Q_0（ξ_0，h_0）与该柱体的磁质量中心线（在S面上为一点）重合。并且取Q_0点在观测面的投影点作为坐标原点（图1），即$\xi_0=0$，便有

$$h_0 \approx \frac{1}{\omega} - \frac{Z'(\omega)}{Z(\omega)} \tag{15}$$

由（12）式，令$\xi_0=0$，即可解出

$$M \approx \frac{Z(\omega)}{2\pi\omega} e^{h_0\omega} \tag{16}$$

这时，因$\xi_0=0$，即相位谱为0，$Z(\omega)=|Z(\omega)|$，因而(15)、(16)式同（8）、（9）式实际上是一样的。

3.垂直磁化水平薄板 将（6）式沿x轴方向从－b到b积分便得水平薄板的振幅谱

$$|Z(\omega)| = 4\pi M |\sin b\omega| e^{-h\omega} \tag{17}$$

式中b为薄板半宽度。此处M的意义同(6)式，应理解为薄板沿x轴方向单位长度的截面磁矩：

$$M = J \cdot D \cdot d\xi \tag{17'}$$

式中D是薄板厚度，$d\xi$为薄板沿x轴方向的单位长度。(17)式是一个振荡函数，其包络线方程为

$$F(\omega) = 4\pi M e^{-h\omega} \tag{18}$$

对(18)式沿ω方向求导数后，按上文方法即可解出薄板中心埋深h和单位截面磁矩M

$$h = -F'(\omega)/F(\omega) \tag{19}$$

$$M = \frac{F(\omega)}{4\pi} e^{h\omega} \tag{20}$$

上面讨论的是二度体（二维谱）的情形。对于三度体（三维谱），如果满足：1)物体的物理性质（密度、磁化强度等）及横截面的形状和产状沿走向稳定；2)物体的界面与所选取的坐标轴平行，则可根据二维谱与三维谱的关系定理（见《地球物理学报》1979年第1期和第4期杨文采和熊光楚的论文）将三维谱化为二维谱进行解释：

$$\left.\begin{aligned} Z(u) &= \frac{1}{R} Z(u,v)|_{v=0} \\ Z(v) &= \frac{1}{T} Z(u,v)|_{u=0} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

式中$Z(u,v)$是三维频谱，$Z(u)$、$Z(v)$是所对应的二维频谱，$Z(u,v)|_{v=0}=Z(u,0)$、$Z(u,v)|_{u=0}=Z(0,v)$分别是$Z(u,v)$在u轴和v轴上的极限谱，R和T分别为三度体沿y轴和x轴的长度。具体做法是，在我们求出了三维异常的频谱之后，分别取下其在u轴和v轴上的数据，然后按其所对应的二维谱的频率域反演方法进行解释，就可以分别求出三度体沿x轴方向和y轴方向的平均截面参数。对应关系如下：点极在u轴及v轴上的极限谱都和无限长极线的二维谱相同（在把点磁极强度视为线磁荷密度的情况下）；偶极在各轴上的极限谱都和无限长偶极线的二维谱一样；有限长偶极线在u轴上的极限谱同无限偶极线；在v轴上的极限谱同水平薄板；有限长极线的谱则在u轴上与无限长极线一样，而在v轴上和$h_2\to\infty$的无限延深矩形体的谱相同；有限长偶极层在各轴上的极限谱都和水平薄板的谱相同，如此等等。要注意的是，用这种方法求出的平均密度（或磁化强度的模）是实际值的R倍或T倍。

谱的数值导数

本文所介绍的方法要使用谱的一阶导数。实际问题给出的是谱的离散序列，因而只能通过近似方法计算谱的数值导数。其中，用三次样条函数求数值导数的方法比较可靠，但计算繁杂。如果只要求样点上的数值导数，且样点是等距的，边界条件也比较简单，在上述条件下，可导出较简单的计算方法。现将方法介绍如下。

设$S(\omega)$为振幅谱$|Z(\omega)|$在区间$[\omega_p, \omega_q]$上的三次样条函数，根据带导数的埃尔米特插值多项式，由三次样条函数的定义可列出下述等式（见附录）：

$$\frac{m_{i-1}+2m_i}{h_{i-1}}+\frac{2m_i+m_{i+1}}{h_i}=3\left(\frac{Z_i-Z_{i-1}}{h_{i-1}^2}+\frac{Z_{i+1}-Z_i}{h_i^2}\right) \qquad (22)$$

