# 一种突出预定深度异常的滤波方法

李 学 圣*

（冶金工业部地质研究所物探室）

本文所研究的是一种在地下场源分布未知的情况下，突出预定深度场源重、磁异常的滤波方法。文中介绍了基本原理，给出了有确定物理意义的滤波算子，并列举了在理论模型场和实测重力场上进行滤波计算的结果。

## 方 法 原 理

位于（$\xi$，$\eta$，$z$）处的球体的磁场强度沿某一方向的分量，用函数$f(x,y)$表示，其谱函数用$F(\omega,\ v)$表示，式中$\omega$，$v$代表圆频率。则

$$F(\omega,\ v)=e^{-\rho z}G(\varphi,\ t_1,\ t_2,\ \cdots) \tag{1}$$

式中，$\rho=(\omega^2+v^2)^{1/2}$，$\varphi=tg^{-1}v/\omega$，而函数$G(\varphi,\ t_1,\ t_2,\ \cdots)$为谱函数$F(\omega,\ v)$中除深度参数$z$以外的其他参数（如磁矩、磁化方向、所测场分量方向、球心水平坐标等）的函数式。函数$G$不含$\omega$，$v$，$\rho$这三个圆频率变量。

设$h(x,\ y,\ z_0)$为具有给定深度参量$z_0$的滤波算子，$H(\omega,v,\ z_0)$为其谱的表达式。求满足函数

$$U(z)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x',y')\cdot h(x'-x,y'-y,z_0)\,dx'dy'\right]^2dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x,\ y)\,dxdy} \tag{2}$$

在$z=z_0$时，$U(z)=$极大值时的算子$h(x,\ y,\ z_0)$。

设$H(\omega,\ v,\ z_0)$相位为零且呈圆周对称，由巴塞瓦公式得

$$U(z)=\frac{\int_0^{\infty}\rho^3e^{-2\rho z}H^2(\rho,\ z_0)\,d\rho\int_0^{2\pi}G^2(\varphi,\ t_1,\ t_2,\ \cdots)\,d\varphi}{\int_0^{\infty}\rho^3e^{-2\rho z}d\rho\int_0^{2\pi}G^2(\varphi,\ t_1,\ t_2,\ \cdots)\,d\varphi}$$

$$=\frac{3}{8}z^4\int_0^{\infty}\rho^3e^{-2\rho z}H^2(\rho,\ z_0)\,d\rho \tag{3}$$

欲求

$$U(z_0)=\max \tag{4}$$

条件下的$H(\rho,\ z_0)$，则有

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=z_0}=\frac{3}{4}\Big[2z_0^3\int_0^{\infty}\rho^3e^{-2\rho z_0}H^2(\rho,\ z_0)\,d\rho$$

$$-z_0^4\int_0^{\infty}\rho^4e^{-2\rho z_0}H^2(\rho,\ z_0)\,d\rho\Big]=0 \tag{5}$$

*参加这项研究工作的还有李德璧、武润亭、覃仕杰、成际霞、赵健民等同志。

（5）式为一积分方程，其解的一种形式为：

$$H^2(\rho, z_0) = \rho^i e^{-i\zeta} \tag{6}$$

式中，i为非负整数。（6）式代入（5）式后得

$$\rho = i \cdot z_0/2 \tag{7}$$

由于i=0时，$H(\rho, z_0)=1$，不满足（4）式，故i取正整数。而

$$H(\rho, z_0) = \rho^{i/2} e^{-i\rho z_0/4} \tag{8}$$

当i为偶数时，令$n = i/2$ （9）

并记相应的$H(\rho, z_0)$为$H_n(\rho, z_0)$，则

$$H_n(\rho, z_0) = \rho^n e^{-n\rho \cdot z_0/2} \tag{10}$$

（8）式为满足（4）式的一种解，显然

$$H(\rho, z_0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \rho^{i/2} e^{-i\rho z_0/4} \tag{11}$$

