

# 论定向下楔的单双解条件

高 森

定向下偏心楔，可用赤平极射投影作图求解。（见中南矿冶学院1978年印《岩心钻探专辑》第1辑）赤平极射投影具有可贵的特点：

1. 把球面三角形变换为平面上的投影三角形，三个角和边均用度表示（即角距），仍能利用球面三角公式计算；

2. 可保角变换，球面上二大圆交角投影后，仍保持不变；

3. 除过球心的直立圆的投影是直线外（实际仍是半径为无穷大的圆），任何大圆或小圆的投影均为圆，因此可用圆规和直尺作圆，所用吴氏网，本身可当量角器使用。

由于这些特点，用它表达钻孔弯曲是十分理想的。本文仅利用吴氏网按下球投影系统作图，供分析定向下楔的单双解的条件。至于定向下楔的图算法，则同于“定向取心的图算法”一文（见本刊1978年第3期）。由于岩心钻用的楔偏角很小，往往顶角也不大。为便于图算和提高精度，可采用“放大赤平极射投影法”（《岩心钻探专辑》第1辑）。

定向下楔导斜是现场经常碰到的问题，加之，定向钻进和测斜计算，对新式磁性矿

测斜仪的需要，就更显得迫切。定向下楔的原理见立体图（图1）。XYZ为左手直角坐标系，AB为原孔（上测程），产状为方位角 $\alpha_1$ 和顶角 $\theta_1$ ，下入楔偏角为 $\gamma$ 的偏心楔，并使楔面由原孔弯曲方向（由钻孔上帮端点起算）顺时针扭转 $\varphi_1$ 角，定向导斜后的新孔（下测程）为AC，产状为方位角 $\alpha_2$ 和顶角 $\theta_2$ 。为了表达方便，使下测程平移也过A点，将钻孔轴线改变的角度称为轴偏角，则此处就是 $\angle BAC = \gamma$ ，自然，由于地质和技术原因，往往 $\angle BAC$ 小于 $\gamma$ ，计算时仍以轴偏角等于楔偏角为前提。轴偏角 $\gamma$ 的水平投影即新孔相对原孔的方位角改变（ $\Delta\alpha = |\alpha_2 - \alpha_1|$ ）。偏心楔扭转角（楔转角） $\varphi_1$ 是位于钻孔轴线垂直面（钻孔横断面）内，所以也就是定盘测斜中的终点角，且为特定值，因“定向母线”落于ABC平面内，又如正投影图（图2）所示，自O作 $Om_1 \perp AB$ ， $Om_2 \perp AC$ ， $Om$ 垂直 $\triangle ABC$ ；或者过O作AB和AC的垂直面，交汇线为 $Om_1$ 、 $Om_2$ 及 $Om$ ，把二面角 $Om_1mm_2$ 展开其面得图3。于是表达出 $\angle Om_1m = \pi - \varphi_1$ ， $\angle Om_2m = \varphi_2$ （关于 $\varphi_2$ 角见后）。