式中，$m_i=S'(\omega_i)$为$S(\omega)$在样点ω_i上的导数值；$Z_i=|Z(\omega_i)|$为第 i 个样点上的振幅值；$h_i=\omega_{i+1}-\omega_i$为第 i 个子区间的样点间距；$i=0,1,2,\cdots\cdots N$。

如果样点是等距的，间距为$\Delta\omega$，即

$$h_i=h_{i+1}=\Delta\omega \qquad (i=0,1,2,\cdots\cdots N)$$

代入（22）式得

$$m_{i-1}+4m_i+m_{i+1}=\frac{3}{\Delta\omega}(Z_{i+1}-Z_{i-1}) \qquad (23)$$

由于$S(\omega)$在每个连接点处光滑，故(23)式对每个样点（端点除外）ω_1，ω_2，……ω_{N-1}都成立，即对于$i=1,2,\cdots\cdots N-1$成立，令

$$\beta_i=\frac{3}{\Delta\omega}(Z_{i+1}-Z_{i-1}) \qquad (24)$$

将(23)式逐个写出来就有方程组

$$\begin{cases} m_0+4m_1+m_2 & =\beta_1 \\ \quad m_1+4m_2+m_3 & =\beta_2 \\ \qquad m_2+4m_3+m_4 & =\beta_3 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \qquad\qquad m_{N-2}+4m_{N-1}+m_N & =\beta_{N-1} \end{cases} \qquad (25)$$

这是关于$N+1$个未知量$m_0,m_1,m_2,\cdots\cdots m_N$的$N-1$个线性方程组，它的解有无穷多组。为了得到唯一的一组解，必须根据具体问题补充两个附加条件，称为边界条件。对于本文所讨论的问题，采用下述边界条件是适宜的：

$$\begin{cases} m_0=\begin{cases} C & \text{当振幅谱在}(0,\infty)\text{上无极大值时，} \\ 0 & \text{当振幅谱在}(0,\infty)\text{上有极大值时。} \end{cases} \\ m_N==0 \end{cases} \qquad (26)$$

即端点的切线斜率是已知的（C为已知常数）。

由于方程组(25)在结构上的特殊性，求解它的计算公式极易得到。从(25)的第一个等式可得

$$m_1=-\frac{1}{4}m_2+\frac{\beta_1-m_0}{4}=a_1m_2+b_1 \qquad (27)$$

其中：$a_1=-\frac{1}{4}$ （28）

$$b_1=\frac{\beta_1-m_0}{4} \qquad (29)$$

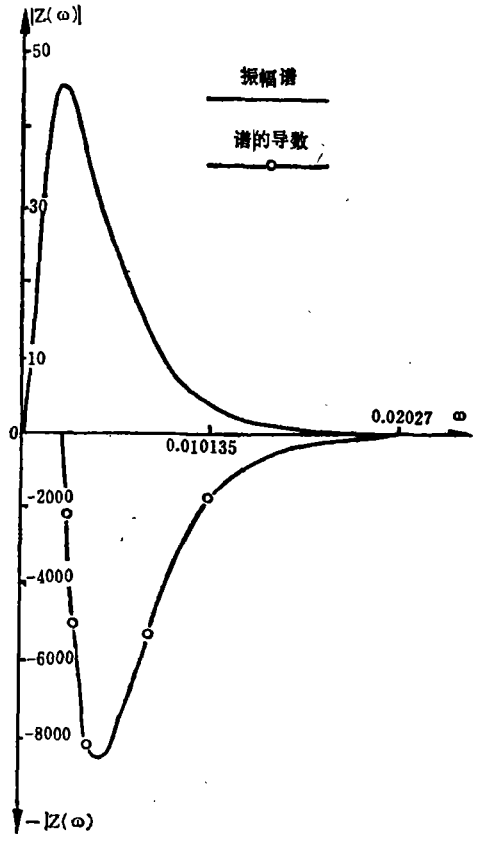

图 2　模型 1 的谱及其导数

将（27）式代入（25）的第二个等式，略经整理得

$$m_2 = -\frac{1}{4+a_1}m_3 + \frac{\beta_2 - b_1}{4+a_1} = a_2 m_3 + b_2 \qquad (30)$$