也是满足（4）式的解。式中，ai为任意给定实数，而且ai不全为零。

以上分析是对磁场强度及其分量进行的。对重力场而言，仍以球体为模型，则（1），（3），（5），（8），（10），（11）各式分别变为

$$F(\omega, \upsilon) = Ce^{-\rho z} \tag{1'}$$

式中，C为以万有引力常数和球体剩余质量为因子的常数。

$$U(z) = \frac{C\int_0^{\infty} \rho e^{-2\rho z} H^2(\rho, z_0)\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi}{C\int_0^{\infty} \rho e^{-2\rho z} d\rho \int_0^{2\pi} d\phi} = 4z^2 \int_0^{\infty} \rho e^{-2\rho z} H^2(\rho, z_0)\, d\rho \tag{3'}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=z_0} = 8z_0 \int_0^{\infty} \rho e^{-2\rho z_0} H^2(\rho, z_0)\, d\rho - 8z_0^2 \int_0^{\infty} \rho^2 e^{-2\rho z_0} H^2(\rho, z_0)\, d\rho = 0 \tag{5'}$$

$$H(\rho, z_0) = \rho^{i/2} e^{-i\rho z_0/2} \tag{8'}$$

$$H_n(\rho, z_0) = \rho^n e^{-n\rho z_0} \tag{10'}$$

$$H(\rho, z_0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \rho^{i/2} e^{-i\rho z_0/2} \tag{11'}$$

仿照上面的推导，对磁场强度或其分量沿某一空间方向的一次导数，可以得到与（8），（10），（11）式对应的公式

$$H(\rho, z_0) = \rho^{i/2} e^{-i\rho z_0/6} \tag{8''}$$

$$H_n(\rho, z_0) = \rho^n e^{-n\rho z_0/3} \tag{10''}$$

$$H(\rho, z_0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \rho^{i/2} e^{-i\rho z_0/6} \tag{11''}$$

对某些其它形态的场源的重力场、磁场以及它们的梯度，依照上述步骤，可求得如下形式的通解：

$$H(\rho, z_0) = \rho^n e^{-n\rho k z_0} \tag{10'''}$$

式中，n为任意正整数。对某些场源的引力场、磁场以及它们的梯度而言，K值如右表所示。

| K 场 / 源场 | 引力场 | 磁场 引力场梯度 | 磁场梯度或引力场二场微商 |
|---|---|---|---|
| 球 | 1 | 1/2 | 1/3 |
| 二度水平圆柱 | 2 | 2/3 | 2/5 |
| 直立无限延深细柱 | 〃 | 1 | 1/2 |
| 二度无限延深薄板 | 〃 | 2 | 2/3 |

## U（z）和算子函数的分析

众所周知，（10），（10′），（10″），（10‴）各式均为垂直高阶导数兼向上延拓算子的谱函数。（10）式为n阶导数兼向上延拓$\frac{n}{2}z_0$高度算子的谱；（10′）式为n阶导数兼向

上延拓$nz_0$高度算子的谱；（10″）式为n阶导数兼向上$\frac{n}{3}z_0$高度算子的谱。

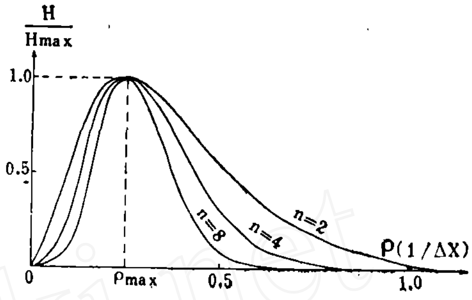

图1　归一化算子的频谱曲线

（8），（8′），（8″），（10），（10′），（10″），（11），（11′），（11″）所代表的运算均为带通滤波。在（10）式中，令n＝2，4，8，$z_0=8\Delta x$（Δx为点距），即得图1所示的以$H_{max}$为单位的曲线。由图可见，n越大，带通宽度越窄。这意味着n越大，运算的深度分辨能力越强，但其深度分辨的稳定性越差。

在公式（8）和（10），（8′）和（10′），（8″）和（10″）中，对应于$H_{max}$的$\rho_{max}$分别为$2/z_0$，$1/z_0$，$3/z_0$。

