

三度体外磁场三分量面元量板的计算方法

陕西冶金地质勘探公司 物探水文队生产科

三度体外磁场三分量面元量板（简称三度体量板）与桂林冶金地质研究所似二度体量板的数理推导类似，都以小球的磁场解析式为基础，其差别是先制成小扇形块的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个面元量板，算出三度体各截面的面元磁场，然后再沿走向进行近似积分。

三度体量板可以制成与似二度体量板完全相同的形式。为了解决计算点到不同距离的面元都能通用一套量板的问题，对量板相邻半径的环带间隔给予了不同环带系数。用

面元量板计算出三度体的各截面（一般只需要计算包括极大、极小和转折面等3~5个截面即可）面元磁场值后，可用任何近似积分方法计算出磁场的三个分量。

所介绍的这种方法虽仍较繁，但目前在物探野外工作中还没有简单实用的计算三度体磁场的手算方法，因此还是可用的。经过试算，对较简单的三度体，两个熟练的计算人员每日可以计算5~7个点的磁场三分量，相当于对一条野外实测剖面概略地算出

各种探矿手段的技术经济指标

勘探 手段	成本 元/米	效 率		定 员 人/台 班	用 途	施 工 条 件	设备及主要材料
		米/工 班	米/台 班				
坑探	100 至 120	0.2	1.5	7	可查明 矿体围 岩构造	作业条件较差，劳动 强度较大，需凿岩爆 破和出渣	需用矿山掘进设备、 炸药、雷管、导火线、 钎头、钎子钢、木材
坑内 钻探	15至30	1至2	8至6	3	可查明 矿体围 岩	设备轻便易于搬运， 作业条件较好，劳动 强度较低	需用钻机、 钻头、钻杆
探矿 深孔	8至15	4至6	8至12	2	可查明矿 体，可确 定岩性	设备轻便易于搬运， 作业条件较好，劳动 强度较低	可利用矿山深孔凿 岩设备，要消耗钎 头、钎子钢

坑道和采矿工程结合起来，实行“一坑多用”。但是，由于坑道成本较高，掘进速度较慢，作业条件比较困难，劳动强度比较大，探矿周期也比较长，而且常常和开采工作争掘进力量，所以如果不能“一坑多用”，应当尽量用坑内钻来代替坑道，实行“以钻代坑”。有些矿山由于大量使用坑内钻，万吨掘进比减少了130至150米，效果显著。最近投入使用的人造金刚石坑内钻机，操作方

便，效率较高。用这种钻机来探矿，可以进一步加快探矿速度和降低开采成本。

在开拓、采准和与之相结合的探矿工作基础上，充分发挥矿山劳动组织和凿岩设备的潜力，利用大量深孔采取的岩粉，可以对矿体实行加密控制和二次圈定。实践证明，岩心钻和岩粉钻与坑探配合使用，可以在“探边找盲”、探水、探老窿、探断层和指导巷道掘进中发挥很好的作用。

磁场正演曲线, 平均计算误差 $< n\%$ 。无论是在野外条件下初步探讨三度体磁场问题, 或是在推断解释过程中检查和控制电算的质量, 均是有益的。

一 面元量板的原理

设计算点 P 位于直角坐标系的原点 $(0,0,0)$, 球心位于 (x,y,z) 的磁性球体在 P 点的磁场三分量为

$$\left. \begin{aligned} \Delta X &= \frac{J_x(2x^2 - y^2 - z^2) + J_y(3xy) + J_z(3xz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \cdot V \\ \Delta Y &= \frac{J_x(3xy) + J_y(2y^2 - x^2 - z^2) + J_z(3yz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \cdot V \\ \Delta Z &= \frac{J_x(3xz) + J_y(3yz) + J_z(2z^2 - x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \cdot V \end{aligned} \right\} (1)$$

式中: J_x, J_y, J_z 为磁化强度 $\vec{J}$ 在坐标轴上的三个分量, x 为剖面方向, z 垂直向下。 ΔZ 为磁场垂直分量, ΔX 及 ΔY 分别为平行及垂直于剖面方向的水平分量, V 为球体体积。

根据 (1) 式列出小球的磁场解析式:

$$\left. \begin{aligned} d\Delta X &= \frac{J_x(2x^2 - y^2 - z^2) + J_y(3xy) + J_z(3xz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} dV \\ d\Delta Y &= \frac{J_x(3xy) + J_y(2y^2 - x^2 - z^2) + J_z(3yz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} dV \\ d\Delta Z &= \frac{J_x(3xz) + J_y(3yz) + J_z(2z^2 - x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} dV \end{aligned} \right\} (2)$$