其中：$a_2 = -\frac{1}{4+a_1}$ （31）

$$b_2 = \frac{\beta_2 - b_1}{4+a_1} \qquad (32)$$

依此类推，可求出关于m_i，a_i，b_i的递推公式：

$$m_i = a_i m_{i+} b_i \qquad (33)$$

$$a_i = -\frac{1}{4+a_{i-1}} \qquad (34)$$

$$b_i = \frac{\beta_i - b_{i-1}}{4+a_{i-1}} \qquad (35)$$

其中，由边界条件可知$a_0 = 0$，$b_0 = m_0$。

(33)式即为等距样点上的数值导数计算公式。

综上所述，计算步骤可分为三步：1)根据(24)式计算β_i（$i = 1, 2, 3, \cdots\cdots N-1$）；2)由$a_0 = 0$，$b_0 = m_0$为已知（边界条件）出发，利用(34)、(35)式算出a_i、b_i($i = 1, 2, 3, \cdots\cdots N-1$)；3)利用边界条件$m_N = 0$为已知，由(33)式算出$m_i$（$i = N-1, N-2, \cdots\cdots 1$），这就是所要求的振幅谱在样点上的数值导数值。

上述计算，当N很大时，用电算实现才是经济的。当N较小时，也可以按上述计算步骤列表分项进行手工计算（表1）。

模型1的谱和数值导数计算表　　表1

i	Zi	$Z_{i+1}-Z_{i-1}$	$\frac{8}{\Delta\omega}\times(2)$	$4+a_{i-1}$	$a_i=-\frac{1}{(4)}$	(8)−b_{i-1}	$b_i=-(5)\times(6)$	(5)×m_{i+1}	$m_i=(7)+(8)$	理论值
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	45.5218	—	—	—		—		—	0	0
2	33.2832	−27.2706	−40361	0361	−0.2500	−40361	−10090	1515	−8575	−8521
3	18.2512	−24.4335	−36162	3.7500	−0.2667	−26072	−6953	892	−6061	−6128
4	8.8497	−14.2173	−21042	3.7333	−0.2679	−14089	−3774	431	−3343	−3329
5	4.0339	−7.0985	−10506	3.7321	−0.2679	−6732	−1804	197	−1607	−1623
6	1.7512	−3.2919	−4872	3.7321	−0.2679	−3068	−822	86	−736	−727
7	0.7420	−1.4524	−2150	3.7321	−0.2679	−1328	−356	36	−320	−323
8	0.2988	−0.6146	−910	3.7321	−0.2679	−554	−148	15	−133	−135
9	0.1274	−0.2406	−356	3.7321	−0.2679	−208	−56	0	−56	−56
10	0.0582	—	—	—	—	—	—	—	0	0

$\Delta\omega = 0.002027$，$a_0 = 0$，$b_1 = m_1 = 0$，$m_{10} = 0$

模型与实例

模型1　已知垂直磁化水平圆柱体中心埋深h = 500米，单位长度磁矩 $M = 10000\times10^{-6}$ CGSM，试用它的谱及其导数反算h和M。

设计算剖面长（2N + 1）·Δx，点距Δx = 100米，N = 15，坐标原点在水平圆柱体中心的正上方。由此算得基频 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{(2N+1)\Delta x} \approx 0.002027$（1/米）。按

$$|Z(\omega_i)| = 2\pi M\omega_i e^{-h\omega_i} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots\cdots N) \qquad (36)$$

算得模型的离散振幅谱见图2和表1第一列。

（36）式中，$\omega_0 = 0$，$\omega_{i+1} = \omega_i + \Delta\omega$，（$i = 0, 1, 2 \cdots\cdots N$）。

由图2可知，曲线在点ω_1处有极大值，其切线斜率为零；ω_{10}以后诸点振幅变化很小，

曲线在该点的斜率已接近于零。因此可在区间〔ω_1，ω_{10}〕上利用谱的三次样条函数求样点上的数值导数m_i（i＝2，3……9）。此时边界条件为$m_1=m_{10}=0$。按上节介绍的步骤列表计算m_i的值。为方便读者查对，兹将计算过程示于表1。其中第10列给出了按下式

$$|Z(\omega_i)|'=2\pi Me^{-h\omega_i}-2\pi Mh\omega_i e^{-h\omega_i} \qquad (37)$$

