

计算垂直二阶导数和求剩余异常的 简易方法

安徽省冶金地质勘探公司八〇八队 蒋慎君 王尔全

众所周知,垂直二阶导数对不同深度的质量(或“磁荷”)有分选性,可用来抑制区域背景影响,突出局部有用信息,达到找矿目的。本文导出了简便公式,对地面实测磁场进行二阶导数处理,并用实例说明求剩余异常的应用效果。

一 公式推导和量板的制作

地面测得的磁异常 Z 可用函数 $Z(x, y, 0)$ 表示,并可用马克劳林级数将它展开。为了简化,舍去了展开式中平方项以后的各项,则展开式变为:

$$\begin{aligned} Z(x, y, 0) &= Z(0) + \frac{1}{1!} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_0 y \right] + \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right)_0 x^2 \right. \\ &+ 2 \left[\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)_0 y^2 \right] + \left. \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)_0 y \right] \right] \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right)_0 x^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)_0 y^2 \right] \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

在观测平面中,对于半径为 r 的元周上各点磁场的平均值以极坐标形式表示为:

$$Z(r) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} Z(r \cos \alpha, r \sin \alpha, 0) d\alpha \dots\dots\dots (2)$$

为与实测 ΔZ 异常进行对比,在图11上也绘出了实测 ΔZ 的正等值线。由于实测 ΔZ 的点距较小, ΔZ 数据又未经过任何滤波,加之磁性岩层磁性不均匀,故 ΔZ 异常比较零乱。但从图11可以看出,II号异常是重、磁同沉异常。钻探地质填图表明:II号异常强值部分系由具有一定磁性的辉石岩引起的。II号异常向东北方向延伸部分则是闪长岩的反映。

I号异常经打钻验证为隐伏且具有较弱磁性、密度较高的细碧岩引起。

III号异常看来与磁异常关系不大,但该异常与化探次生晕的铜、钴异常位置和方向一致,初步可以判断此处有一个北东东走向的高密度地质体存在。

其中 $r \cos \alpha = x$, $r \sin \alpha = y$, 所以 $Z(x, y, 0) = Z(r \cos \alpha, r \sin \alpha, 0)$
把(1)代入(2):

$$\overline{Z(r)} = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \left\{ Z(0) + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_0 y^2 \right] \right\} d\alpha \dots\dots\dots (3)$$

对(3)式中各项分别进行积分:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(0) d\alpha = Z(0)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0 x d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_0 r \cos \alpha d\alpha = 0$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_0 y d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_0 r \sin \alpha d\alpha = 0$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\right)_0 xy d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}\right)_0 r^2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)_0 x^2 d\alpha &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)_0 r^2 \cos^2 \alpha d\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)_0 r^2 \left| \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right|_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)_0 r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_0 y^2 d\alpha &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_0 r^2 \sin^2 \alpha d\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_0 r^2 \left| \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right|_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_0 r^2 \end{aligned}$$

积分后各项相加得:

$$\overline{Z(r)} = Z(0) + \frac{r^2}{4} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (4)$$

地面观测的磁场满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

$$\therefore \overline{Z(r)} = Z(0) - \frac{r^2}{4} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right)_0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right)_0 = \frac{4}{r} \left[Z(0) - \overline{Z(r)} \right] \dots\dots\dots (6)$$

为了提高(6)式(即哈克公式)在应用中的精度,并使其更接近较繁的艾勒金斯垂直二阶导数公式(因后者分辨埋藏较深的矿体灵敏,而且误差传递系数小)。我们以a与 $\sqrt{2}a$ 代入(6)式,则得

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right)_0 &= \frac{4}{a^2} \left[Z(0) - \overline{Z(a)} \right] \\ \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right)_0 &= \frac{2}{a^2} \left[Z(0) - \overline{Z(\sqrt{2}a)} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

解方程组(7),最后得

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right)_0 = \frac{4}{3a^2} \left\{ 2Z(0) - \left[\overline{Z(a)} + \overline{Z(\sqrt{2}a)} \right] \right\} \dots\dots\dots (8)$$

根据(8)式制成图1所示的中心点双环量板。 $Z(0)$ —元环中心点的磁场值; $Z(a)$ —半径等于a的元环上四个点的磁场平均值; $\overline{Z(\sqrt{2}a)}$ —半径等于 $\sqrt{2}a$ 的元环上四个点的磁场平均值。