显然，（11），（11′）和（11″）三式分别是（8），（8′），（8″）三式中不同i的H按一定比例的线性组合。

为了形象地了解U（z）函数，将（10）式代回（2）式、（3）式，求得：

$$\frac{U(z)}{U(z_0)}=\frac{z^4}{\left(z+\frac{n}{2}\right)^{4+2n}} \qquad (12)$$

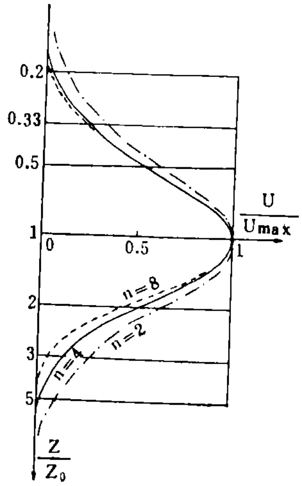

图2 球体的归一化算子U（z）曲线

按上式计算的曲线示于图2，曲线在$z=z_0$处得到极大值。当n＝2时（10式），在对数深度坐标上，曲线以$z=z_0$为对称轴上下对称。对大于2的n值，$z>z_0$时，U（z）随深度增加衰减较快，而当$z<z_0$时，U（z）随深度减小衰减较慢。当n大到一定程度，$z<z_0$时，n对U（z）随深度减小而衰减的速度影响就很小了。

作为（10），（10′），（10″）三式所示H（ρ，$z_0$）富氏反变换的空间域算子

$$h(x,y,z_0)=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[\frac{(-1)^n z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]\right\}_{z=-nkz_0} \qquad (13)$$

式中，若H（ρ，$z_0$）如（10″），（10），（10′）所示，则k分别为1/3，1/2，1。根据（13）式可以求得空间域算子。将空间域算子与实测场进行褶积，即得滤波后的场值。

## 理论模型上的算例

应用上述理论，对垂直磁化水平圆柱体的垂直场强Δz进行了计算。柱心埋深分别选为2，10，50，单位长度的磁矩分别选为2，50，1250，使三个不同埋深柱体的$\Delta z_{max}$相等。在（10）式中，为突出中等深度柱体的异常而取$z_0=10$，取n＝1，3，5，7，9进行了计算，结果示于图3。

同样，还对上述不同埋深的三个柱体的重力场ΔG进行了计算。三个柱体单位长度的质量分别选为2，10，50，以使其$\Delta G_{max}$相等。在（10′）式中，取$z_0=10$，n＝2，4，6，8，10进行滤波计算，结果示于图4。

