

为了有效利用资源和选定合理的设计方案,对相应设计单元的储量和品位必须有充分的了解。因此,恰当地应用取样点的数据来推断未知点,是提高储量计算精度的关键。但矿石品位的空间变化具有两重性,既有地质总体上的规律性,又有局部矿化的随机性,从而给单纯的地质法或一般的数理统计法造成了困难。在统计品位过程中,考虑取样点的地质环境,进而求得理想的估值,就是地质统计法所要解决的主要问题。一般应用最小方差法,一个块段的平均品位估值 $\hat{Z}_B$ 由下式求得:

$$\hat{Z}_B = \sum_{i=1}^n C_i Z_i \quad (1)$$

式中, Z_i 为第*i*个取样点的品位, C_i 为加权系数。

从式(1)可明显看出, $\hat{Z}_B$ 的估值精度取决于 C_i 的确定。一般令:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Z}_B - Z_i)^2 = \text{极小} \quad (2)$$

解线性方程组,求出各加权系数。克立格法也是最小方差法之一,其特点是从区域化变量概念出发,以由半方差组成的变差图为基础工具,在处理方差极小化的同时,还提出了一个附加条件:

$$\sum_{i=1}^n C_i = 1 \quad (3)$$

从而保证估值的无偏性。克立格法的优越性在于它既考虑了随机变化,又考虑了规律性变化。因此这种方法的近真估值比一般方法精确。另外,由于克立格法附加了式(3)条件,在解方程组时增加一个方程,在求条件

极值中引进一个常数 λ 。这个 λ 值使得克立格估值不仅能给出本身的方差,还能鉴别估值的偏畸程度。克立格法(地质统计法)是一个总称,具体分点克立格法、泛克立格法及析取克立格法等等。其具体估算方法及应用条件,详见有关克立格法的文章。

值得注意的是,如果矿体和围岩分界明显,克立格估值的误差是比较小的,但当矿体和围岩混生在一起时,克立格估值的方差往往比实际方差小,而工业矿体(指大于边界品位的,下同)所占的比例比实际情况大(见图1,表1)。

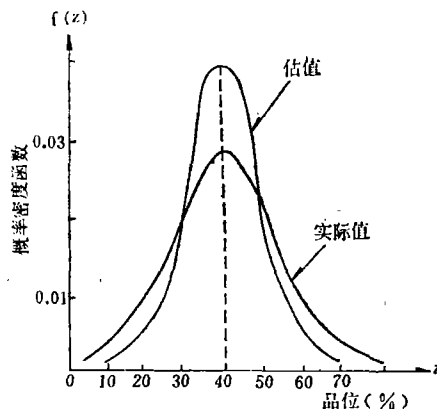


图1 概率分布图

表1

	实 际	估 值
分 布 律 (%)	正态	正态
平 均 品 位 (%)	40	40
标 准 差 (%)	15	10
边 界 品 位 (%)	30	30
工业矿石所占比例 (%)	75	84
工业矿石平均品位 (%)	46.4	42.9

图1表明,虽然矿块(包括达不到边界品位的,下同)的品位都服从正态分布,平均品位也一样,但二者的方差和工业矿量却不同,工业矿块的平均品位也有差异。由于这种情况,就会造成按克立格估值所设计的碎矿设备有余,而储矿设备不足。

为了解决这个问题, H. M. 帕克提出了条件概率分布法, 简称条件概率法。鉴于这种方法有它的实用性, 综合帕克的有关文章, 做如下介绍, 供实际工作时参考。为便于读者理解, 我们补充了一些公式(注*)。限于水平, 可能有错误, 望读者指正。

一 条件概率法的概念

所谓“条件概率法”就是在克立格法的基础上求出估算块段的品位分布函数, 然后算出工业矿量在块段中的条件概率值, 进而估算工业矿量的储量和平均品位。这种方法还用于复合矿床的储量计算。即以矿种为条件, 算出各类型矿石中工业矿量的条件概率, 然后求出各类矿石的合成条件概率分布。条件概率法实际上是克立格法的一个改善。