将 (2) 式化为柱坐标, 令 θ 从 Z 轴起算, 逆时针旋转为正, 即 $y = y, x = r \sin\theta, z = r \cos\theta$, 经整理得

$$\left. \begin{aligned} d\Delta X &= \left\{ J_x \left(\frac{-3r^2 \cos 2\theta}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{r^2 - 2y^2}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) + J_y \left(\frac{3ry \sin\theta}{(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + J_z \left(\frac{3r^2 \sin 2\theta}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right\} dV \\ d\Delta Y &= \left\{ J_x \left(\frac{3ry \sin\theta}{(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) + J_y \left(\frac{-2(r^2 - 2y^2)}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) + J_z \left(\frac{3ry \cos\theta}{(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right\} dV \\ d\Delta Z &= \left\{ J_x \left(\frac{3r^2 \sin 2\theta}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) + J_y \left(\frac{3ry \cos\theta}{(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + J_z \left(\frac{3r^2 \cos 2\theta}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{r^2 - 2y^2}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right\} dV \end{aligned} \right\} (3)$$

推导到这里, 先对小球的截面 dS ($dV = dS dy$) 积分 (即对任意三度体的一个面元做计算), 且在运算中将 dS 化为小扇形面, 即 $dS = r \cdot dr \cdot d\theta$, 并写成下列形式:

$$\begin{aligned}\Delta X &= \int dy \int \int_{(s)} \left\{ J_x \left(\frac{-3r^3 \cos 2\theta}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{r^3 - 2ry^2}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + J_y \left(\frac{3r^2 y \sin \theta}{(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) + J_z \left(\frac{3r^3 \sin 2\theta}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right\} dr d\theta \\ \Delta Y &= \int dy \int \int_{(s)} \left\{ J_x \left(\frac{3r^2 y \sin \theta}{(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) + J_y \left(\frac{-2(r^3 - 2ry)}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + J_z \left(\frac{3r^2 y \cos \theta}{(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right\} dr d\theta \\ \Delta Z &= \int dy \int \int_{(s)} \left\{ J_x \left(\frac{3r^3 \sin 2\theta}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) + J_y \left(\frac{3r^2 y \cos \theta}{(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + J_z \left(\frac{3r^3 \cos 2\theta}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{r^3 - 2ry}{2(r^2 + y^2)^{5/2}} \right) \right\} dr d\theta\end{aligned}\quad (4)$$

当给予积分上下限, 且积分后经过整理,

$$\begin{aligned}\Delta X &= \sum_m^{\pm y} \sum_n \left\{ J_x \left[-f_1(r, y) \right]_{r_m^{[1]}}^{r_{m+1}^{[1]}} \sin 2\theta_1 \left| \theta_{n+1}^{[1]} \right|_{\theta_n^{[1]}} + f_2(r, y) \left| r_{m+1}^{[2]} \right|_{r_m^{[2]}} \theta_2 \left| \theta_{n+1}^{[2]} \right|_{\theta_n^{[2]}} \right. \\ &\quad \left. + J_y \left[f_3(r, y) \right]_{r_m^{[3]}}^{r_{m+1}^{[3]}} \sin(\theta_3 - 90^\circ) \left| \theta_{n+1}^{[3]} \right|_{\theta_n^{[3]}} \right] + J_z \left[f_1(r, y) \right. \\ &\quad \left. \left| r_{m+1}^{[1]} \right|_{r_m^{[1]}} \sin 2(\theta_1 - 45^\circ) \left| \theta_{n+1}^{[1]} \right|_{\theta_n^{[1]}} \right] \right\} dy \\ \Delta Y &= \sum_m^{\pm y} \sum_n \left\{ J_x \left[f_3(r, y) \right]_{r_m^{[3]}}^{r_{m+1}^{[3]}} \sin(\theta_3 - 90^\circ) \left| \theta_{n+1}^{[3]} \right|_{\theta_n^{[3]}} \right] + J_y \left[-2f_2(r, y) \right. \\ &\quad \left. \left| r_{m+1}^{[2]} \right|_{r_m^{[2]}} \theta_2 \left| \theta_{n+1}^{[2]} \right|_{\theta_n^{[2]}} \right] + J_z \left[f_3(r, y) \left| r_{m+1}^{[3]} \right|_{r_m^{[3]}} \sin \theta_3 \left| \theta_{n+1}^{[3]} \right|_{\theta_n^{[3]}} \right] \right\} dy \\ \Delta Z &= \sum_m^{\pm y} \sum_n \left\{ J_x \left[f_1(r, y) \right]_{r_m^{[1]}}^{r_{m+1}^{[1]}} \sin 2(\theta_1 - 45^\circ) \left| \theta_{n+1}^{[1]} \right|_{\theta_n^{[1]}} \right] +\end{aligned}\quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ J_y \left[f_3(r, y) \right]_{r_m^{(3)}}^{r_{m+1}^{(3)}} \sin \theta_3 \left| \theta_{n+1}^{(3)} \right|_{\theta_n^{(3)}} \Bigg] + J_z \left[f_1(r, y) \right. \\ &\left. \left| \sin 2\theta_1 \right|_{\theta_n^{(1)}}^{\theta_{n+1}^{(1)}} \left| \theta_{n+1}^{(1)} \right|_{\theta_n^{(1)}} + f_2(r, y) \right]_{r_m^{(2)}}^{r_{m+1}^{(2)}} \theta_2 \left| \theta_{n+1}^{(2)} \right|_{\theta_n^{(2)}} \Bigg] dy \end{aligned} \right\}$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} f_1(r, y) &= \frac{-3r^2 - 2y^2}{4(y^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{-3 - 2(y^2/r^2)}{[1 + (y^2/r^2)]^{3/2}} \right\} \frac{1}{r} \\ f_2(r, y) &= \frac{-r^2}{2(y^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{[1 + (y^2/r^2)]^{3/2}} \right\} \frac{1}{r} \\ f_3(r, y) &= \frac{r^3}{y(y^2 + r^2)^{3/2}} = \left\{ \frac{1}{(y/r)[1 + (y^2/r^2)]^{3/2}} \right\} \frac{1}{r} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

