

用抛物线公式计算矿块体积时中截面面积的求法

安徽省化工地质队 吴南群

关于求平行断面间矿块体积的公式,在文献〔1〕和〔2〕中已作了详细的推导,并说明下述抛物线公式是一个普遍适用和精确度较高的公式:

$$V = \frac{L}{6} (S_a + 4S_m + S_b) \quad (1)$$

式中V是两平行断面间的矿块体积, S_a 和 S_b 是两平行断面的面积, L是它们的距离, S_m 是中截面面积。

当 S_a 和 S_b 是多边形时,中截面也是多边形。此时,它的面积除可用图解法求出外,还可用解析法得出。

由图1可知, S_m 的面积是梯形 $m_2m_3m'_3m'_2$ 、 $m_3m_4m'_4m'_3$ 、 $m_4m_5m'_5m'_4$ 之和减去梯形 $m_2m_1m'_1m'_2$ 及 $m_1m_5m'_5m'_1$,即:

$$\begin{aligned} 2S_m = & (x_{m2} + x_{m3})(y_{m2} - y_{m3}) + (x_{m3} + x_{m4})(y_{m3} - y_{m4}) \\ & + (x_{m4} + x_{m5})(y_{m4} - y_{m5}) - (x_{m2} + x_{m1})(y_{m2} - y_{m1}) \\ & - (x_{m1} + x_{m5})(y_{m1} - y_{m5}) \end{aligned}$$

整理后得

$$2S_m = \sum_{i=1}^n x_{mi} (y_{m,i-1} - y_{m,i+1}) \quad (2)$$

中截面 S_m 的边数(顶点数)是 S_a 和 S_b 的边数(顶点数)之和。由于这是一个闭合的多边

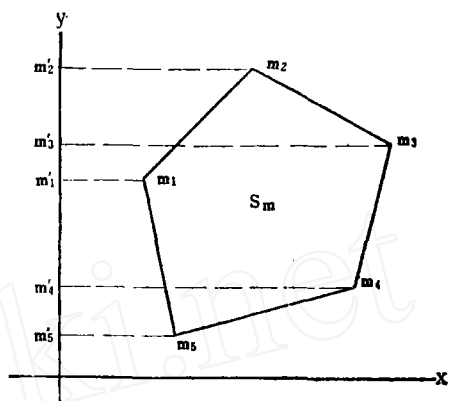


图1

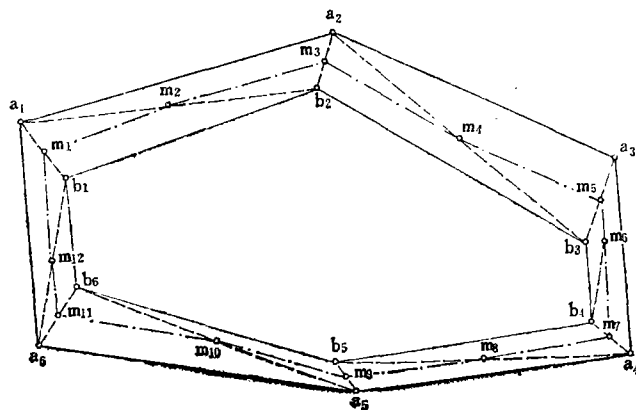


图2

形,所以在(2)中,当*i* = 1时,*i* - 1应取*n*;当*i* = *n*时,*i* + 1应取1。

图2是*S_a*、*S_b*和*S_m*在与它们相平行的一个平(剖)面上的投影。*S_a*和*S_b*上各对应顶点*a_i*(*x_{ai}*, *y_{ai}*)和*b_i*(*x_{bi}*, *y_{bi}*)联线的中点*m_i*就是中截面*S_m*的顶点。显然, *m_i*的坐标是:

$$\left. \begin{aligned} x_{m1} &= \frac{1}{2} (x_{a1} + x_{b1}), y_{m1} = \frac{1}{2} (y_{a1} + y_{b1}) \\ x_{m2} &= \frac{1}{2} (x_{a1} + x_{b2}), y_{m2} = \frac{1}{2} (y_{a1} + y_{b2}) \\ x_{m3} &= \frac{1}{2} (x_{a2} + x_{b2}), y_{m3} = \frac{1}{2} (y_{a2} + y_{b2}) \\ &\dots\dots\dots, \dots\dots\dots \\ x_{m, i2} &= \frac{1}{2} (x_{ai} + x_{bi}), y_{m, i2} = \frac{1}{2} (y_{ai} + y_{bi}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