算得的样点上的理论值（真值），以便对照。

表2则列出了由（8）、（9）两式所算得的各h_i和M_i的值及其平均数。它们同模型是相近似的。

表2

i	1	2	4	3	5	6	7	8	9	平均值
hi	493.3*	504.2	496.5	501.0	497.0	502.4	501.7	506.8	494.3	499.7
Mi	9721	10089	9781	10091	9750	10319	10248	10012	9071	9898

* h_1的值是根据下述方法求得的：由图2可知$|Z(\omega_1)|'=0$，又由（37）可得：

$2\pi Me^{-h_1\omega_1}-2\pi Mh_1\omega_1e^{-h_1\omega_1}=0$，故有$h_1=\frac{1}{\omega_1}=\frac{1}{0.002027}=493.3$，对于水平圆柱体，上述极大点法也是估算埋深的一个简易方法。

模型2 已知垂直磁化无限延深直立薄板上顶埋深h＝500米，上顶面磁荷密度M＝0.1CGSM，试用本文方法在频率域反演h和M。

设计算剖面的长度和点距同模型1。由（1）式的离散形式（$\alpha=90°$）算得振幅谱的值见图3和表3第一行。由图可知曲线在$(0,\infty)$上无极大值，故选择下述边界条件是适宜的

$$m_1=114.000;\qquad m_{10}=0$$

其中m_1是曲线在ω_1处的切线斜率，它是通过作图量取的（见图3）。ω_{10}以后诸点振幅变化很小，故取$m_{10}=0$。因此可在区间〔ω_1，ω_{10}〕上利用谱的三次样条函数求样点上的数

表3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zi	0.22808	0.08281	0.03003	0.01090	0.00399	0.00143	0.00053	0.00019	0.00007	0.0003
m_i	—	-41.819	-15.045	-5.472	-1.991	-0.719	-0.262	-0.095	-0.035	—
Z_i'	—	-41.569	-15.019	-5.457	-1.995	-0.715	-0.265	-0.095	-0.035	—
h_i		505	501	502	499	503	494	498	504	
M_i		0.1031	0.1009	0.1014	0.0992	0.1021	0.0964	0.0982	0.1025	

值导数m_i（i＝2，3……9），其值见图3和表3第二行。表3第三行列出了按（2）式算得的理论值（真值），以便同m_i相对照。按(3)、(4)两式算得的各h_i、M_i值列于表3末两行。它们的平均值为：h＝500.8米；M＝0.1005CGSM。这与模型的值也是很接近的。

实例 图4虚线所示是安徽某地向阳矿区地面磁异常沿u轴方向的极限谱（振幅谱），它是从通过二维富里叶变换（电算）获得的三维谱上截取的。计算时采用正方形网格：$\Delta x=\Delta y=100$米，$M_x=M_y=49$，基频

$$\Delta u=\Delta v=\frac{2\pi}{(2Mx+1)\Delta x}\approx 0.000635(1/米)$$

据验证，本区磁异常主要由磁铁矿（夹少量假象赤铁矿）引起。主矿体（向阳铁矿）赋存于黄马青砂页岩与闪长岩的接触带附近，成似层状或透镜状。主要参数如下：矿体倾角$\alpha=160°$（倾向南西），有效磁化倾角$\varphi=51°40'$，沿走向长$2L\approx1200$米，宽$2b\approx700$米，平均厚度$D\approx55$米，上顶平均埋深$h\approx560$米。由于埋深较大、倾角较缓，因而整个矿体可近似看作截面形状和产状沿走向稳定的有限长水平薄板。加上计算时取y轴与矿体走向平行，满足三维谱化二维谱的条件，故可用其极限谱按所对应的二维谱（在u轴方向相当于无限长水平薄板的谱）进行解释。此外，本区还包括有一些浅源异常，其场源为小型矿体和强磁性辉石闪长岩，形状和产状不一，埋深在200米以下。