以及(5)式可以写成下列简式:

$$\Delta X = \int_0^{\pm y} \Delta X_y dy, \Delta Y = \int_0^{\pm y} \Delta Y_y dy, \Delta Z = \int_0^{\pm y} \Delta Z_y dy \quad (7)$$

式中 $\Delta X_y dy$, $\Delta Y_y dy$, $\Delta Z_y dy$ 称为面元磁场三分量。

(5)式中, 45° 及 90° 为固定的常数; J_x 、 J_y 、 J_z 针对具体计算对象也是常数, 因此, 式中只包含下面三项基本函数:

$$\left. \begin{aligned} &f_1(r, y) \left| \sin 2\theta_1 \right|_{\theta_n^{(1)}}^{\theta_{n+1}^{(1)}}, f_2(r, y) \left| \theta_2 \right|_{\theta_n^{(2)}}^{\theta_{n+1}^{(2)}}, f_3(r, y) \\ &\left| \sin \theta_3 \right|_{\theta_n^{(3)}}^{\theta_{n+1}^{(3)}} \end{aligned} \right\}$$

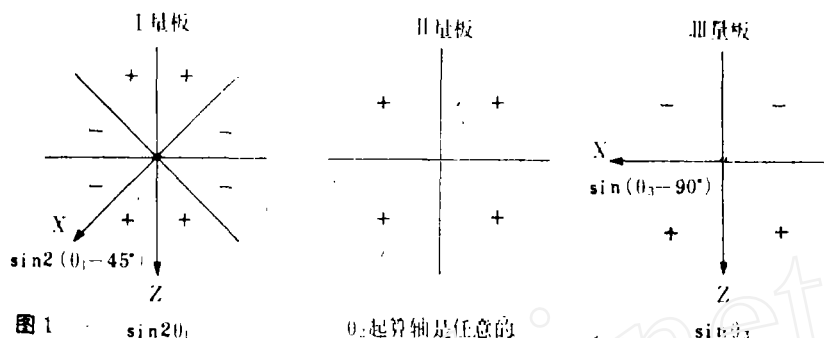
如果 J_x 、 J_y 、 J_z 分别采用 100×10^{-5} CGSM, 相邻射线形成的角度间隔采用:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\theta_1 \left| \theta_{n+1}^{(1)} \right|_{\theta_n^{(1)}} &= 0.125, \theta_2 \left| \theta_{n+1}^{(2)} \right|_{\theta_n^{(2)}} = \pi/6, \sin \theta_3 \left| \theta_{n+1}^{(3)} \right|_{\theta_n^{(3)}} = 0.125 \end{aligned} \right\}$$

相邻半径之间形成的环带间隔采用:

$$\left. \begin{aligned} f_1(r, y) \left| \right|_{r_m^{(1)}}^{r_{m+1}^{(1)}} &= 0.08, f_2(r, y) \left| \right|_{r_m^{(2)}}^{r_{m+1}^{(2)}} = 0.16/\pi, f_3(r, y) \left| \right|_{r_m^{(3)}}^{r_{m+1}^{(3)}} = 0.08, \end{aligned} \right\}$$

则每个扇形面在计算点(0,0,0)处所产生的磁场均为 1γ 。这就构成了I、II、III三个量板。
各量板的 θ 起算轴名称及各象限的正负号见图1。



绘制量板射线各角度的数据列于附表1。

二 量板的环带系数

关于环带间隔问题, 当 y 为某一常数条件下, 可以计算出 $r_m, r_{m+1}, \dots$ 系列, 但对具体应用, 即使对于一个计算点也必须绘制所需要的相当多的不同 y 值的量板, 不利于实用, 因此, 选择 r_{m+1}/r_m 为指定的常数而计算出各环带间隔的系数(简称环带系数)。我们为了便于和过去二度体方法的计算结果对比以及继续使用已制成的似二度体量板, 仍令I、II、III三张量板的相邻半径均为 $r_{m+1}/r_m = e^{0.08}$ 。绘制量板时, 各半径 r_m 的环数要用 $m = \lg r_m / 0.08 \lg e$ 来编号。即对距量板中心为1厘米的环命名为0环, 向中心为-1, -2, -3...环, 向外为1, 2, 3...环; 且从0环起每10环绘成醒目的粗线, 这样做可以便于使用环带系数。

