数学地质

球状模型公式的论证

成都地质学院　陈伯茂

地质统计学是以变异函数和变异曲线为基本工具研究区域化变量的空间相关关系。由有用样品数据计算得到的实验变异曲线，往往需经数学方法与实际经验拟合一条反映区域化变量空间相关和变化特征的圆滑变异曲线，从而获得一个理论数学模型，以供估算储量、研究矿体地质特征、取样最优化等方面利用。

根据实验变异曲线的特点差异，选用的理论数学模型有球状模型、代·威依斯模型、线性模型、ah^{λ} 模型、指数模型、空穴效应模型和随机模型等。但至今用得最多的是球状模型和代·威依斯模型。不过，目前有仅用一种球状模型的趋势，因为它非常适用于许多沉积矿床及斑岩铜矿等。国外用该模型描述过的矿床有法国洛林铁矿，智利、加拿大的斑岩铜矿，爱尔兰、加拿大的铅锌矿，加拿大的铀矿和非洲的磷矿，都取得了较好的效果。国内试验过的铁矿、砂岩铜矿、变质岩铜矿等也都采用这种模型。可以说存在块金效应（即存在不均匀的变化）是一般矿床的普遍特点。为了与线性模型相区别，又称之为弧线性模型，也有称之为Matheron 模型的。

球状模型(The spherical model)早在1960年由Matern 首次提及。该模型的表达式为一个分段定义的非初等函数：

$$\gamma(h) = C[3/2\cdot h/a - 1/2\cdot h^3/a^3] + C_0 \qquad h > a$$

$$\gamma(h) = C + C_0 \qquad h \geqslant a$$

$$\gamma(h) = 0$$

其图象（变异曲线）形态见图1。

球状模型是怎样推导而来的呢？

我们知道，变异函数是研究区域化变量空间相关关系的，它是一种随机函数，既具有结构性，又具有随机性。在平稳假设条件下，变异函数值仅与区域化变量的间隔有关，即γ（h）是h的函数。因此，用一个球体形象地表示这个区域化变量的空间相关关系是比较理想的。因为同一球面上质点到球心的距离皆相等，球的体积也仅是这个球半径的函数。

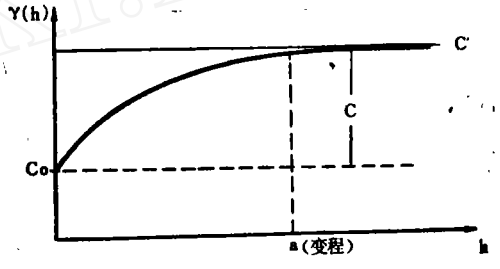

图1　球状模型变异曲线

a—变程（指区域化变量相关的范围）；C_0—块金值；C′—基台；C—棋高，为一常数；$C = C' - C_0$

首先，假定空间有两个以a/2 为半径的球，其质量点呈随机分布，质点间彼此独立不相关，其球心（重心）就可代表该球质量的整体（图2）。并且，两球相交，它们球心OO′的距离为h。

我们知道，球冠公式为：

$V_{冠} = \pi H^2 (R - H/3)$

H—球冠的高，

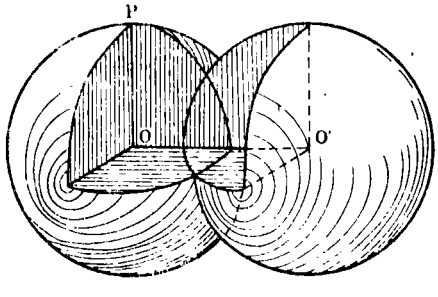

图2　球状模型立体图

球体半径OP = a/2，两球心距离OO′ = h

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

R—球体的半径，

因而两球相交得透镜体，其体积$V_{交}$为：

$$V_{交}=2V_{冠}=2\pi H^2(R-H/3)$$

将两球体的半径a/2和两球冠高(a－h)/2代入上式得：

$$V_{交}=2\pi[(a-h)/2]^2\cdot[a/2\cdot(a-h)/6]$$
$$=\pi/12(2a^3-3a^2h+h^3)$$
$$=\pi a^3/6(1-3/2\cdot h/a+1/2\cdot h^3/a^3)$$