图4显示振幅谱有一定程度的振荡，这与矿体有较大的水平宽度是相吻合的。为此，作包络线F(ω)如图4实线所示，其值列于表4第一行。在区间[ω_1，ω_{24}]上利用谱的三次样条函数求样点上的数值导数m_i，边界条件为

$$m_1 = -245000;\ m_{24} = 0$$

其中m_1的值是通过作图量取的（图4）。ω_{24}以后已属白噪声，平均功率为常数，故$m_{24}=0$。由此求得的m_i值（i＝2，3，……23）见表4第二行。按水平薄板公式〔(19)式〕算得中心埋深h_i的值见表4第三行（i＝2，3，……23）。

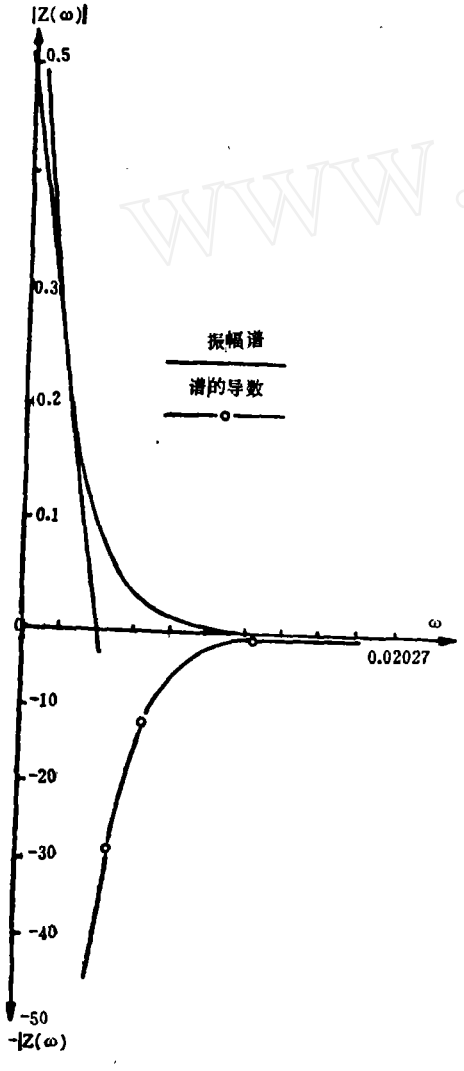

图3　模型2的谱及其导数

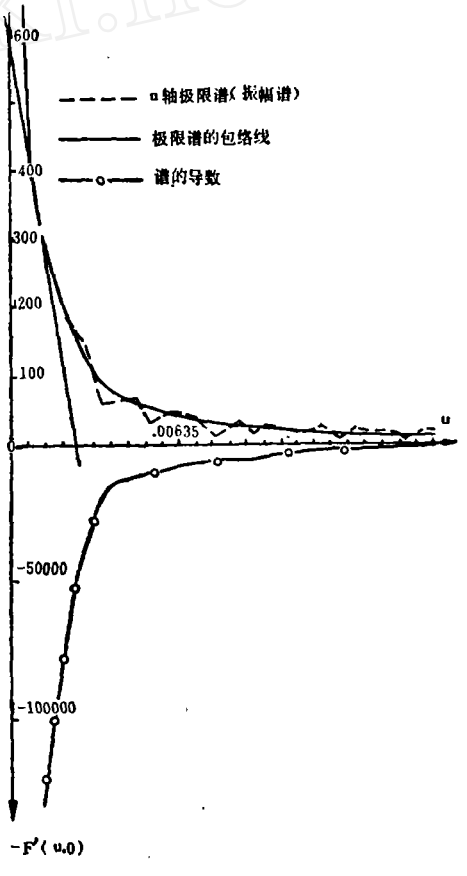

图4　安徽某地向阳矿区磁异常的极限谱及其导数

表4

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_i	1874.1	412.1	285.3	195.9	136.3	93.0	71.9	61.7	55.6	47.6	43.1	36.7
m_i	—	—	-166200	-114350	-80300	-50580	-21570	-10980	-11480	-9730	-8650	-7180
h_i	—	—	583	584	589	544	300	178	206	204	201	195
i	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
F_i	33.8	28.3	26.2	22.1	20.3	18.2	17.9	17.3	17.0	16.5	16.3	16.0
m_i	-6580	-6210	-4480	-5140	-2810	-2050	-340	-830	-600	-570	-450	-
h_i	195	219	171	232	138	113	19	47	35	31	28	-