具体的环带系数 δ 应用下式计算:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{f_1(r, y) \Big|_{r_m}^{r_{m+1}}}{0.08} = 3.125 \left\{ \left\{ \frac{-3 - 2(y^2/r^2)}{[1 + (y^2/r^2)]^{3/2}} \right\} \frac{1}{r} \right\} \Big|_{r_m}^{r_{m+1}} \\ \delta_2 &= \frac{f_2(r, y) \Big|_{r_m}^{r_{m+1}}}{0.16/\pi} = 3.125\pi \left\{ \left\{ \frac{-1}{[1 + (y^2/r^2)]^{3/2}} \right\} \frac{1}{r} \right\} \Big|_{r_m}^{r_{m+1}} \\ \delta_3 &= \frac{f_3(r, y) \Big|_{r_m}^{r_{m+1}}}{0.08} = 12.5 \left\{ \left\{ \frac{1}{(y/r)[1 + (y^2/r^2)]^{3/2}} \right\} \frac{1}{r} \right\} \Big|_{r_m}^{r_{m+1}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由(8)式可以直接看到当对 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 分别乘以 y , 则 $y\delta_1, y\delta_2, y\delta_3$ 都化成为只有一个变数($\frac{y}{r_m}$)的函数; 且 $\lg(y/r_m) = \lg y + \lg(1/r_m)$; 所以, 可以制成 $y\delta \sim \lg 1/r_m$ 的单对数列线图, 对不同 y 的各环带系数, 用一张相应的透明量尺在列线图上沿 $\lg(1/r_m)$ 轴平移 $\lg y$ 读取各环带的 $y\delta$, 再除以 y 即可(见图2)。

当 $y = 0$, 即计算点与截面(面元)的 y 座标相同时, 环带系数 δ (8式)具有特殊情况, 各个环带系数分别为固定值, 不再随 y 的改变而变化, 命名为 δ_0 , 即:

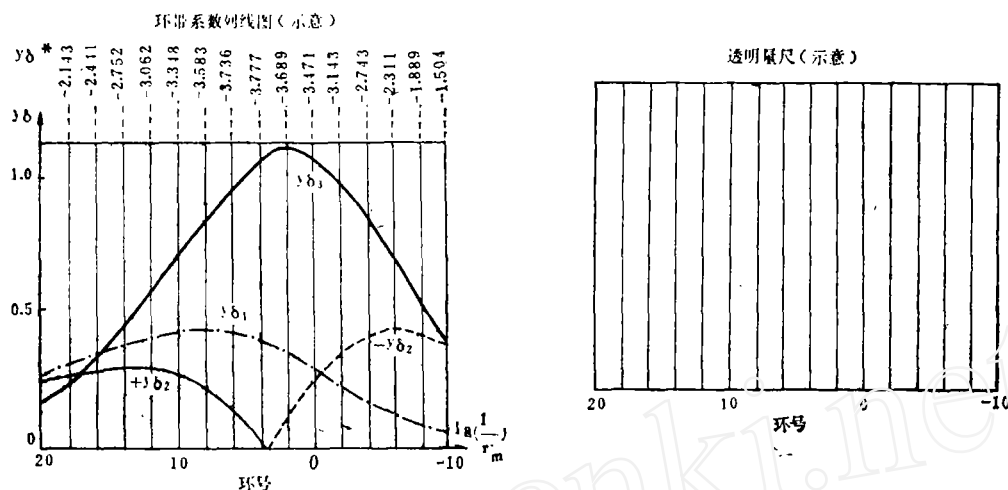


图 2

$$\left. \begin{aligned} \delta_{01} &= 3.125[(-3/r_{m+1}) + (3/r_m)] = 9.375[1 - (1/e^{2 \times 0.08})] (1/r_m) \\ \delta_{02} &= 3.125[(-1/r_{m+1}) + (1/r_m)] = 3.125\pi[1 - (1/e^{2 \times 0.08})] (1/r_m) \\ \delta_{03} &= 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

(9) 式中应用 $e^{2 \times 0.08}$ 而不应用 $e^{0.08}$ 的含义见以后关于双环环带系数的说明。

当计算点位于磁性体端点以外的旁侧剖面上, 有时磁性体的截面投影可能全部或部分处于量板的中心环位置, 需要应用中心环的环值, 命名为 δ^* , 这是环带系数 δ (8式) 当 $r_m = 0$ 的又一种特殊情况:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^* &= \frac{f_1(r, y) \Big|_0^{r_{m+1}}}{0.08} = \frac{f_1(r_{m+1}, y)}{0.08} + \frac{6.25}{y} \\ \delta_2^* &= \frac{f_2(r, y) \Big|_0^{r_{m+1}}}{0.16/\pi} = \frac{f_2(r_{m+1}, y)}{0.16/\pi} \\ \delta_3^* &= \frac{f_3(r, y) \Big|_0^{r_{m+1}}}{0.08} = \frac{f_3(r_{m+1}, y)}{0.08} \end{aligned} \right\} (10)$$

中心环, 一般指量板中心到 0 环, 但对具体计算, 根据需要中心环值可由量板中心计算到任意一环。应当注意到, 环带系数 δ_1 、 δ_2 、 δ_3 分别是相邻环带 δ_1^* 、 δ_2^* 、 δ_3^* 的差值。因此, 用制作环带系数列线图的同样办法, 把 $y\delta_1^*$ 、 $y\delta_2^*$ 、 $y\delta_3^*$ 的数值写在环带系数列线图顶端的相应环号的位置上(图 2), 用类似读取环带系数 $y\delta$ 的方法, 读取 $y\delta^*$ 再除以 y 即可应用。