由图3和图4可以看出如下几点规律：

1.随n的增大，和曲线Ⅱ（z＝10）相比，曲线Ⅰ（z＝2）和曲线Ⅲ（z＝50）异常相对地逐渐减弱，达到了突出z＝10的柱体异常的目的。

2.曲线Ⅰ和曲线Ⅲ相比，曲线Ⅲ随n的增大而衰减较快。当n＞4时，曲线Ⅰ随n的增大

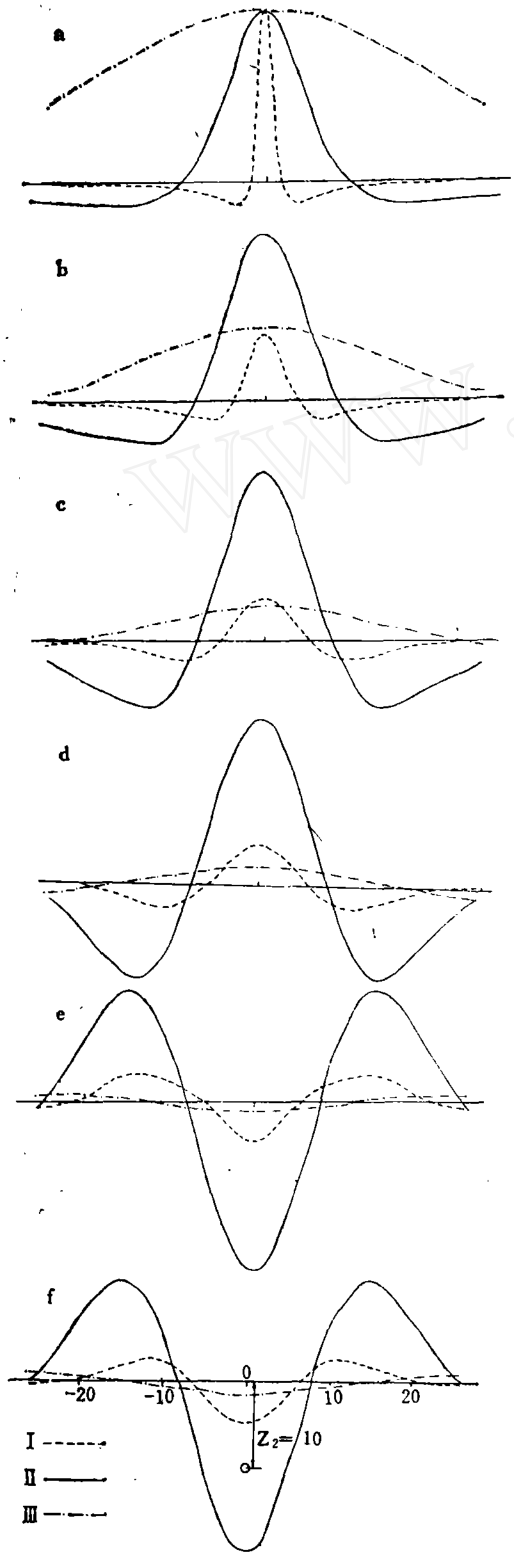


图 3　Δz理论算例

a—Δz；b—一次导数，上延5；c—三次导数，上延15；d—五次导数，上延25；e—七次导数，上延35；f—九次导数，上延45；曲线Ⅰ—z＝2；曲线Ⅱ—z＝10；曲线Ⅲ—z＝50；各图曲线均以曲线Ⅱ的极大值为标准给以规一化

衰减速度已不太显著了。

3. 对于$z=z_0$的滤波曲线Ⅱ（图中实线），半极值宽度基本不随n的改变而改变，而且与滤波前曲线的半极值宽度大体相同。但当$z>z_0$，n越大，半极值宽度越小，而且小于滤波前的半极值宽度。$z<z_0$时，n越大，半极值宽度越大，且均大于滤波前曲线的半极值宽度。

4. 对以正值为主的异常，处理后，n越大，正值四周的负极值绝对值相对正极值来讲越来越大。当然，对以负值为主的异常，处理后，n越大，负值四周的正极值相对负极值绝对值来讲越来越大。

## 实测场算例

对WY矿区的重力资料进行了处理。图5为布伽重力场和地质简图，图6为抬高200米后的二次导数图，图7为抬高800米后的四次导数图，图8为抬高800米后的二次导数图。后三图分别希望突出深度100米，200米，400米左右场源的异常。

在图6～图8上，有四个主要异常。Ⅰ号异常经验证为含磁铁矿蛇纹岩引起，其上顶埋深为几十米到一、二百米，厚度百余米到几百米不等，因而在三个图上均有明显反映。Ⅱ号异常也有一个钻孔证实为蛇纹岩引起。

Ⅲ号异常在图8上的低值等值线呈北西西走向，与王道行背斜轴部走向一致。该异常低值部分反映了赵案庄组一套古老片麻岩系和其中赋存的磁铁矿体的分布范围。在图6和图7上，该异常则反映了异常区内地质构造的一些细节。例如，在图6上，Ⅱ号和Ⅲ号异常之间的负值异常，恰好反映了下曹构造窗（在片麻岩中出露密度较低的震旦系地层）的存在。Ⅲ号异常的高值部分在图7和图8上呈北北东走向，在图7上还表现为双峰值，在图6上完全分离为两个异常。其位置恰与该部位的小背斜构造相吻合。图6和图7的双峰值反映了该背斜两倾没端。

Ⅳ号异常在图8上表现最清晰，它大体上与老柴庄背斜和赵案庄背斜的隆起部位以及赵案庄铁矿的位置相对应。在图6和图7上，该异常表现相当微弱，这说明该异常的场源较深，钻探结果也证实了这一点。