观察这些数据，容易发现存在两组互相较接近的h_i值。第一组为h_2、h_3、h_4，均值$\bar{h}=585$米，对应于本区主矿体中心埋深（如前所述，向阳铁矿平均中心埋深为588米）。第二组包括i从8到13的诸h_i值，均值$\bar{h}=203$米，大致对应于本区较浅的场源埋深（参阅上文所述）。至于$i=14$之后的诸h_i值，可大致认为对应于近地干扰体的埋深，这些值一般是不可靠的，原因是高频段振幅谱的相对误差较大，且经包络线光滑后取值也不准确。

关于单位截面磁矩M，只讨论第一组的情形。按斜交磁化水平薄板处理，由下式

$$M_i=\frac{F(\omega_i)}{4\pi\sin\nu}e^{h_i\omega_i}$$

其中$\nu=\alpha-\varphi=160°-51°40'=108°20'$。算得$M_2$至$M_4$的值为：$M_2=51.42$，$M_3=51.11$，$M_4=52.03$，取其均值$\bar{M}=51.52$CGSM。再由(17)′式算得剖面内有效磁化强度Js的值为*：

$$Js=\frac{M}{D}=\frac{51.52}{55\times10^2}=0.0094\text{CGSM}$$

本区用其他方法算得的矿体剖面内有效磁化强度为$Js=0.0120$CGSM，这与上面算得的值略有差别，原因可能是由于矿体内夹有部分磁性较弱的假象赤铁矿所致。

通过理论模型和实例检验，可以认为本文方法在实际工作中是可行的，但要注意：

（1）本方法应用于单个规则形状场源时效果较好。多个场源迭加时，如果埋深相差较大——表现在频谱中就是各个场源信息的频率成份互不相关或相关程度较弱——这时也可以取得较理想的结果，否则结果是不理想的。

（2）异常的频谱必须尽可能真实地反映各类信息的频率特性。这主要取决于基波波长（剖面长度、测区范围）和截断波长（点距）是否选择得当。一般而言，若剖面长度太短、测点又很密时，深部信息在谱曲线中得不到应有的反映，这时反演方法再精确也无济于事。反之，若剖面很长、测点又很稀时，会使浅部信息在谱曲线中表现微弱，不便于对其进行研究。如何选择得恰到好处，这方面的经验有待总结。

（3）在用谱的三次样条函数求数值导数时，边界条件的确定需十分谨慎。一般，谱曲线右端点的切线斜率m_q是容易确定的，原因是谱在ω相当大之后总是趋于零或某一常数。至于左端点，当谱曲线在低频段有极大值时也好办，可取$m_p=0$（例如单个水平圆柱体的谱）。但实际问题的谱经常是没有极大值的（振荡谱指其包络线而言），这时作图量取m_p的值就需特别审慎，具体计算表明，取m_p等于$\frac{2}{3}$倍$\frac{1}{2\Delta\omega}(Z_{p+1}-Z_{p-1})$的值比较合适。

（4）磁矩M的计算需考虑矢量$\vec{M}$在计算剖面内的投影以及公式中各个物理量的单位。此外，在推导各种规则形状物体磁场的频谱时，所用的M的意义是不一样的，如对点极M为磁极强度，对无限长极线M为线极强度。在应用时要特别注意。在实际问题中，由于M所牵涉的问题较多，一般不容易算得其准确值。

〈附　录〉　关于正文（22）式的推导

由埃尔米特插值多项式

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}[1-2\omega'_i(x_i)(x-x_i)]\omega_i^2(x)y_i+\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)\omega_i^2(x)y_i' \qquad (1)$$

式中x_i（$i=1,2,\cdots\cdots n$）称为插值点，$y=f(x)$称为被插值函数，$\omega_i(x)$是次数不超过n的多项式：

$$\omega_i(x)=\frac{(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots\cdots(x_i-x_n)}$$

设S(x)三次插值多项式，即$n=2$，由(1)式有

* 在CGSM单位制中，D的单位应为厘米。而(17)′式中dξ应等于1厘米，在这里略写

$$S(x)=[1-2\frac{x-x_i}{x_i-x_{i+1}}](\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}})^2y_i+[1-2\frac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}](\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i})^2y_{i+1}$$

$$+(x-x_i)(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}})m_i+(x-x_{i+1})(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i})m_{i+1} \qquad (2)$$