当磁性体截面投影占据量板中心环全圆面积时, I 量板的全圆中心环值为 $32 \times \delta_1^*$, 而 I、II 量板的全圆中心环值之和由于量板各象限的正负号互相抵消而等于零, 因而应用全圆中心环值做计算可以节省计算工作量。但磁性体截面投影只占据局部中心环的面积时, 由于靠近

量板中心附近的中心环值在中心环内非线性变化比较剧烈, 在这范围内用估读面积做计算会产生很大误差。这时, 宜将中心环内局部的磁性体截面投影以放大比例尺的办法退出 0 环以外做计算; 所得的量板值与用原中心环以外的截面投影计算的量板值叠加在一起。

为了节省计算工作量, 我们对于环带系数 δ 、 δ_0 、 δ^* 均给出 $r_{m+1}/r_m = e^2 \times 0.08$ 的值, 称为双环带系数; 其含义为将量板的 0 ~ 2、2 ~ 4、4 ~ 6、……环分别作为一个环带计算; 而 1、3、5……环作为半个环带的界线。

当令 $\frac{d\delta}{d(1/r_m)} = 0$ 及 $\delta_2 = 0$, 可求出各

量板双环带系数曲线上与极大值、极小值、零值等特征点对应的 $\lg(1/r_m)$ 值;

I 量板: $[\lg(1/r_m)]\delta_1(\text{极大})$

$$= \lg \left(\frac{e^{0.32} - e^{0.256}}{e^{0.256} - 1} \right)^{1/2} = 1.7331$$

II 量板: $[\lg(1/r_m)]\delta_2=0$

$$= \lg \left(\frac{e^{0.32} - e^{0.64/3}}{e^{0.64/3} - 1} \right)^{1/2} = 1.8839$$

$$\text{解} \quad \frac{e^{0.64} (e^{0.64} r_m^2 - 2)}{r_m^2 - 2}$$

$$= \left(\frac{e^{0.64} r_m^2 + 1}{r_m^2 + 1} \right)^{5/2}, \text{ 得出}$$

$$[\lg(1/r_m)]\delta_2(\text{极大}) = 1.5428$$

$$[\lg(1/r_m)]\delta_2(\text{极小}) = 0.2252$$

III 量板: $[\lg(1/r_m)]\delta_3(\text{极大})$

$$= \lg \left(\frac{e^{0.32} - e^{0.192}}{e^{0.192} - 1} \right)^{1/2} = 1.9465$$

已计算出的双环带系数 δ 、 δ_0 、 δ^* 及其特征点数据列于附表 2。

三 量板的使用

当对任意三度体的若干截面 $S_{Y_1}S_{Y_2}S_{Y_3}$ 中的一个截面 S_{Y_i} 用量板计算其单位长度的面元磁场值 $\Delta X_{Y_i}\Delta Y_{Y_i}\Delta Z_{Y_i}$ 时, 使计算点分别与 I、II III 量板的中心重合, 截面 S_{Y_i} 占据量板某一环带中的扇形块数记为 n_i^Z, n_i^X , n_2 、 n_3^Z 、 n_3^X ; 其相应的环带系数为 δ_1 (或 δ_{01} , δ_1^*), δ_2 (或 δ_{02} , δ_2^*), δ_3 (或 δ_{03} , δ_3^*), 则全截面的量板值为:

$$\left. \begin{aligned} n_I^Z &= \sum n_i^Z \delta_i, & n_{II} &= \sum n_2 \delta_2, & n_{III}^Z &= \sum n_3^Z \delta_3, \\ n_I^X &= \sum n_i^X \delta_i, & & & n_{III}^X &= \sum n_3^X \delta_3. \end{aligned} \right\} (11)$$

(11) 式中各符号的上角 Z 及 X 表示量板的 Z 轴及 X 轴分别在平行磁性体截面的垂直轴 z 的条件下, 所读取的数值; 下角 I (或 1)、II (或 2)、III (或 3) 均表示

所使用的量板编号名称。

将 (11) 式代回 (5) 式, 计算出 y_i 处的磁场三分量:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_{y_i} &= J_x(-n_I^Z + n_{II}) + J_y(\pm n_{III}^X) + J_z(n_I^X) \\ \Delta Y_{y_i} &= J_x(\pm n_{III}^X) + J_y(-2n_{II}) + J_z(\pm n_{III}^Z) \\ \Delta Z_{y_i} &= J_x(n_I^X) + J_y(\pm n_{III}^Z) + J_z(n_I^Z + n_{II}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