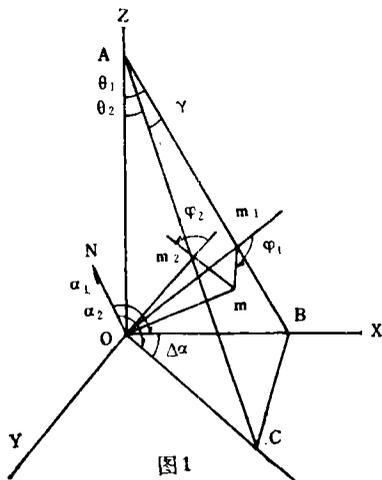


图1

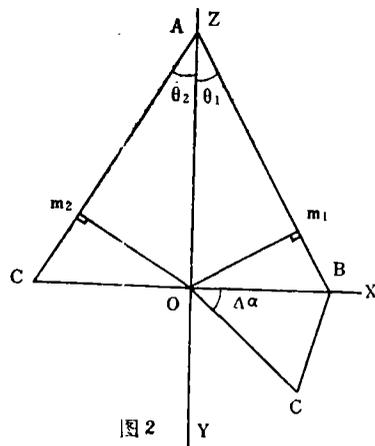


图2

由上述可知，用立体图或投影图清楚表达这些角度不大方便，若用球面立体图表达要好一些，且便于计算，但也有不直观的毛病。用赤平极射投影图则兼有各法优点。

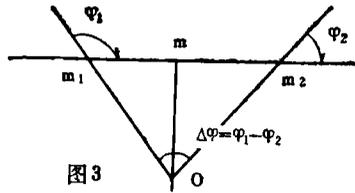


图3

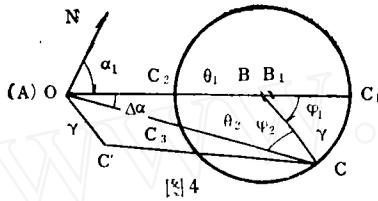


图4

图4为向下楔的赤平极射投影图。使O点与吴氏网中心重合，按 $\alpha_1$ 作OB并与横标重合，取角距 $\widehat{OB} = \theta_1$ ，在 $\widehat{OB}$ 上取 $\widehat{BC}_1 = \widehat{BC}_2 = \gamma$ ，以 $C_1C_2$ 的中点为作图圆心， $B_1C$ 为半径绘小圆B，该圆表示楔子不定向时新孔的轨迹，若使楔面定向扭转 $\varphi_1$ 角，即取 $\angle C_1BC = \varphi_1$ ，交小圆于C点，则新孔的顶角为 $\widehat{OC} = \theta_2$ （仍转在横标上读值），方位角改变为 $\angle BOC = \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ ，新孔方位为 $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$ 。如何能作出 $\varphi_1$ 角呢？最简单的办法是取 $\angle BOC' = \varphi_1$ ， $\widehat{OC'} = \gamma$ ，再将该角转在B点，O点沿横标转 $\widehat{OB} = \theta_1$ ， $C'$ 点则沿纬线也转 $\widehat{C'C} = \theta_1$ 。道理是使钻孔测程AB垂直时， $\varphi_1$ 角则落在中心，能利用量角器定值，球面三角形ABC（或OBC）的B顶落在中心，转动 $\theta_1$ 角后，则A顶落在中心。球面三角形OBC有六个元素： $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\gamma$ 三个边； $\Delta\alpha$ 、 $\pi - \varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 三个角。

现场定向下楔的问题可分为四种情况：

1. 已知 $\theta_1$ 、 $\alpha_1$ 、 $\gamma$ 和 $\varphi_1$ ，求 $\theta_2$ 和 $\Delta\alpha$ （或 $\alpha_2$ ）。上述作图法即解此命题，只有一解。
2. 已知 $\theta_1$ 、 $\alpha_1$ 、 $\gamma$ 和 $\Delta\alpha$ ，求 $\theta_2$ 和 $\varphi_1$ ，如图4，取 $\angle BOC = \Delta\alpha$ ，交小圆于C和 $C_3$ ，依此绘如图5所示。有二解： $\theta_2$ 和 $\varphi_1$ ，

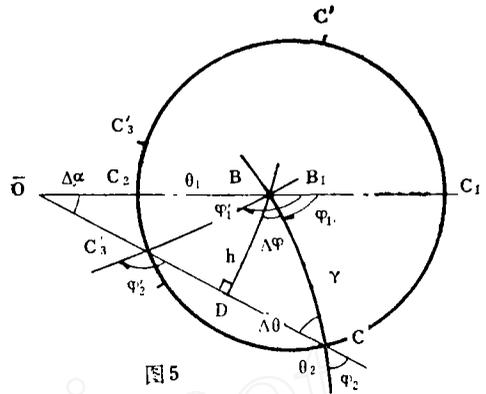


图5

$\theta'_2 (= \widehat{OC}_3)$  和  $\varphi'_1$ 。

3. 已知 $\theta_1$ 、 $\alpha_1$ 、 $\gamma$ 和 $\Delta\alpha_{\max}$ （最大值），求 $\varphi_1$ 和 $\theta_2$ ，有一解。