从图6到图8，Ⅲ号异常的低值部分和Ⅳ号异常由不明显变为明显，Ⅲ号异常峰值和Ⅱ

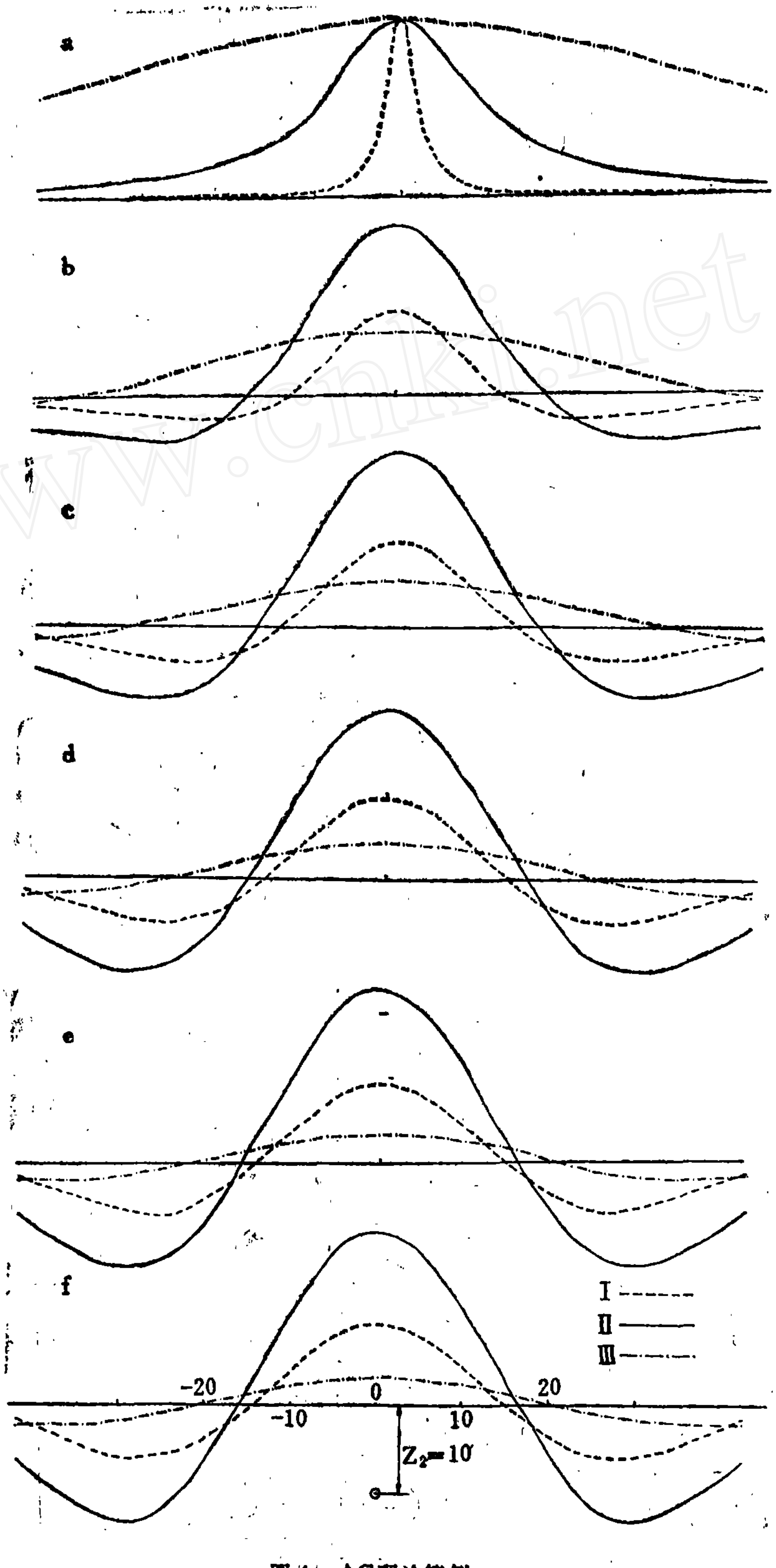


图4 ΔG理论算例

a—ΔG；b—二次导数，上延20；c—四次导数，上延40；d—六次导数，上延60；e—八次导数，上延80；f—十次导数，上延100；曲线Ⅰ—z＝2；曲线Ⅱ—z＝10；曲线Ⅲ—z＝50；各图曲线均以曲线Ⅱ的极大值为标准给以规一化