计算出一系列 ΔX_{y_i} 、 ΔY_{y_i} 、 ΔZ_{y_i} 值以后，再用(7)式计算。

关于(7)式的运算，可根据已选用的各个截面分布情况以及面元磁场曲线特征，采用任何适用的近似积分方法（如抛物线法及图算法等）求出三度体的磁场值。

(12)式中 $(\pm n_{III}^Z)$ 及 $(\pm n_{III}^X)$ 的正负号可由(7)式中的积分上限 $(\pm y)$ 来确定。由于(8)式中 $f_1(r, y)$ 及 $f_2(r, y)$ 都是 y 的偶函数，积分后都是正号；而 $f_3(r, y)$ 是 y 的奇函数，对 $(+y)$ 及 $(-y)$ 方向的积分得到各自相同的正负号。即截面位于计算点的正向 $(+y)$ 取正号，截面位于计算点的负向 $(-y)$ 取负号。

为了节省计算工作量，在用环带系数列线图读取各个环带的 y_i 倍环带系数 $y_i\delta$ 后，可先直接应用 $y_i\delta$ 数值计算出 y_i 倍单位长度的面元磁场值 $y_i\Delta X_{y_i}$ 、 $y_i\Delta Y_{y_i}$ 、 $y_i\Delta Z_{y_i}$ ；以及为了积累图算法近似积分的图象资料，使磁场的概念形象化，有利于做好推断解释，图算的图形横轴宜一律取一个单位，即横轴座标应用 $(y_i - y_0)/(y_n - y_0)$ 。这里 y_n 及 y_0 分别为计算点 $(0, 0, 0)$ 至磁性体的右端点(正向)和左端点(负向)的 y 轴座标， $(y_n - y_0)$ 即为磁性体沿 y 轴的全长。因此，在绘制积分图象前，对各面元的 $y_i\Delta X_{y_i}$ 、 $y_i\Delta Y_{y_i}$ 、 $y_i\Delta Z_{y_i}$ 均分别乘以

$$\frac{y_n - y_0}{|y_i|}, \text{ 当计算点 } P \text{ 不是原点时应乘以 } \frac{y_n - y_0}{|y_i - y_p|}.$$

以上所涉及的 y_0 、 y_i 、 y_n 等数值必须与磁性体截面的比例尺关系一致。例如：磁性体沿 y 轴的全长1000米，绘制1/10000比例尺的截面图形，则 $(y_n - y_0) = 1000 \text{ 米} \times 100 \text{ 厘米/米} \times 1/10000 = 10 \text{ 厘米}$ 。

顺便指出，从(12)式的原理和结构来看，其实质就是面元量板形式的泊松公式，已将这一理论性的泊松公式转化为实用的通用公式。当对 ΔX_{y_i} 、 ΔY_{y_i} 、 ΔZ_{y_i} 中的 J_x 、 J_y 、 J_z 各项分别地单独做近似积分，可以得到0.01倍的引力位二次导数 W_{xx} 、 W_{yy} 、 W_{zz} 、 W_{xy} 、 W_{xz} 、 W_{yz} 。因此，这种量板的计算方法对于重磁计算工作，以及稍加补充后对于体内磁场和研究三度体消磁系数（或磁化强度）等都可应用。

四 算例

现扼要介绍两个算例来说明用这种量板计算三度体磁场三分量的方法。

例1 设：对 (x'', y'', z'') 座标系统中一个体对角线为2的磁性立方体，用矩形解析式计算出P点的磁场三分量 $\Delta X''$ 、 $\Delta Y''$ 、 $\Delta Z''$ ，经过转换座标在 (x, y, z) 座标系统中形成体对角线直立（平行 z 轴），顶端一棱指向 $(-x)$ 代表了较复杂的三度体（图3），其磁场三分量 ΔX 、 ΔY 、 ΔZ 和有关数据列于表1，作为理论数据。

然后，在 (x, y, z) 座标系统中选用 $y_0 \sim y_6$ 等6个截面，其中 y_0 及 y_6 两个截面面积为零不用计算， y_2 截面面积最大；对 $y_1 \sim y_4$ 等四个截面用量板算出单位长度的面元磁场（表2）并做出图4。

表 1

座 标 名 称	x	y	z	x''	y''	z''
A	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
B	0.4714	-0.8165	0.6667	1.1547	0.0000	0.0000
C	0.9428	0.0000	1.3333	1.1547	1.1547	0.0000
D	0.4714	0.8165	0.6667	0.0000	1.1547	0.0000
E	-0.9428	0.0000	0.6667	0.0000	0.0000	1.1547
F	-0.4714	-0.8165	1.3333	1.1547	0.0000	1.1547
G	0.0000	0.0000	2.0000	1.1547	1.1547	1.1547
H	-0.4714	0.8165	1.3333	0.0000	1.1547	1.1547
P	1.3000	1.3000	1.0000	0.1878	2.0240	-0.4840
$J \times 10^{-5} \text{CGSM}$	35.35	35.35	86.60	39.40	89.30	21.16
磁场三分量 (γ)	$\Delta X = 18.25$	$\Delta Y = 17.80$	$\Delta Z = -21.40$	$\Delta X'' = -17.49$	$\Delta Y'' = 7.68$	$\Delta Z'' = -27.25$

$$x = (x'' \cos 45^\circ + y'' \sin 45^\circ) \cos 54^\circ 44' 08'' - z'' \sin 54^\circ 44' 08''$$

$$y = y'' \cos 45^\circ - x'' \sin 45^\circ$$

$$z = z'' \cos 54^\circ 44' 08'' + (x'' \cos 45^\circ + y'' \sin 45^\circ) \sin 54^\circ 44' 08''$$