4. 已知 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 和 $\Delta\alpha$ ，求 $\gamma$ 和 $\varphi_1$ ，只有一解。

本文侧重讨论第二、三种情况，分析单双解的条件。

如图5，满足已知条件 $\theta_1$ 、 $\alpha_1$ 、 $\gamma$ 和 $\Delta\alpha$ 可得两个解（C和 $C_3$ 点）。为了解球面三角形OBC，用任意三角形公式（如余弦、余切等公式）不利于采用对数三角函数运算，为此把它分割成二个直角球面三角形。由于 $\widehat{BC} = \widehat{BC}_3 = \gamma$ ，球面三角形 $BCC_3$ 的二底角相等，自顶点B向对边OC（ $\theta_2$ ）作球面垂线 $\widehat{BD} = h$ ，则该垂线必然是垂直平分线，令 $DC = DC_3 = \Delta\theta$ ， $\angle DBC = \angle DBC_3 = \Delta\varphi$ 。

现先解BOD和BCD。可按照记忆法则列出公式。如图6所示，除直角外，顺次把各元素记在圆上，但二直角边变为余角形式。记忆法则规定：某元素的余弦等于相邻二元素的余切之积或不相邻二元素的正弦之

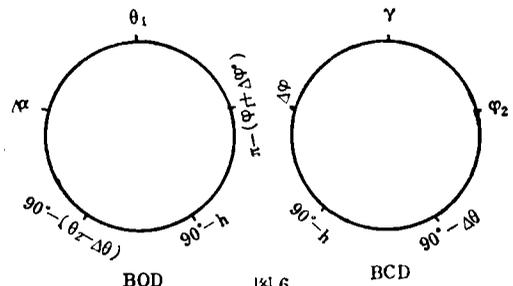


图6

积。可得：

$$\sinh = \sin \Delta \alpha \sin \theta_1 \dots\dots\dots (1)$$

$$\cos \Delta \varphi = \operatorname{tgh} \operatorname{ctg} \gamma \dots\dots\dots (2)$$

$$\sin \Delta \theta = \sin \Delta \varphi \sin \gamma \dots\dots\dots (3)$$

$$\cos |\pi - (\varphi_1 + \Delta \varphi)| = \operatorname{ctg} \theta \operatorname{tgh} \dots\dots\dots (4)$$

$$\sin(\theta_2 - \Delta \theta) = \operatorname{ctg} \Delta \alpha \operatorname{tgh} \dots\dots\dots (5)$$

例：已知  $\theta_1 = 3^\circ$ ,  $\gamma = 1^\circ 30'$ ,  $\Delta \alpha = 20^\circ$ 。  
依次用公式 (1) ~ (5) 求得  $h = 1^\circ 1' 30''$ ,  
 $\Delta \varphi = 46^\circ 52' 30''$ ,  $\Delta \theta = 1^\circ 5' 41''$ 。第一  
解为  $\angle C_1 BC = \varphi_1 = 63^\circ 5' 50''$ ,  $OC = \theta_2$   
 $= 3^\circ 54' 49''$ 。第二解应为  $\angle C_1 BC_3 = \varphi_1 +$   
 $2\Delta \varphi = 156^\circ 50' 50''$ ,  $OC_3 = \theta_2' = \theta_2 - 2\Delta \theta$   
 $= 1^\circ 43' 27''$ 。对实际工作求至分即可。

由此可得结论：双解的条件是  $\varphi_2 + \varphi_2'$

$= \pi$ 。 $\varphi_2$  与  $\varphi_2'$  的定义同于  $\varphi_1$ ，仍为终点角，  
是位于垂直于钻孔轴线的平面中钻孔弯曲方  
向（重力分力方向，指向上邦）与原孔和新  
孔轴线形成的平面之间的夹角，由钻孔弯曲  
方向起算，方向为顺时针。

当  $\Delta \varphi = 0$  或  $\Delta \theta = 0$ ，C 和  $C_1$  汇合为一  
点， $h = \gamma$ ，即 OD 与圆 B 相切， $\varphi_2 = 90^\circ$ ，这  
就是单解的条件。当然，也可通过  $\operatorname{ctg} \Delta \alpha =$   
 $f(\theta_1, \gamma, \varphi_1)$  的公式，对  $\varphi_1$  求二阶导数，求  
得  $\Delta \alpha_{\max}$ ，也能证明这一点。