每环只取四个点参与平均是考虑到点数增多对减小传递误差并不明显,只徒然增加工作量。同时八个点和中心点组成方格网,使用方便。

这样,元环中心点O点沿着测线移动,

就可算出中心点在各个测点上的 $\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$ 值。

二 应用实例

图2为宁芜南段某铁矿床上的地面磁异常M14。外围曾验证过M14'磁异常(CK801)和G₃局部重力异常(CK403),验证结果均未见矿。后对M14磁异常进行区域场的徒手元滑改正,并进行了解释,布置了CK1和CK2孔。CK1孔见110米厚富矿,CK2孔仅见厚17米的薄矿层。为此,我们应用(8)式和图1

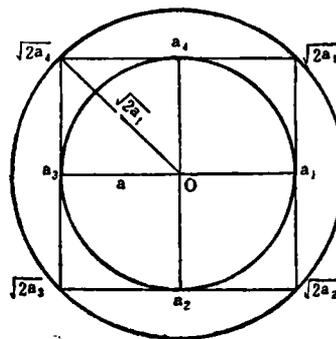


图1

所示的量板对M14异常作二阶导数处理,为确定该矿形态、规模提供定性依据。

为了便于对比,选取a=200米、500米、700米和1000米四种半径值量板进行计算,其结果见图3(图中单位为 $10^{-5}\gamma/\text{米}^2$)。

由于矿体埋藏较深,呈多层迭加,和斜磁化,而外围干扰异常又较强,致使二阶导数的零值线向外扩展,曲线不太规整。但总的看来能较好地滤出M14磁异常中的局部矿异常。尤其是当a=500米时(图3b与M14'浅

部干扰明显分离。介于0~100等值线可大致圈定矿体范围，这点已由钻探结果先后验证属实。在CK3孔见到100米厚的矿层；在CK8孔的相应部位也见到磁铁矿矿体，现仍在继续钻进中。早先打的CK1孔在浅部见有两层矿，所以在垂直二阶导数图上反映出迭加有一个400米等值线的小封闭圈。CK2孔显然处在接近0等值线位置，应该是在矿体边缘，矿体在此可能已尖灭。CK403孔位于0值线，没有见矿。CK7孔还未施工。

图4是借助电子计算机进行二维频率滤波得的垂直二阶导数平面等值线图。用手算的图3与它非常相似。这进一步说明，有时采用简单公式处理的结果，并不比用电子计算机进行复杂的数学处理结果逊色。

因为磁异常本身就不是理想的磁性体引起的，何况还有干扰和各种误差影响，以及反演的多解性使之复杂化。

上述垂直二阶导数公式在应用中正确选用a值是一个关键。根据通常磁测精度与点距，我们认为a以略小于需要了解的局部磁性的埋深为宜，或小于局部异常半极值宽度的二分之一。a过大，不符合马克劳林级数展开式舍去平方以后高次项的要求，算出的

$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$ 不能接近真值，而且引入外围干扰影响（见图3d）。如a过小，误差传递和浅部干扰增强，使图形支离破碎（图3a）。

二 求剩余异常 ΔZ

消除区域背景场求剩余异常（或局部异常）的方法很多，我们采用其与垂直二阶导

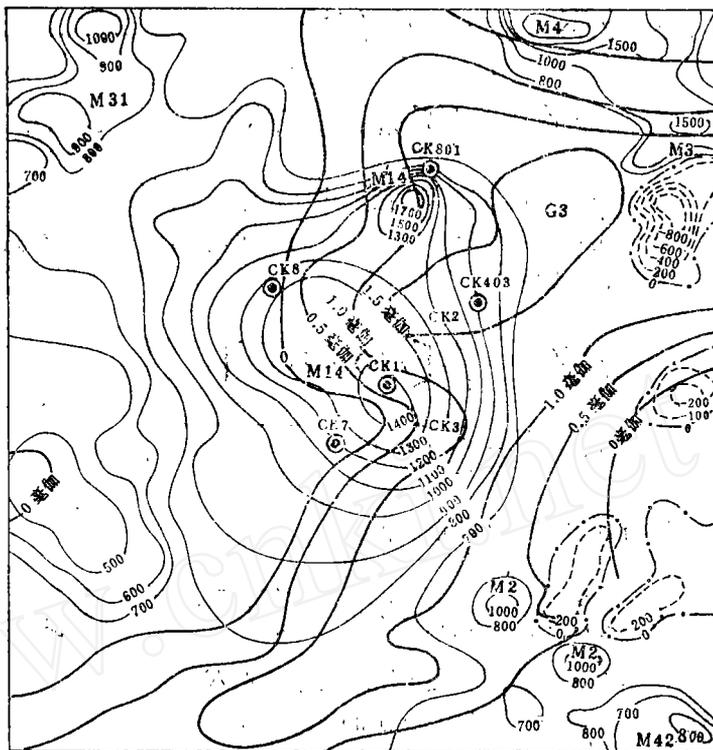


图2

数在特定条件下的相互关系式进行求解。

首先，假设在地面磁测平面图上某一较小半径范围内的区域异常呈简单的线性变化，则元周内各点磁场平均值即可当作中心点的区域磁异常值。为了计算简便起见，取半径为a和 $\sqrt{2}a$ 两个元环，以元环上和元环中心点的磁场值进行平均作为中心点区域磁场值，即为下式：