令$h_i=x_{i+1}-x_i$，并重新改写成较对称的形式如下：

$$S(x)=[\frac{3}{h_i^2}(x_{i+1}-x)^2-\frac{2}{h_i^3}(x_{i+1}-x)^3]y_i+[\frac{3}{h_i^2}(x-x_i)^2-\frac{2}{h_i^3}(x-x_i)^3]y_{i+1}$$

$$+h_i[\frac{1}{h_i^2}(x_{i+1}-x)^2-\frac{1}{h_i^3}(x_{i+1}-x)^3]m_i-h_i[\frac{1}{h_i^2}(x-x_i)^2-\frac{1}{h_i^3}(x-x_i)^3]m_{i+1} \qquad (3)$$

式中$m_i=S'(x_i)=y'_i$是插值点上的导数值，这正是我们感兴趣的。为了求出未知数m_i，可利用三次样条函数$S(x)$的定义，即$S(x)$在样点（插值点）上具有连续二阶导数的条件，由（3）式对$S(x)$求二阶导数得：

$$S''(x)=[\frac{6}{h_i^2}-\frac{12}{h_i^3}(x_{i+1}-x)]y_i+[\frac{6}{h_i^2}-\frac{12}{h_i^3}(x-x_i)]y_{i+1}$$

$$+h_i[\frac{2}{h_i^2}-\frac{6}{h_i^3}(x_{i+1}-x)]m_i-h_i[\frac{2}{h_i^2}-\frac{6}{h_i^3}(x-x_i)]m_{i+1} \qquad (4)$$

由于$h_i=x_{i+1}-x_i$，当$x=x_i$时，由（4）式得

$$S''(x_i)=-\frac{6}{h_i^2}y_i+\frac{6}{h_i^2}y_{i+1}-\frac{4}{h_i}m_i-\frac{2}{h_i}m_{i+1} \qquad (5)$$

当$x=x_{i+1}$时，由（4）式得

$$S''(x_{i+1})=\frac{6}{h_i^2}y_i-\frac{6}{h_i^2}y_{i+1}+\frac{2}{h_i}m_i+\frac{4}{h_i}m_{i+1} \qquad (6)$$

现在考虑$S(x)$在于区间$[x_{i-1}, x_i]$右端点x_i的二阶导数值，记作$S''(x_i^-)$，由（6）式将脚标i换成$i-1$，$i+1$换成i得：

$$S''(x_i^-)=\frac{6}{h_{i-1}^2}y_{i-1}-\frac{6}{h_{i-1}^2}y_i+\frac{2}{h_{i-1}}m_{i-1}+\frac{4}{h_{i-1}}m_i \qquad (7)$$

同样，用$S''(x_i^+)$代表$S(x)$在于区间$[x_i, x_{i+1}]$左端点x_i的二阶导数值，此即（5）式：

$$S''(x_i^+)=-\frac{6}{h_i^2}y_i+\frac{6}{h_i^2}y_{i+1}-\frac{4}{h_i}m_i-\frac{2}{h_i}m_{i+1} \qquad (8)$$

由于$S(x)$在联接点x_i处二阶导数连续，因而有$S''(x_i^-)=S''(x_i^+)$，即：

$$\frac{6}{h_{i-1}^2}y_{i-1}-\frac{6}{h_{i-1}^2}y_i+\frac{2}{h_{i-1}}m_{i-1}-\frac{4}{h_{i-1}}m_i=-\frac{6}{h_i^2}y_i+\frac{6}{h_i^2}y_{i+1}-\frac{4}{h_i}m_i-\frac{2}{h_i}m_{i+1} \qquad (9)$$

为使符号统一，将y_i改写成Z_i，略加整理即得：

$$\frac{m_{i-1}+2m_i}{h_{i-1}}+\frac{2m_i+m_{i+1}}{h_i}=3(\frac{Z_i-Z_{i-1}}{h_{i-1}^2}+\frac{Z_{i+1}-Z_i}{h_i^2}) \qquad (10)$$

此即正文第(22)式。