在正态分布的单一矿石类型的矿床, 应用条件概率法比较简单。而在分布不同的几种矿石类型的矿床, 情况要复杂的多。在后种情况下, 更能发挥条件概率法的优越性。

1. 单一正态分布矿床的计算方法

对单一正态分布矿床来说, 只要知道了它的品位分布的平均值和方差, 就算知道了分布的全部信息。

工业矿石的条件概率可由下式求得:

$$P(Z > C) = 1 - \phi\left(\frac{C - \hat{Z}}{\sigma}\right) \quad (4)^*$$

式中: C 为边界品位; $\phi\left(\frac{C - \hat{Z}}{\sigma}\right)$ 为标准正

态分布函数 $\phi(X)$ 当 $X = \frac{C - \hat{Z}}{\sigma}$ 时的函数

值, 它是小于边界品位 C 的条件概率 $P(Z < C)$; $\hat{Z}$ 为平均品位的估值; σ 为矿石品位的标准差。

$\phi(X)$ 值可通过查正态分布函数表得出。

只要知道各块段的条件概率 $P(Z_i > C)$, 矿床的工业矿石储量及品位就容易估算了:

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^n T_i P(Z_i > C) \quad (5)$$

式中: $\hat{T}$ 为矿床中工业矿石储量; T_i 为第 i 个块段的矿石量(包括小于边界品位的废石)。

$$\hat{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n T_i P(Z_i > C) \bar{Z}_{ic}}{\hat{T}} \quad (6)$$

式中: $\hat{Z}$ 为工业矿量品位; $\bar{Z}_{ic}$ 为第 i 块段中工业矿石的平均品位, 由下式求得:

$$\bar{Z}_{ic} = \hat{Z}_i + \frac{\sigma_i \exp\left[\frac{1}{2} \left(\frac{C - \hat{Z}_i}{\sigma_i}\right)^2\right]}{1 - \phi\left(\frac{C - \hat{Z}_i}{\sigma_i}\right)} \quad (7)$$

式中: $\hat{Z}_i$ 为第 i 块段的平均品位估值。

在这里顺便提一下, 应用条件概率法求得平均品位与一般克立格法求得的估值相比, 不仅可以减少偏差, 而且算出的工业矿石的条件概率在勘探及生产设计中还有其它用处, 这在后面举出的实例中要提到。

2. 在复合矿床中条件概率法的应用

在复合矿床中, 可按矿石类型分别进行克立格法估算。首先求出各类型矿石的平均品位和方差, 并按各自的分布函数求出条件概率, 然后求出合成条件概率, 进而计算矿床中工业矿石的储量和品位。这样一来便可以消除因混算造成的误差。这也是应用条件概率法的一个主要优越性。

在求某类型矿石的条件概率时, 首先要了解它的统计分布律。属于正态分布的, 可按式(4)求其工业矿石的条件概率, 如属非正态分布, 尚需经过转换函数化为正态分布函数, 然后按式(4)求其条件概率。在求工业矿石的合成条件概率之前, 还要知道各类型矿石在各块段中出现的概率。合成条件概率由下式求得:

$$P(Z > C) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(Z > C | A_i) \quad (8)$$

式中: $P(Z>C)$ 为块段中任一种矿石品位大于边界品位的合成概率; $P(A_i)$ 为块段中 A_i 型矿石出现的概率; $P(Z>C|A_i)$ 为在 A_i 型矿石出现条件下的大于边界品位的概率。

$P(A_i)$ 是一个先验概率, 帕克提出由下式估算:

$$\hat{P}(A_i) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \hat{P}_k(A_i) \quad (9)$$

式中: $\hat{P}_k(A_i)$ 为块段中选定的 4 个待估点中任一点 k 上 A_i 型矿石出现的概率。

4 个待估点的选法如图 2 所示, 在估算块段中心虚拟一个

面积为块段平面 $\frac{1}{4}$

的正方形, 而待估点的位置就放在这个正方形的 4 个角上, 即相当于放在平分块段平面的 4 个小正方形的中心上。

$\hat{P}_k(A_i)$ 由下式估算:

$$\hat{P}_k(A_i) = \sum_{j=1}^n C_j I_j \quad (10)$$

式中: I_j 为一个伪变量, 它与克立格法估值所涉及的 n 个样品有关, 当第 j 个样品为 A_i 型时, 取“1”, 当为非 A_i 型时, 取“0”; C_j 为克立格加权系数。