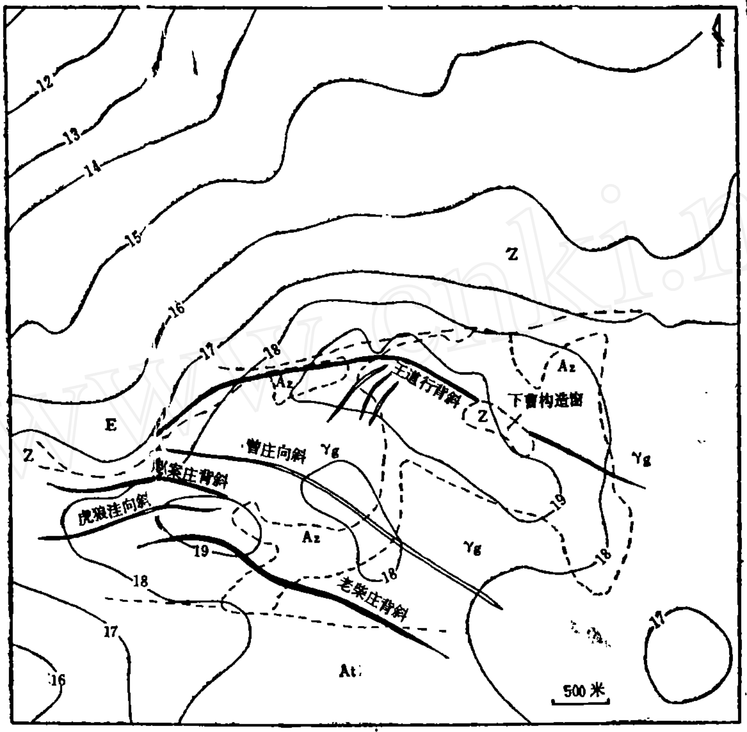


图5．WY矿区重力与地质综合平面图

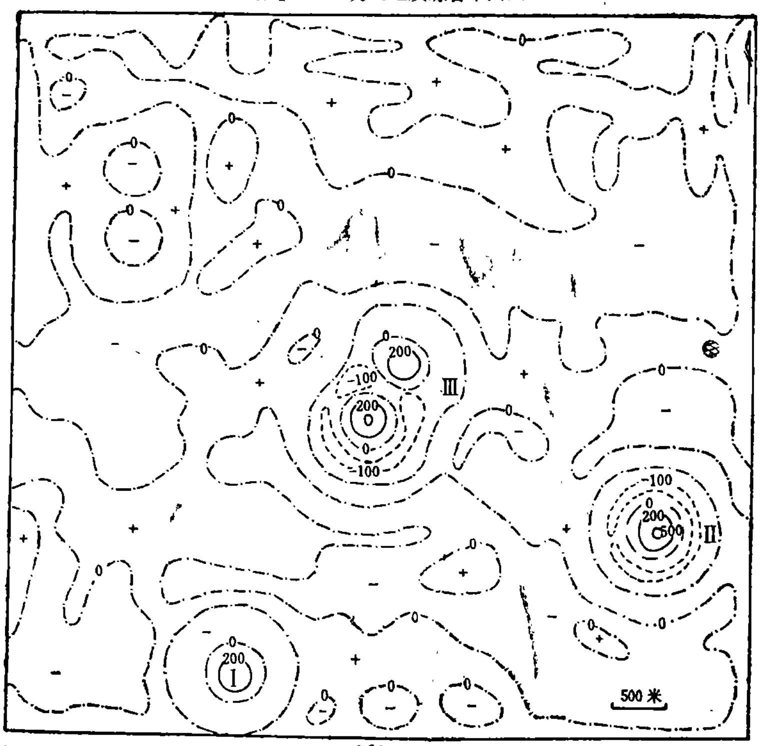


图6　WY区上延200米的$\frac{\delta^2 G}{\delta h^2}$平面图（单位：$10^{-6}$毫伽／米²）

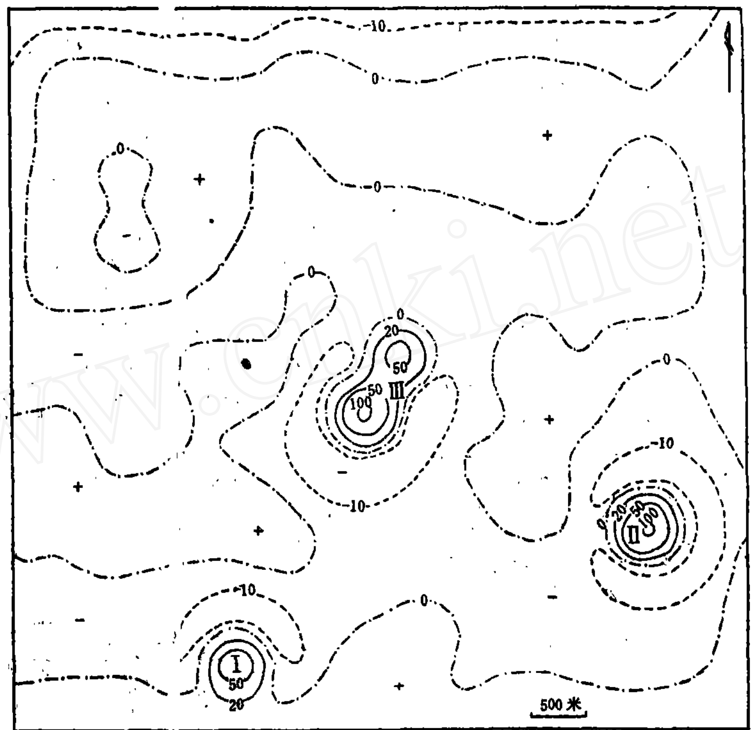