定向下楔的目的更经常的是希望最大的  
方位角改变。其作图法如图 7。已知  $OB =$

表 1

$\theta_1 \backslash \gamma$		$2^\circ$	$3^\circ$	$4^\circ$	$5^\circ$	$6^\circ$	$7^\circ$	$8^\circ$	$9^\circ$
$1^\circ 30'$	$\Delta \alpha$	$48^\circ 36'$	$30^\circ 1'$	$22^\circ 3'$	$17^\circ 29'$	$14^\circ 30'$	$12^\circ 7'$	$10^\circ 51'$	$9^\circ 38'$
	$\varphi_1$	$138^\circ 35'$	$119^\circ 59'$	$112^\circ 12'$	$107^\circ 25'$	$104^\circ 26'$	$102^\circ 19'$	$100^\circ 44'$	$99^\circ 31'$
	$\theta_2$	$1^\circ 19'$	$2^\circ 36'$	$3^\circ 43'$	$4^\circ 16'$	$5^\circ 49'$	$7^\circ 1'$	$7^\circ 52'$	$8^\circ 52'$
$2^\circ$	$\Delta \alpha$	—	$41^\circ 49'$	$30^\circ 1'$	$23^\circ 36'$	$19^\circ 30'$	$16^\circ 39'$	$14^\circ 31'$	$12^\circ 54'$
	$\varphi_1$	—	$131^\circ 47'$	$119^\circ 58'$	$113^\circ 32'$	$109^\circ 24'$	$106^\circ 31'$	$104^\circ 23'$	$102^\circ 44'$
	$\theta_2$	—	$2^\circ 14'$	$3^\circ 28'$	$4^\circ 35'$	$5^\circ 39'$	$6^\circ 43'$	$7^\circ 45'$	$8^\circ 47'$
$2^\circ 30'$	$\Delta \alpha$	—	$57^\circ 52'$	$38^\circ 42'$	$30^\circ 2'$	$24^\circ 40'$	$20^\circ 58'$	$18^\circ 16'$	$16^\circ 11'$
	$\varphi_1$	—	$146^\circ 25'$	$128^\circ 38'$	$119^\circ 56'$	$114^\circ 33'$	$110^\circ 50'$	$108^\circ 6'$	$106^\circ 0'$
	$\theta_2$	—	$1^\circ 34'$	$3^\circ 5'$	$4^\circ 19'$	$5^\circ 28'$	$6^\circ 32'$	$7^\circ 36'$	$8^\circ 39'$
$3^\circ$	$\Delta \alpha$	—	—	$48^\circ 30'$	$36^\circ 50'$	$29^\circ 59'$	$25^\circ 23'$	$22^\circ 3'$	$19^\circ 30'$
	$\varphi_1$	—	—	$131^\circ 27'$	$126^\circ 48'$	$119^\circ 55'$	$115^\circ 16'$	$111^\circ 54'$	$109^\circ 19'$
	$\theta_2$	—	—	$2^\circ 39'$	$4^\circ 1'$	$5^\circ 13'$	$6^\circ 20'$	$7^\circ 26'$	$8^\circ 30'$