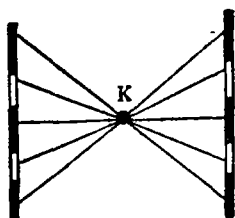


图 3

I_j 的求法 (见图 3): 帕克建议使用 10 个相邻样品, 相当于在两个相邻钻孔中各用 5 个样品。对 10 个取样点按待估点 k 以克立格法确定 10 个加权系数, 然后按矿石类型将 10 个样品点分组。属于 A_i 型的样品, I_j 取“1”。实际上对每种矿石来讲, 其出现的概率就是对应于它的样品所具有的加权系数的求和。

求出各种矿石的条件概率和出现概率后, 即可应用公式 (8) 求合成条件概率, 进而按式 (5)、(6) 计算矿床的储量和品位。

在复合矿床中应用条件概率法时还要涉及一些具体处置方法, 详见下面实例。

二 实例

美国缅因州养兔场镍矿 5 矿区有两期成矿作用: 早期形成浸染状镍矿, 品位服从对数正态分布; 晚期形成块状镍矿, 服从正态分布。按矿石类型, 在统计上有两个母体, 所以应用条件概率法时要按复合矿床处理, 既要求出各种矿石的条件概率, 又要求出两种矿石的合成条件概率。

帕克在这里进行条件概率法估算时, 尚未进行开采设计, 因而不知道开采单元的规格。为了适应设计时的变化, 他选用的估算块段规格是比较小的。

块段面积: 20×20 英尺²

块段高度: 10 英尺

为了掌握两种矿石的分布函数, 首先应用克立格法求出以下 5 个估值:

$\hat{Z}_B^M$ 一块段中块状矿石平均品位;

$\hat{Z}_B^D$ 一块段中浸染状矿石平均品位;

$\hat{\sigma}_Q^2$ 一块段中块状矿石品位分布方差;

$\hat{\sigma}_R^2$ 一块段中浸染状矿石品位分布方差;

差;

$\hat{P}$ ——块状矿石出现的概率。

作克立格法估算时, 要求按矿石类型分别进行。为此必须给样品确定矿石类型 (或为块状矿石, 或为浸染状矿石, 二者必居其一)。用事件关系的语言来说, 二者为互不相容事件 (即两种类型既不能同时出现, 也不能有第三种情况出现)。如果在同一样品中出现两种矿石类型, 则应按占优势者定矿石类型。实际上当一样品中同时出现两种矿石类型时, 往往难于判定那种占优势, 这时就要以样品品位为划分标准。帕克在这里定的区分矿石类型的品位界限为 3.775 磅/立方英尺 (60 公斤/立方米)。大于这个品位的, 定为块状矿石; 小于这个品位的, 定为浸染状矿石。因此, 当出现块状矿石的概率为 P 时, 浸染状矿石的出现概率为 $(1-P)$ 。

对一个块段来说, 为了求上述 5 个估

值, 首先要在块段中按图 2 形式选出 4 个待估点。然后以它们的克立格估值求出 5 种估值在块段中的数学期望值。

对 4 个待估点中的任一点 k 来讲, 为了求它的克立格估值, 需要涉及邻近的几个样品。将这几个样品按矿石类型分为两组: 有 n_D 个样品属浸染状矿石, 有 n_M 个样品属块状矿石。显然, $n_D + n_M = n$ 。这样就可以按两个统计母体分别对两种矿石品位进行克立格法估算。

$$\hat{Z}_k^M = \sum_{i=1}^{n_M} C_i Z_i^M \quad (11)$$

$$\hat{Z}_k^D = \sum_{j=1}^{n_D} C_j Z_j^D \quad (11)'$$

式中: $\hat{Z}_k^M$ 为待估点 k 的块状矿石品位估值, Z_i^M 是所涉及的第 i 个样品品位, C_i 为相应的克立格系数。式(11)' 意义一样, 上标 D 表示是对应于浸染状矿石的。