$$\frac{1}{2n+1} \left[Z(0) + nZ(a) + nZ(\sqrt{2}a) \right] \quad \dots \dots \dots (9)$$

而中心点剩余异常值 $\Delta Z(0)$ 就可写成：

$$\Delta Z(0) = Z(0) - \frac{1}{2n+1} \left[Z(0) + nZ(a) + nZ(\sqrt{2}a) \right] = \frac{n}{2n+1}$$

$$\left\{ 2Z(0) - \left[Z(a) + Z(\sqrt{2}a) \right] \right\} \quad (10)$$

同理，仍令 $n = 4$ ，则 (10) 式变为：

$$\Delta Z(0) = \frac{4}{9} \left\{ 2Z(0) - \left[\overline{Z(a)} + Z(\sqrt{2}a) \right] \right\} \dots\dots\dots (11)$$

(10)、(11) 式等号右边符号定义均同 (8) 式。

这样求剩余异常也可用图 1 的量板。

同样，我们对 M14 磁异常，作了 a 等于 200 米、500 米、700 米和 1000 米四种半径

值的计算。求得了剩余异常平面等值线图 (图 5)。

在求剩余异常中也存在着如何选择 a 值的问题。如取之过小，则因区域背景平均值中包含过多的局部异常成分而远小于真值。如图 5 a 中 $\Delta Z(0)_{\max} = 110\gamma$ 。同时浅部干扰与误差放大使 $\Delta Z(0)$ 发生畸变。相反，如 a 取之过大，则区域背景过滤不净，使 $\Delta Z(0)$ 偏大于实际局部磁性体在地面产生的磁场值。这也违背了在较少半径范围内区域背景呈简单线性变化的前提。另