表 2

$y_i - y_p$ 名 称	0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	-2.1165	-1.7082	-1.3000	-0.8918	-0.7557	-0.4835
$\Delta X y_i (\gamma)$	0.00	7.60	23.5	33.6	31.4	0.00
$\Delta Y y_i (\gamma)$	0.00	12.80	30.6	25.1	17.40	0.00
$\Delta Z y_i (\gamma)$	0.00	-11.80	-39.2	-32.6	-23.60	0.00
$(y_i - y_0) / (y_5 - y_0)$	0.000	0.250	0.500	0.750	0.833	1.000

若应用图算法, 可将面元磁场曲线沿横轴分为若干等分, 估读每等分间的磁场平均值再取平均 (根据需要也可直接做一次估读), 就可以得到磁场三分量的结果

$$\Delta X_1 = 18.51\gamma, \Delta Y_1 = 17.38\gamma, \Delta Z_1 = -21.0\gamma.$$

若应用抛物线近似积分公式

$$\int_{y_0}^{y_n} \Delta Z y dy \approx \frac{y_n - y_0}{3n} \left\{ \Delta Z y_0 + \Delta Z y_n + 2(\Delta Z y_2 + \Delta Z y_4 + \dots + \Delta Z y_{n-2}) + 4(\Delta Z y_1 + \Delta Z y_3 + \dots + \Delta Z y_{n-1}) \right\}$$

..... (12)

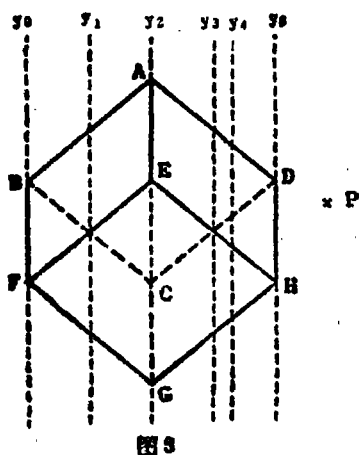


图 3

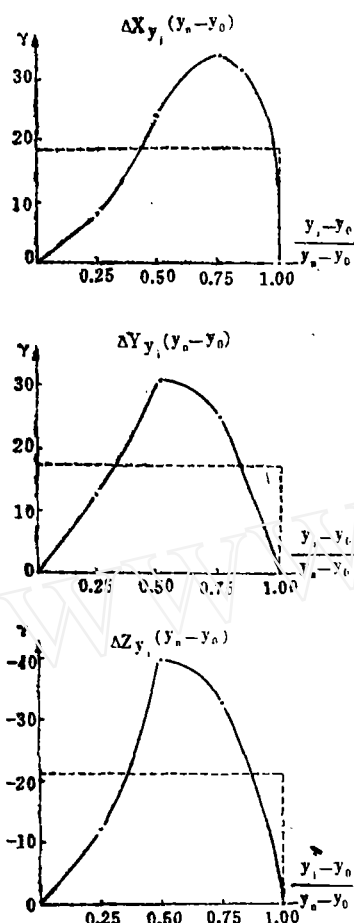


图4

式中, n 必须是偶数和具有 $(n+1)$ 个等间距截面的磁场值, ΔXy 和 ΔYy 与 ΔZy 通用。

对面元磁场曲线 ΔZy_i 和 ΔYy_i (包括以后, 在叙述时都节略了 $(y_n - y_0)$ 倍), 均分别由其极值 $\Delta Zy_1 = -39.2\gamma$ 及 $\Delta Yy_2 = 30.6\gamma$ 处分为两段, 每段有三个截面的数据且间隔相等, 可直接应用 (12) 式计算。

$$\Delta Z_2 = \frac{0.5}{6} (0 - 39.2 - 4 \times 32.6)$$

$$+ \frac{0.5}{6} (-39.2 + 0 - 4 \times 11.8)$$

$$= -21.4\gamma$$

$$\Delta Y_2 = \frac{0.5}{6} (0 + 30.6 + 4 \times 12.8)$$

$$+ \frac{0.5}{6} (30.6 + 0 + 4 \times 25.1)$$

$$= 17.73\gamma$$

对 ΔXy 曲线, 也须由其极大值 $\Delta Xy_3 = 33.6\gamma$ 处分为两段, 但两段的中点处没有实际计算的磁场数据, 首先使用拉格朗日插值公式算出 0.375 及 0.875 处的磁场值分别为 14.71γ 及 26.9γ , 再用 (12) 式计算。

$$\Delta X_2 = \frac{0.75}{6} (0 + 33.6 + 4 \times 14.71)$$

$$+ \frac{0.25}{6} (33.6 + 0 + 4 \times 26.9) = 17.4\gamma$$

$\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta Z_1$ 和 $\Delta X_2, \Delta Y_2, \Delta Z_2$ 与理论值 $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ 相比较, 计算误差均 $< 5\%$ 。但可以看到, 若选用的截面较少, 且面元磁场的极大值在计算之前难以推算它在曲线中的具体位置, 给应用近似积分公式带来麻烦。当积累了一些对面元磁场曲线徒手圆滑的技巧经验之后, 直接应用图算法不仅快速方便, 且对使用截面较少的情况下, 可使计算精确度有所提高。