因为球体积$V_{球}=4/3\pi R^3=\pi a^3/6$

所以球体不相交的体积$V_{不交}$为：

$$V_{不交}=V_{球}(3/2\cdot h/a-1/2\cdot h^3/a^3)$$

$$V_{不交}/V_{球}=3/2\cdot h/a-1/2\cdot h^3/a^3$$

推论：

1.相交体积的大小正是反映两球体的空间相关程度。如果相交体积越大，则它们的相关程度也越大；反之，相交体积越小，则它们的相关程度也就越小；当两球相切于一点，则彼此独立。即：

若h＝0，$V_{交}=\pi a^3/6$，相交程度最大，即为球体积。

若h＝a，$V_{交}=0$，相交程度最小，即为0。

2.$V_{不交}/V_{球}$实际上就是等于不相交球体积占整个球体积的百分比，恰等于$(3/2\cdot h/a-1/2\cdot h^3/a^3)$。两者呈弧线关系。令a＝100，$V_{不交}/V_{球}$与h间的关系见表1、图3。因此，当h≥a时，区域化变量彼此独立，变异函数$\gamma(h)=C+C_0=C'$（基台值，即样品方差）。

$V_{不交}/V_{球}$与h的数值对比表　表1

h	$V_{不交}/V_{球}$
0	0
10	0.1495
20	0.2960
30	0.4365
40	0.5680
50	0.6875
60	0.7920
70	0.8780
80	0.9440
90	0.9850
100	

当h＜a时，区域化变量彼此相关，变异函数随h值变小而相应减小，减小的比例正是上述$V_{不交}/V_{球}$百分比〔相当$(V_{球}-V_{交})/V_{球}$，它是$V_{交}$的相对百分比〕。从区域化变量的

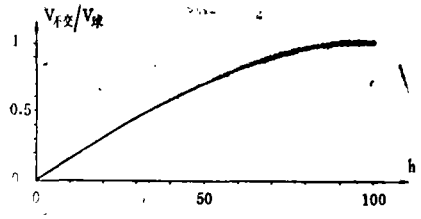

图3　$V_{不交}/V_{球}$与h的关系图

变异函数$\gamma(h)$，方差k(0)和协方差k(h)三者的关系式：$\gamma(h)=k(0)-k(h)$也可以看出，h≥a时，k(h)＝0，故$\gamma(h)=k(0)$，最大。

但当h＜a，k(h)≠0，而且随h减小而增大；因k(0)为一定值，故$\gamma(h)$相反，随h减小而减小，其减小系数也就是这个相对百分比。因此有以下公式：

$$\gamma(h)=C(3/2\cdot h/a-1/2\cdot h^3/a^3)+C_0$$

由于有块金效应的存在，原点不连续，故当h＝0时，$\gamma(0)=C_0$。

3.球状模型主要由上述三个参数C、C_0和a所定义。它能客观地精确地刻划区域化变量的空间相关关系，为地质统计学理论所广泛采用。

4.球状模型的地质意义：变异函数被定义为区域化变量的增量平方的数学期望值，也就是区域化变量的增量方差$\gamma(h)$。如果在地质矿体内用有效数据统计不同间隔的增量值，就能勾绘出这类矿体的变异曲线。相反，从该曲线又可看出，区域化变量的方差$\gamma(h)$是随变量间隔h增大而增大；换言之，它们的自相关函数k(h)是随间隔h增大而减小。当h＝a时，$\gamma(h)$不再随h的增加而增加，而趋于稳定。若达到所谓“极限”或基台，即矿体样品方差$C+C_0$，区域化变量就彼此独立。这时的间隔h就等于变程a，因此，当h＝a时，区域化变量的方差就是矿体的样品统计方差$\gamma(h)=C+C_0$。具有这种变异函数特征的矿床可被认为在矿化范围内，由一系列具不同品位变化程度及大小间隔组成，当穿过这些间隔的边界以后，化验值跳到另一个离差水平，而在每一间隔之内，离差程度相对恒定。Matheron等曾形象地比拟为一些矿化水平不同的“显微盆地”，当加大距离h时，一个观测值M位于