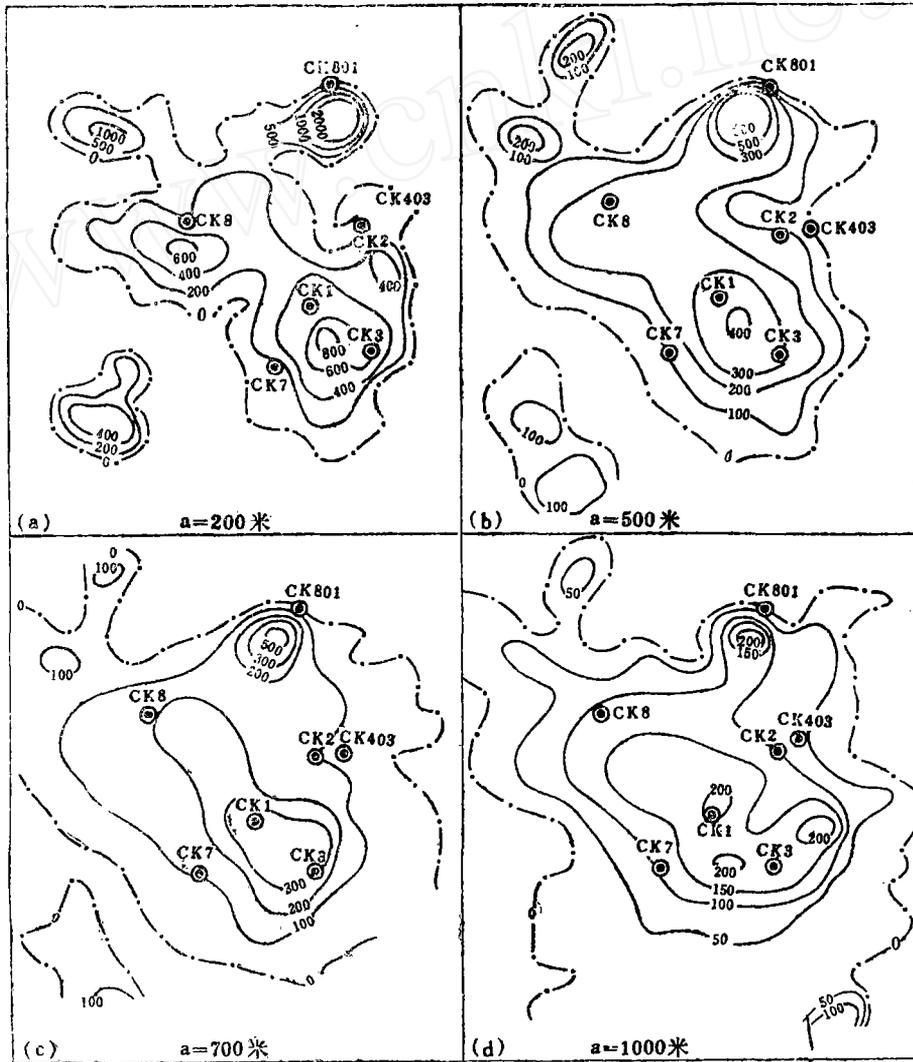
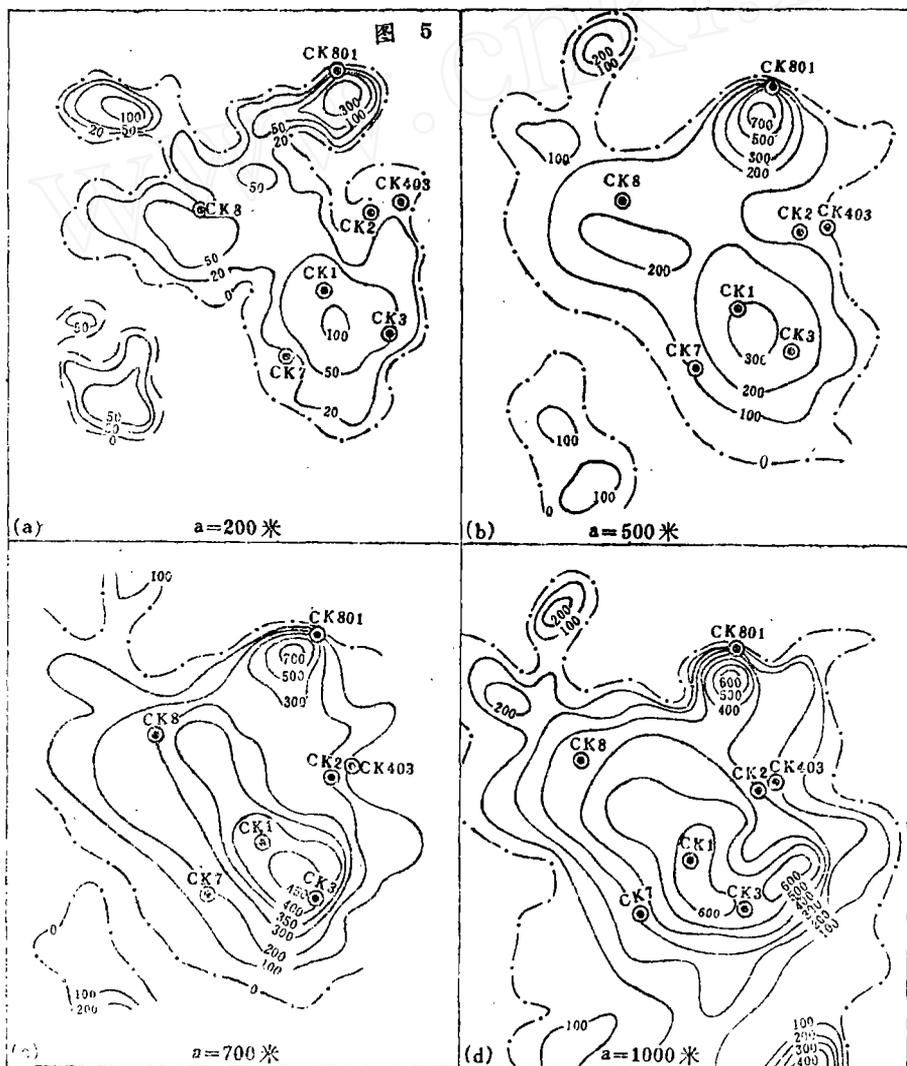
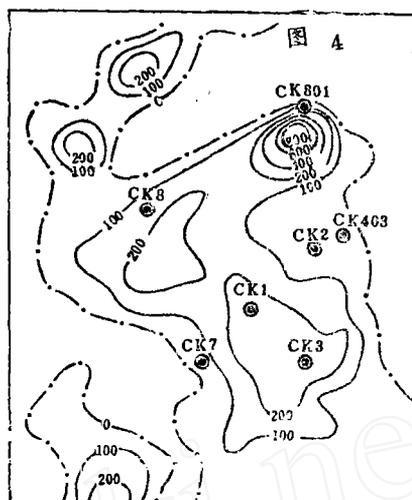