块段中两种矿石的平均品位由下式求得:

$$\hat{Z}_B^M = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \hat{Z}_k^M \quad (12)$$

$$\hat{Z}_B^D = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \hat{Z}_k^D \quad (12)$$

块段的平均品位(不分矿石类型, 下同)由下式求得:

$$\hat{Z}_B = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \left[(1 - \hat{P}_k) \hat{Z}_k^D + \hat{P}_k \hat{Z}_k^M \right] \quad (13)$$

式中: $\hat{P}_k$ 为待估点 k 块状矿石出现的概率, 由式(10)求得。

块段中各类型矿石品位分布的方差由下式求得:

$$\hat{\sigma}_Q^2 = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (\sigma_{kl}^M - \sum_{i=1}^{n_M} \sigma_{il}^M) \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}_R^2 = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (\sigma_{kl}^D - \sum_{j=1}^{n_D} \sigma_{jl}^D) \quad (14)'$$

式中: $\sigma_{kl}^M, \sigma_{kl}^D$ 为相应矿石类型待估点间的协方差, $\sigma_{il}^M, \sigma_{jl}^D$ 为相应矿石类型待估点 l 与所涉及的样品点 $i(j)$ 之间的协方差, 所有协方差均可由变差图上读出, 是已知数。

至此, 已经知道了两种矿石品位分布的全部信息。对块状矿石来说, 由于它服从正态分布, 通过已知参数 $\hat{Z}_B^M$ 和 $\hat{\sigma}_Q$, 应用式(4)查正态分布函数表, 即可求出它的工业矿石的条件概率 $P(Z^M > C)$ 的值。对浸染状矿石来说, 由于它服从对数正态分布, 在计算条件概率之前要进行一次分布函数的变换。

令 $u = \ln Z^D$, 可求出对数平均值 $\bar{U}$ 和对数方差 S^2 , 于是有:

$$P(Z^D > C) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln C - \bar{U}}{S}\right) \quad (15)$$

式中: $\Phi\left(\frac{\ln C - \bar{U}}{S}\right)$ 为标准正态分布函数

$\Phi(x)$ 当 $x = \frac{\ln C - \bar{U}}{S}$ 时的概率值, 可查表求得。

浸染状矿石的平均品位和方差与对数平均品位和方差有如下关系, 使用时注意变换。

$$\hat{Z}_B^D = \exp\left(\bar{U} + \frac{1}{2} S^2\right) \quad (16)$$

$$\sigma_R^2 = \exp(2\bar{U} + S^2) [\exp(S^2) - 1] \quad (17)$$

知道两种矿石的条件概率之后, 可由下式求出合成条件概率:

$$P(Z > C) = (1 - P)[P(Z^D > C)] + P[P(Z^M > C)] \quad (18)$$

按式(13)求出块段的平均品位之后, 为了计算这种估值的精度, 还要求以下式计算它本身的方差:

$$\sigma^2 = (1 - \hat{P}) \hat{\sigma}_R^2 + \hat{P} \hat{\sigma}_Q^2 + (\hat{P} - \hat{P}^2) (\hat{Z}_B^M - \hat{Z}_B^D)^2 \quad (19)$$

求出工业矿量的条件概率之后,即可进一步求工业矿量的平均品位,即:

$$E(Z_c) = E(Z/Z > C)$$

对服从正态分布的块状矿块,其工业矿量的平均品位由下式求得:

$$E(Z_c^M) = \hat{Z}_B^N + \frac{\frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{C - \hat{Z}_B^N}{\sigma_0}\right)^2\right]}{1 - \phi\left(\frac{C - \hat{Z}_B^M}{\sigma_0}\right)} \quad (20)$$