$\theta_1 \backslash \gamma$		$10^\circ$	$12^\circ$	$14^\circ$	$16^\circ$	$18^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$	$40^\circ$
$1^\circ 30'$	$\Delta \alpha$	$8^\circ 40'$	$7^\circ 14'$	$6^\circ 13'$	$5^\circ 27'$	$4^\circ 52'$	$4^\circ 23'$	$3^\circ 33'$	$3^\circ 0'$	—	—
	$\varphi_1$	$98^\circ 32'$	$97^\circ 2'$	$96^\circ 2'$	$95^\circ 14'$	$94^\circ 37'$	$94^\circ 8'$	$93^\circ 13'$	$92^\circ 36'$	—	—
	$\theta_2$	$9^\circ 53'$	$11^\circ 54'$	$13^\circ 55'$	$15^\circ 56'$	$17^\circ 57'$	$19^\circ 57'$	$24^\circ 58'$	$29^\circ 59'$	—	—
$2^\circ$	$\Delta \alpha$	$11^\circ 36'$	$9^\circ 40'$	$8^\circ 18'$	$7^\circ 17'$	$6^\circ 29'$	$5^\circ 51'$	$4^\circ 44'$	$4^\circ 0'$	$3^\circ 30'$	—
	$\varphi_1$	$101^\circ 10'$	$99^\circ 27'$	$98^\circ 3'$	$97^\circ 0'$	$96^\circ 10'$	$95^\circ 30'$	$94^\circ 18'$	$93^\circ 28'$	$92^\circ 52'$	—
	$\theta_2$	$9^\circ 48'$	$11^\circ 50'$	$13^\circ 52'$	$15^\circ 53'$	$17^\circ 53'$	$19^\circ 55'$	$24^\circ 56'$	$29^\circ 56'$	$34^\circ 51'$	—
$2^\circ 30'$	$\Delta \alpha$	$14^\circ 33'$	$12^\circ 7'$	$10^\circ 23'$	$9^\circ 6'$	$8^\circ 7'$	$7^\circ 20'$	$5^\circ 55'$	$5^\circ 0'$	$4^\circ 22'$	$3^\circ 53'$
	$\varphi_1$	$104^\circ 20'$	$101^\circ 51'$	$100^\circ 5'$	$98^\circ 46'$	$97^\circ 43'$	$96^\circ 53'$	$95^\circ 22'$	$94^\circ 20'$	$93^\circ 35'$	$92^\circ 59'$
	$\theta_2$	$9^\circ 41'$	$11^\circ 44'$	$13^\circ 47'$	$15^\circ 48'$	$17^\circ 50'$	$19^\circ 51'$	$24^\circ 54'$	$29^\circ 54'$	$34^\circ 55'$	$39^\circ 58'$
$3^\circ$	$\Delta \alpha$	$17^\circ 30'$	$14^\circ 33'$	$12^\circ 28'$	$10^\circ 56'$	$9^\circ 44'$	$8^\circ 47'$	$7^\circ 7'$	$6^\circ 0'$	$5^\circ 14'$	$4^\circ 40'$
	$\varphi_1$	$107^\circ 19'$	$104^\circ 17'$	$102^\circ 10'$	$100^\circ 32'$	$99^\circ 17'$	$98^\circ 17'$	$96^\circ 27'$	$95^\circ 12'$	$94^\circ 1'$	$93^\circ 35'$
	$\theta_2$	$9^\circ 34'$	$11^\circ 39'$	$13^\circ 31'$	$15^\circ 46'$	$17^\circ 47'$	$19^\circ 49'$	$24^\circ 49'$	$29^\circ 55'$	$34^\circ 58'$	$40^\circ 0'$

表 2

$\theta_1 \backslash \gamma$		10°	20°	40°
5°	$\Delta\alpha$	30°8'	14°46'	7°48'
	$\varphi_1$	119°45'	103°55'	95°59'
	$\theta_2$	8°40'	19°23'	39°44'
8°	$\Delta\alpha$	53°16'	24°1'	12°30'
	$\varphi_1$	142°51'	112°43'	99°39'
	$\theta_2$	6°1'	18°23'	39°19'
15°	$\Delta\alpha$	—	49°11'	23°45'
	$\varphi_1$	—	137°24'	108°37'
	$\theta_2$	—	13°23'	37°32'

表 3

$\theta_1 \backslash \gamma$	10°	20°	40°
1°30'	9°53'	19°53'	—
3°	9°32'	19°46'	39°52'
5°	8°39'	19°20'	39°38'
8°	5°59'	18°16'	39°3'
15°	—	13°4'	36°37'