图 3

外，外围干扰引入环内，使 $\Delta Z(0)$ 边缘等值线发生变化。如图5a中 CK1孔东侧几个点是 M14' 异常在量板环上的影响，使等值线产生严重扭曲。M14' 的剩余异常降为 600 γ 左右是受其北部 M4 磁异常影响的原故。根据求得的剩余异常所作的分析计算，对照验证结果，认为a取埋深的1~2倍，或局部异常半极值的宽度较好。具体还要考虑区域场特点和周围干扰场的强弱及远近等问题。

a 值取得合适，即可将低缓矿异常从区域背景中分解出来。我们对 a = 1000米所求



得的剩余异常进行了定性和定量解释。

根据 $\Delta Z-\Delta H$ 参量图、负幂级数 n 、下延场的空间分布特征及判别式 $Z_{\max}(0, -h)/Z_{\max}(0, 0)$ 等方法分析计算结果得出, 异常体近似于一强磁性(磁铁矿)的薄板, 产状平缓、延深有限。最后还作了选择法反演计算(见图6)。推断解释和验证后所知的矿体形态及参数都十分接近。反演计算的理论曲线与原始曲线也很吻合。原始曲线右支的负值受外围强大干扰场(M_3 磁异常 $Z_{\max}=1500\gamma$, M_{4-6} 磁异常 $Z_{\max}=3\sim 5$ 千 γ)影响, 造成畸变, 给予消除。同时推测东北侧还有小盲矿层存在。垂直二阶异常数可能因矿层薄被外围干扰或误差掩盖, 因而不明显。

四 讨 论

上述方法的特点是:

1. 计算垂直二阶导数简便, 适于野外快速手算。
2. 求剩余异常比通常用六边形或元周平均法的精度高, 计算速度并不低。与处理区域场的其它较复杂的方法相比, 可以不必借

助于电子计算机。与某些粗略的方法(例如徒手元滑)相比, 不会由于过多的人为因素而引起大的失真。

3. 可采用不同 a 值来分选测区内不同深度磁性体, 便于综合分析研究。

4. 计算垂直二阶导数和剩余异常可用同一量板进行对点、统一计算。两个人两天可完成500个点的垂直二阶导数和剩余异常图。以100米 \times 100米测网计算, 即相当于两张4.4平方公里的平面等值线图。熟练后速度可更快。

5. 对航磁和重力异常同样适用。

另外还需说明几点:

1. 上述方法求剩余异常 ΔZ 与通常正演计算中习惯所称的剩余异常不同。

2. 剩余异常 ΔZ 与局部异常也不全等, 因剩余异常平面等值线图与局部磁性体(或矿体)在地面所生的异常平面等值线图不全一样。 ΔZ 周围会出现一些负值, 这是因为公式(10)在计算异常周围点时受“边缘”影响产生的。这区别于外围和浅部干扰和各种误差引起负值。此时, 对 ΔZ 进行定量解释时, 推断剖面要作严谨的处理。

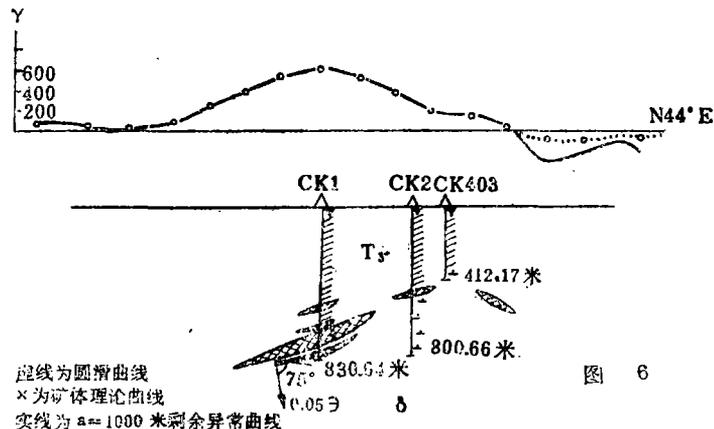


图 6

3. 对比公式(8)和(10)可发现, 当所取 a 值相同时有如下关系:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial Z^2} = \frac{4}{3a^2} \left(\frac{2n+1}{n} \right) \Delta Z \quad (12)$$

(12)式说明剩余异常等值线图与垂直二阶导数等值线图的极大值、极小值、零值线位置完全相同, 只是数值大小、水平梯度和单位不一样罢了。