图7 WY矿区上延800米的$\frac{\delta^4 G}{\delta h^4}$平面图（单位：$10^{12}$毫伽/米$^2$）

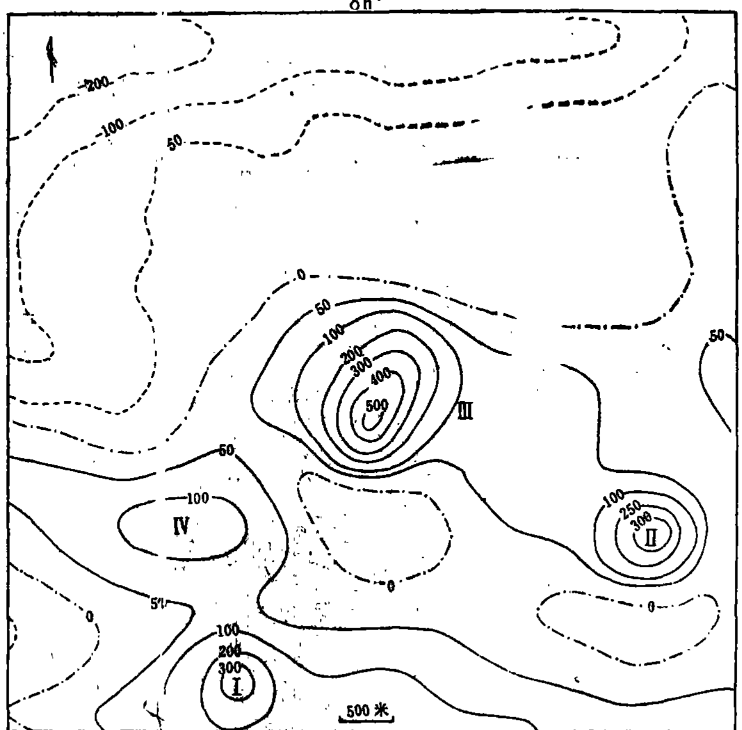


图8 WY矿区上延800米的$\frac{\delta^2 G}{\delta h^2}$面图（单位：$10^{-8}$毫伽/米$^2$）

号异常间的“构造窗”异常由明显变为不明显，显示了本文所述滤波方法的深度分辨能力。