将(3)代入(2)后得8*S_m*为以下诸项之和:

$$\left. \begin{aligned} &x_{a1}(y_{a6} - y_{a2}), 2x_{a1}(y_{b1} - y_{b2}), x_{b1}(y_{b6} - y_{b2}), 2x_{b1}(y_{a6} - y_{a1}), \\ &x_{a2}(y_{a1} - y_{a3}), 2x_{a2}(y_{b2} - y_{b3}), x_{b2}(y_{b1} - y_{b3}), 2x_{b2}(y_{a1} - y_{a2}), \\ &x_{a3}(y_{a2} - y_{a4}), 2x_{a3}(y_{b3} - y_{b4}), x_{b3}(y_{b2} - y_{b4}), 2x_{b3}(y_{a2} - y_{a3}), \\ &x_{a4}(y_{a3} - y_{a5}), 2x_{a4}(y_{b4} - y_{b5}), x_{b4}(y_{b3} - y_{b5}), 2x_{b4}(y_{a3} - y_{a4}), \\ &x_{a5}(y_{a4} - y_{a6}), 2x_{a5}(y_{b5} - y_{b6}), x_{b5}(y_{b4} - y_{b6}), 2x_{b5}(y_{a4} - y_{a5}), \\ &x_{a6}(y_{a5} - y_{a1}), 2x_{a6}(y_{b6} - y_{b1}), x_{b6}(y_{b5} - y_{b1}), 2x_{b6}(y_{a5} - y_{a6}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2S_a} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2M} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2S_b} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2N}$

稍作改变后, 8*S_m*也可写为以下诸项之和:

$$\left. \begin{aligned} &-y_{a1}(x_{a6} - x_{a2}), -2y_{a1}(x_{b1} - x_{b2}), -y_{b1}(x_{b6} - x_{b2}), -2y_{b1}(x_{a6} - x_{a1}), \\ &-y_{a2}(x_{a1} - x_{a3}), -2y_{a2}(x_{b2} - x_{b3}), -y_{b2}(x_{b1} - x_{b3}), -2y_{b2}(x_{a1} - x_{a2}), \\ &-y_{a3}(x_{a2} - x_{a4}), -2y_{a3}(x_{b3} - x_{b4}), -y_{b3}(x_{b2} - x_{b4}), -2y_{b3}(x_{a2} - x_{a3}), \\ &-y_{a4}(x_{a3} - x_{a5}), -2y_{a4}(x_{b4} - x_{b5}), -y_{b4}(x_{b3} - x_{b5}), -2y_{b4}(x_{a3} - x_{a4}), \\ &-y_{a5}(x_{a4} - x_{a6}), -2y_{a5}(x_{b5} - x_{b6}), -y_{b5}(x_{b4} - x_{b6}), -2y_{b5}(x_{a4} - x_{a5}), \\ &-y_{a6}(x_{a5} - x_{a1}), -2y_{a6}(x_{b6} - x_{b1}), -y_{b6}(x_{b5} - x_{b1}), -2y_{b6}(x_{a5} - x_{a6}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2S_a} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2N'} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2S_b} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2M'}$

令 $\Delta x_{ai} = x_{a,i-1} - x_{ai}$, $\Delta y_{ai} = y_{a,i-1} - y_{ai}$,

$\Delta x_{bi} = x_{bi} - x_{b,i+1}$, $\Delta y_{bi} = y_{bi} - y_{b,i+1}$

即有:

$$\left. \begin{aligned} M &= \sum x_a \Delta y_b \\ N &= \sum x_b \Delta y_a \\ -M' &= \sum y_b \Delta x_a \\ -N' &= \sum y_a \Delta x_b \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

显然,

$$M = M', N = N'$$

将(6)代入(4)或(5)后得:

$$S_m = \frac{1}{4} (S_a + S_b + M + N) \quad (7)$$

由此, 平行断面间矿块的体积可写为:

$$V = \frac{L}{6} (2S_a + 2S_b + M + N) = \frac{L}{3} (S_a + S_b) + \frac{L}{6} (M + N) \quad (8)$$

现在, 我们再用另一种方法来验证平行断面间矿块体积的公式。

在图3中, 四边形 $a_1a_2a_3a_4$ 与三角形 $b_1b_2b_3$ 是两个平行的矿体截面。联结其对应顶点后, 所得几何形体的侧面由若干三角形围接而成。由各对应顶点的中点所构成的多边形就是中截面 S_m 。中截面上任意点 p 与它的各个顶点相联后, 矿块可分割为以 p 为顶点的若干角锥体。同时, 中截面 S_m 也可分为几个三角形:

$$\triangle pm_1m_2 (S_{m1}), \triangle pm_2m_3 (S_{m2}), \triangle pm_3m_4 (S_{m3}), \triangle pm_4m_5 (S_{m4}), \triangle pm_5m_6 (S_{m5}), \triangle pm_6m_7 (S_{m6}), \triangle pm_7m_1 (S_{m7})$$

显然, $pa_1a_2a_3a_4$ 的体积等于

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} S_a = \frac{1}{6} S_a L$$

$pb_1b_2b_3$ 的体积则等于

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} S_b = \frac{1}{6} S_b L$$

不难确定 $pa_1a_2b_1$ 的体积等于

$$4 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} S_{m1} \right) = \frac{4}{6} S_{m1} L$$