$\theta_1, \widehat{BD} = \gamma$ 。取  $OB_1$  的中点  $O_1$  为圆心作圆，交圆  $B$  (即圆  $B_1$ ) 于  $D$ ，则  $\varphi_2 = 90^\circ$ 。此时可测得  $\angle BOD = \Delta\alpha_{\text{最大}}$ ， $\angle C_1BD = \varphi_1$ ， $OD = \theta_2$ 。

由公式 (1) (4) (5)，因  $\Delta\varphi = 0$ ， $\Delta\theta = 0$ ， $h = \gamma$ ，可得单解的计算公式：

$$\sin\gamma = \sin\Delta\alpha \sin\theta_1 \dots\dots\dots (1')$$

$$\cos(\pi - \varphi_1) = \text{ctg}\theta_1 \text{tg}\gamma \dots\dots\dots (4')$$

$$\sin\theta_2 = \text{ctg}\Delta\alpha \text{tg}\gamma \dots\dots\dots (5')$$

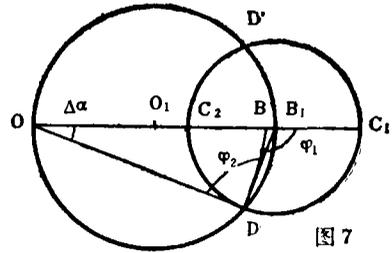


图 7

实际工作中，楔偏角  $\gamma \leq 3^\circ$ ，在  $5^\circ$  以内，可认为  $\text{tg}\gamma = \sin\gamma$ 。因此： $\cos(\pi - \varphi_1) = \text{ctg}\theta_1 \sin\gamma = \sin\Delta\alpha \cos\theta_1 = \sin\Delta\alpha \cdot \text{ctg}\Delta\alpha \cdot \text{ctg}(\pi - \varphi_1)$ ，即  $\sin(\pi - \varphi_1) = \cos\Delta\alpha$ ，因此， $\varphi_1 \cong 90^\circ + \Delta\alpha_{\text{max}}$

此时把球面三角形近似的看作平面三角形，外角等于二内角之和。如欲使方位角最大改变  $\Delta\alpha$ ，则近似的应使扭转角为  $90^\circ + \Delta\alpha$ 。

按单解条件的公式，已知  $\theta_1$  和  $\gamma$ ，计算得  $\Delta\alpha$  (最大) 和  $\varphi_1$  值见表 1 和表 2。由表可知，在  $\gamma$  和  $\theta_1$  较小时 ( $\gamma < 8^\circ$ ， $\theta_1 < 20^\circ$ )，近似保持着  $\varphi_1 = 90^\circ + \Delta\alpha$  (最大值) 的关系，在表列角度范围 ( $\gamma = 15^\circ$ ， $\theta = 40^\circ$ )，

近似保持着  $\cos\Delta\alpha = \frac{\theta_2}{\theta_1}$  ( $\theta_1, \theta_2$  以度为单位) 的关系，按此关系式计算的  $\theta_2$  见表 3。

所以存在  $\cos\Delta\alpha = \sin(180^\circ - \varphi_1) = \frac{\theta_2}{\theta_1}$  的

近似关系。

## 金属矿床成因国际协会第五届讨论会

1978年8月，在美国犹他州一个山地疗养区，召开了金属矿床成因国际协会第五届讨论会。这样的会议每四年召开一次。前四次分别在捷克斯洛伐克(1963)、苏格兰(1967)、日本(1970)和保加利亚(1974)举行。

这次讨论会讨论的问题包括：(1)与大陆火山作用和次火山作用有关的金属矿床；(2)与板块构造——大陆边缘和岛弧有关的金属矿床；(3)沉积岩中的层状矿

床；(4)地球化学问题，特别注意到矿床与陆地和次火山活动的联系。

会上发表的报告表明，苏联在研究金属矿床、特别是金属矿床理论问题方面，具有较高的水平，居于领先地位。与此同时，在一些发达的资本主义国家(美国、日本、英国)中，采用了比较精确的仪器设备，如质谱计、探针、莱塞及其他分析仪器。美国在应用卫星象片和电子计算机寻找金属矿床方面，已经取得了一定的实际效果。

摘译自：《Разведка и охрана недр》，1978, No 12, СТР, 9~11