正中: $\phi\left(\frac{C - \hat{Z}_B^M}{\sigma_0}\right)$ 值可查正态分布函数表求得。

$$E(Z_c) = \frac{(1 - P)[P(Z^D > C)]E(Z_c^D) + P[P(Z^M > C)]E(Z_c^M)}{P(Z > C)} \quad (22)^*$$

求出各块段的条件合成概率 $P(Z > C)$ 及平均品位 $E(Z_c)$ 之后,可按式(5)、(6)计算矿区的储量和平均品位。

为了衡量条件概率法的效果,帕克在本矿区相应进行了单纯克立格法的估算,与实际情况的对比结果列入表2。

从表2中可以看出,无论是工业矿量的品位还是工业矿量所占的比例,条件概率法都比单纯的克立格法所得的估值更接近实际。

不同方法的品位比较 表2-1

方 法	含镍品位 (磅/立方英尺)				
	废石	工业矿量			总平均
		低值	高值	平均	
立 格	0.198	1.302	2.953	2.061	0.916
条 件 概 率	0.138	1.125	5.214	3.106	0.924
实 际	0.080	1.389	5.754	4.188	1.079

三 条件概率法在其它方面的应用

条件概率法除了可用于储量计算外,还可以用来确定追加勘探工程的位置,计算开采范围的合理界限及有关技术经济指标等等。例如,在补充勘探中,当某一地段已有稀疏钻孔控制后,为了进一步详勘,往往需

得。

对服从对数正态分布的浸染状矿石,其工业矿石的平均品位由下式求得:

$$E(Z_c^D) = \hat{Z}_B^D \frac{1 - \phi\left(\frac{\ln C - \bar{U} - S^2}{S}\right)}{1 - \phi\left(\frac{\ln C - \bar{U}}{S}\right)} \quad (21)$$

式中的 $\phi\left(\frac{\ln C - \bar{U} - S^2}{S}\right)$ 和 $\phi\left(\frac{\ln C - \bar{U}}{S}\right)$

均可查正态分布函数表求得。

块段中合成的工业矿量平均品位由下式求得:

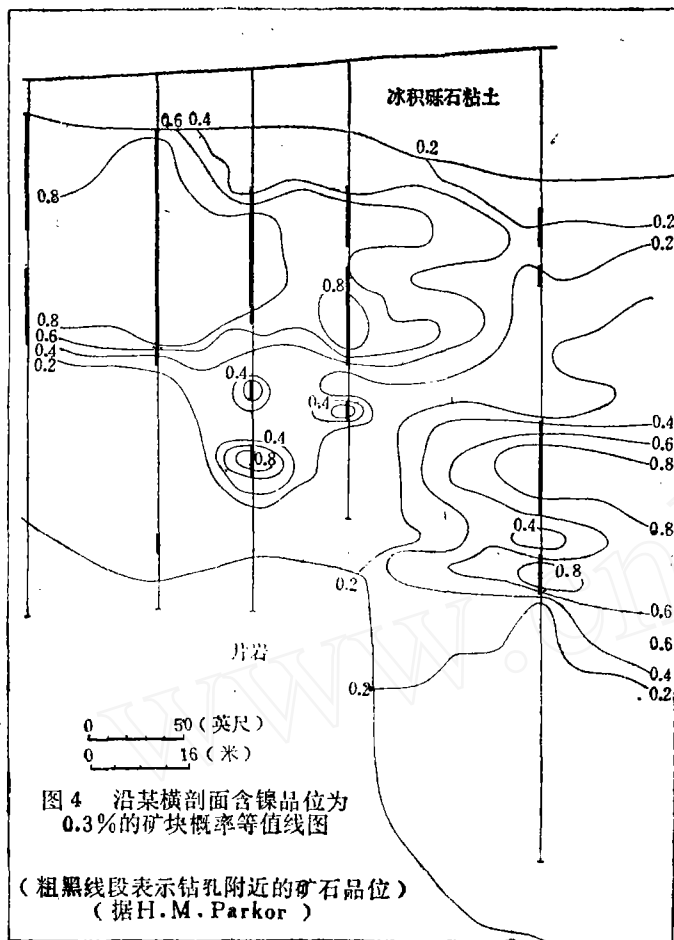
不同方法的矿岩比例比较 (体积百分比)