同理, $pm_1m_2a_2$ 、 $pa_2a_3b_2$ 、 $pb_2b_3a_3$ 、 $pa_3a_4b_3$ 、 $pa_4a_1b_3$ 、 $pb_1b_3a_1$ 的体积分别等于:

$$\frac{4}{6} S_{m2} L, \frac{4}{6} S_{m3} L, \frac{4}{6} S_{m4} L, \frac{4}{6} S_{m5} L, \frac{4}{6} S_{m6} L, \frac{4}{6} S_{m7} L$$

$$\text{因为 } S_m = \sum_{i=1}^n S_{mi}$$

所以再次证明: 平行断面间直纹块段体积的通式为:

$$V = \frac{L}{6} (S_a + 4S_m + S_b)$$

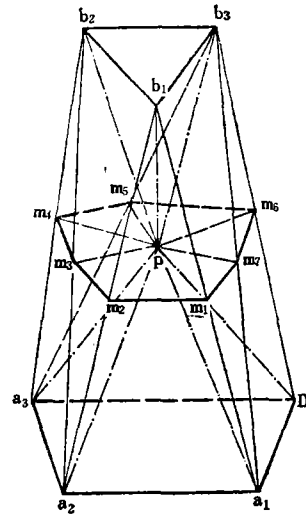


图 3

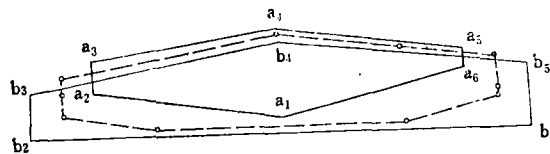


图 4

为了便于记忆和运用公式(6),可以将由若干三角形围成的矿块的侧面展开。这时, M 和 N 就是各个三角形顶点的横坐标(x_{ai} 或 x_{bi})与其底边两点纵坐标(y_{bi} 、 $y_{b,i+1}$ 或 $y_{a,i-1}$ 、 y_{ai})增量乘积的代数和。

[实例]图4中的两个多边形是矿块两端互相平行的断面 S_a 和 S_b 的投影。将矿块侧面展开

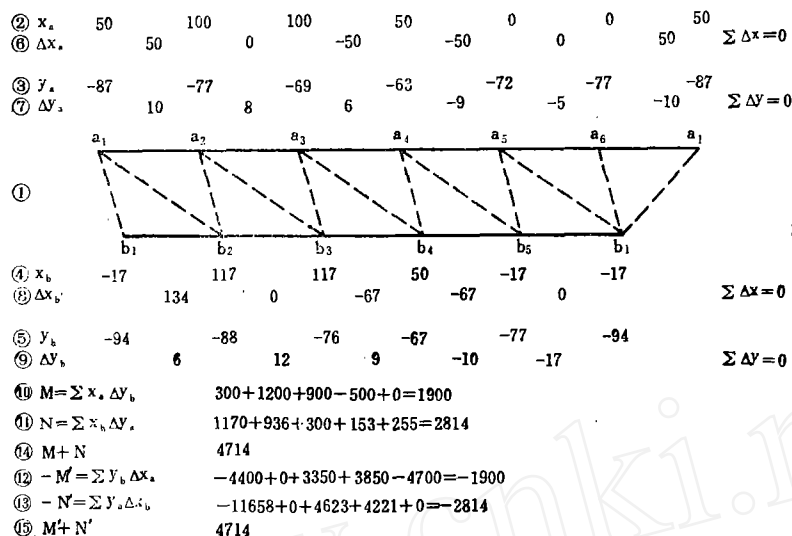


图5

如图5,并按该图左侧的序号写上 x_a 、 y_a 、 x_b 、 y_b 各点坐标及其增量 Δx_a 、 Δy_a 和 Δx_b 、 Δy_b 。经过计算得出:

$$\textcircled{10} M = \Sigma x_a \Delta y_b = 1900$$

$$\textcircled{11} N = \Sigma x_b \Delta y_a = 2814$$

$$\textcircled{12} -M' = \Sigma y_b \Delta x_a = -1900$$

$$\textcircled{13} -N' = \Sigma y_a \Delta x_b = -2814$$

由于 $M = M'$ 和 $N = N'$,证明计算过程无误。

已得知 $S_a = 1525$, $S_b = 2580$ 和 $L = 50$,即可按(7)求出矿中截面积。

$$S_m = \frac{1}{4} (S_1 + S_2 + M + N) = 8819/4 = 2205 \text{ (平方米)} \text{ 或直接按(8)求出矿块体积:}$$

$$V = \frac{L}{3} (S_a + S_b) + \frac{L}{6} (M + N) = 68417 + 39283 = 107700 \text{ (立方米)}$$

参 考 文 献

- [1] 文朴,《论平行断面间矿块的体积公式》,《地质科技》1976年第6期。
- [2] 《平行断面间的矿块体积》,《地质与勘探》1977年第1期。
- [3] 清华大学、北京大学,《计算方法》(上册),科学出版社,1975年8月版。
- [4] 吴南群,《用等积三角形法测算矿体面积》,《化工矿山技术》1977年第4期。

更 正

本刊1978年第6期第75页右栏第18行“凿井取卤始于秦”应为“凿井取卤始于战国末期”。