（下转第61页）

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

钻孔原生晕资料，能够准确地划分银矿层位。因此，在矿床评价和勘探过程中，这项工作是不可缺少的。

根据单矿物电子探针资料（表8），方铅矿、黄铜矿、黝铜矿、毒砂、磁黄铁矿矿物中的含银量均较高，银在这些矿物中主要呈辉银矿、自然银、含铜自然银独立矿物包裹体存在。因此，铜矿体、铅矿体中均富含银，有时可富集成单独银矿体。

单矿物分析数据　　表8

元素 / 矿物	光谱分析（ppm）			电子探针分析（克/吨）
	Cu	Pb	Zn	Ag
方铅矿（2）	1000	大于10000	5000	1022
黄铜矿（5）	大于10000	10	30	1342
黝铜矿（4）	大于10000	30	10000	4940
毒砂（8）	600	30	1000	111
磁黄铁矿（2）	600	5	300	121
黄铁矿（2）	15	1	25	18
磁铁矿（2）	15	1	35	—

注：括号中的数字代表样品数目

结　语

从银洞子铅银矿区化探找矿实践，得出以下几点认识：

1.沉积变质热液再造多金属矿床，用地表原生晕方法，不但能迅速、准确地圈定铅矿化范围，发现矿体顶端埋深较浅的盲矿体，而且矿体顶端埋深150米的盲矿体，地表同样有清晰的Pb、Zn、Ag异常。

2.铜矿体赋存在磁性层中，Fe、Cu两者关系密切。用Ag、As含量及Ag×1000/Cu、As×100/Cu比值地球化学指标，可在磁性层中圈定铜矿体。

3.银洞子矿区及其矿田范围内（如山阳黑沟），这种类型的多金属矿床，它们具有纵横两个方向上的成矿及伴生元素的分带性，它客观地反映矿床中的矿物分带。掌握元素的分带规律性，在找矿勘探中有很大的实用意义。

4.化探工作必须进行多元素分析，以达到综合找矿的目的。

（上接第42页）

一个显微盆地，而另一观测值M′位于另一盆地时，则化验值的变差就更大了。当样品对M—M′长度近似显微盆地的平均规模，即h＝a时，γ(h)不再随h的增加而增加。因此，所假拟的空间上的球，可解释为相当于具不同矿化水平的间隔或空间范围。球心对应于这些间隔或范围的中心。

因此，这些地质统计参数，如块金值、基台值及变程是可以说明矿床的矿化特征的。

块金效应值C_0，该词来自南非金矿的块金结构，说明在相同位置取得的样品，其分析结果是不同的，也就是间隔h等于0时的变异函数γ(0)值。它反映h极小时样品品位的离散程度。显而易见，金矿的块金值最大，而沉积矿床的块金值小。

变程a指区域化变量彼此相关的范围，相当矿化范围矿集的平均大小。变程的大小可以反映矿体的变化程度，变程a值大，矿体变化程度就小；反之，变程a值小，矿体变化程度就大。根据变程值大小，可以了解矿体的规模，不同方向的矿化变化程度，可以确定取样的最优条件。

拱高C指品位方差与块金值之差，$C=C'-C_0$，为一常数。它h≠0时，区域化变量离散程度的测度，C值越大，离散程度就越大；相反，C值越小，离散程度就越小。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net