表2-2

方 法	废 石	工 业 矿 量		
		低值	高值	合计
克 立 格	66.3	18.2	15.5	33.7
条 件 概 率	73.5	13.6	12.9	26.5
实 际	75.5	8.8	15.7	24.5

要加密钻孔。这时如果知道各块段的工业矿量的条件概率(相当于我们习惯用的含矿系数,不过这里指的是概率表达形式),就很容易知道应该在哪些地方加密钻孔。根据各块段工业矿量条件概率的估算,可以作出条件概率的等值线图(图4)。从图4可以判定:在条件概率 $P(Z > C)$ 值很高 (>0.7) 或很低 (<0.3) 的地方只需追加少量钻孔验证,而在 $P(Z > C) = 0.3 \sim 0.7$ 的地方应集中加密钻孔。显然,这种判定方法与信息论概念有关,大概率事件容易肯定(易于判定为工业矿块),小概率事件易于否定(可以判定为废石块段),而中等概率事件则难于肯定或否定。

此外,应用条件概率法还可以分析边界品位和矿石中工业矿石与废石的体积比例关系,图5就是在5矿区分析边界品位的实例。从图中可以看出,在最小均方误差法的



估算中, 由于没有对块状矿石量的专门估计, 几乎把部分品位大于3.775磅/立方英尺的块状矿块看成品位很低的块段。而条件概率法所得出的结果则界于前者的估计与实际

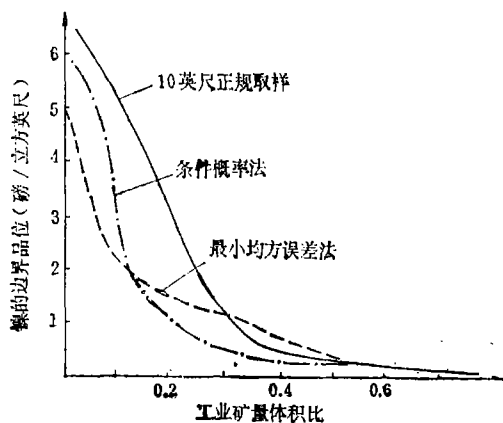


图5 在个别剖面上边界品位和工业矿量比的关系

情况之间。图5中三条曲线的总变化趋势很一致, 这在开采之前是无从道的。

在矿山的日常生产中, 掌握工业矿量的条件概率也很有用处, 因为这样就可以估计每天、每周和每月的矿石产量。

四 条件概率法的工作步骤

条件概率法的计算是在克立格法的基础上针对已知的统计母体进行的。因此, 在估算前, 必须建立克立格变差图, 以判定矿块的类型及其分布律。对一个具体矿床来说, 如果矿石类型及其品位分布已经确定, 变差图已经建立, 便可按以下几个步骤进行条件概率法的估算:

1. 确定估算单元的规格(为便于设计时应用, 以选小块段为好), 选择待估点(如图2所示), 求各待估点的克立格估值及出现各种矿石类型的概率(图3, 式10、11)。

2. 求各块段(即估算单元)中各类型矿石的出现概率(式9)、平均品位(式12)、品位分布方差(14)及其工业矿石的条件概率(式4、15)。

3. 求各块段的平均品位(即不分矿石类型的块段平均品位, 应用式13求得)及其估值的方差(式19)和合成工业矿石的条件概率(式18)。

4. 求各块段中工业矿石的平均品位(式20、21), 计算矿床的工业矿石储量及其平均品位(式5、6)。

5. 其它方面的应用。

参考文献

1. H.M. Parker (1977): 《Geostatistical determination of the size and grade of orebodies by computer methods》
2. H.M. Parker (1977): 《Application of geostatistical methods in exploration program design》
3. A.G. Journel (1977): 《Mining geostatistics》
4. H.M. Parker (1975): 《The geostatistical evaluation of ore reserves using conditional probability distributions: A case study for the area 5 prospect, Warren Maine, unpub. Ph.D. thesis, Stanford university》