对这种类型的三度体, 如只需要较粗略地了解其磁场三分量情况时, 一般实际计算 3~4 个截面已能满足要求。

例 2 设: 对 (x'', y'', z'') 座标系统中一个 $10 \times 4 \times 1$ 的矩形, 用矩形解析式算出 P 点的磁场三分量 $\Delta X'', \Delta Y'', \Delta Z''$, 经过座标转换在 (x, y, z) 座标系统中形成倾伏状较复杂的三度体 (图 5), 其磁场三分量 $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ 和有关数据列于表 3, 做为理论数据。然后, 在 (x, y, z) 座标系统中选用 $x_0 \sim x_5$ 等 6 个截面, 其中 x_0 及 x_5 两个截面为零不用计算, x_1 及 x_4 为这一倾伏矩形的转折面, 用量板算出面元磁场 (表 4) 并绘出图 6。在计算过程中要注意量板的座标系统为 (X, Y, Z) , 与 (x, y, z) 座标系统的关系为 $X = -y, Y = x, Z = z$ 。

当应用图算法, 由图 6 的面元磁场曲线直接读出

表 3

名	x	y	z	x''	y''	z''
A	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
B	1.0866	3.0642	2.3302	0.0000	0.0000	4.0000
C	-7.9764	3.0642	6.5564	-10.0000	0.0000	4.0000
D	-9.0631	0.0000	4.2262	-10.0000	0.0000	0.0000
E	0.3237	-0.6428	0.6943	0.0000	-1.0000	0.0000
F	1.4104	2.4214	3.0245	0.0000	-1.0000	4.0000
G	-7.6527	2.4214	7.2507	-10.0000	-1.0000	4.0000
H	-8.7393	-0.6428	4.9204	-10.0000	-1.0000	0.0000
P	-5.0000	0.0000	-1.0000	-4.1089	2.3130	-1.9408
$\vec{I} \times 10^{-5} \text{CGSM}$	9.80	104.50	123.60	-45.47	-252.85	157.63
磁场三分量 (γ)	$\Delta X = 24.7$	$\Delta Y = -12.32$	$\Delta Z = 50.3$	$\Delta X'' = 1.095$	$\Delta Y'' = -50.8$	$\Delta Z'' = 26.6$

座标转换式 $x = x'' \cos 25^\circ + (z'' \cos 50^\circ - y'' \sin 50^\circ) \sin 25^\circ$
 $y = y'' \cos 50^\circ + z'' \sin 50^\circ$
 $z = (z'' \cos 50^\circ - y'' \sin 50^\circ) \cos 25^\circ - x'' \sin 25^\circ$

表 4

$x_i - x_p$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
称	-4.0631	-2.6521	0.0000	2.5000	5.0000	6.4104
$\Delta X_{xi} (\gamma)$	0.00	-21.6	-3.64	86.4	44.2	0.00
$\Delta Y_{xi} (\gamma)$	0.00	-7.15	-18.34	-17.78	-12.75	0.00
$\Delta Z_{xi} (\gamma)$	0.00	29.8	109.2	74.9	-4.62	0.00
$(x_i - x_0)/(x_5 - x_0)$	0.000	0.134	0.388	0.627	0.865	1.000

备 注：表中数据均为倾伏矩形的 (x, y, z) 系统

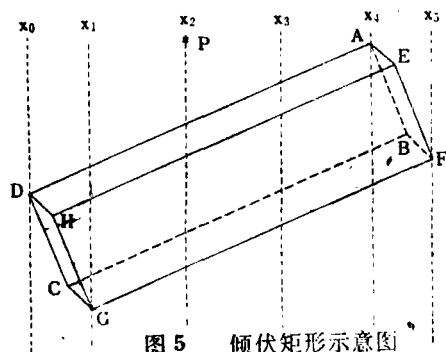


图 5 倾伏矩形示意图

$\Delta X_1 = 24.4\gamma, \Delta Y = -12.77\gamma, \Delta Z_1 = 51.0\gamma.$

当用抛物线近似积分公式计算，对 ΔY 分量与例 1 一样，将曲线由极小值 $\Delta Y_{x_3} = -18.34\gamma$ 处分为两段，分别算出两段的中点插值，再用 (12) 式算出，

$$\Delta Y_2 = -12.88\gamma.$$

对 ΔX 分量，将全曲线由极小 ($\Delta X_{x_1} = -21.6\gamma$) 及极大 ($\Delta X_{x_3} = 86.4\gamma$) 值处分为三段，分别求出三段的中点插值为 -10.8, -5.27, 57.2；用 (12) 式算出 $\Delta X_2 = -1.45 + 3.58 + 19.6 = 21.7\gamma$ 但计算误差达到 -12%。当增加 $x_i - x_p$

= 1.25 (即 $\frac{x_i - x_0}{x_5 - x_0} = 0.507$) 的截面，用量板算出 $\Delta X_{x_i} = 54.7\gamma$ (图 6 中用圈表示)，

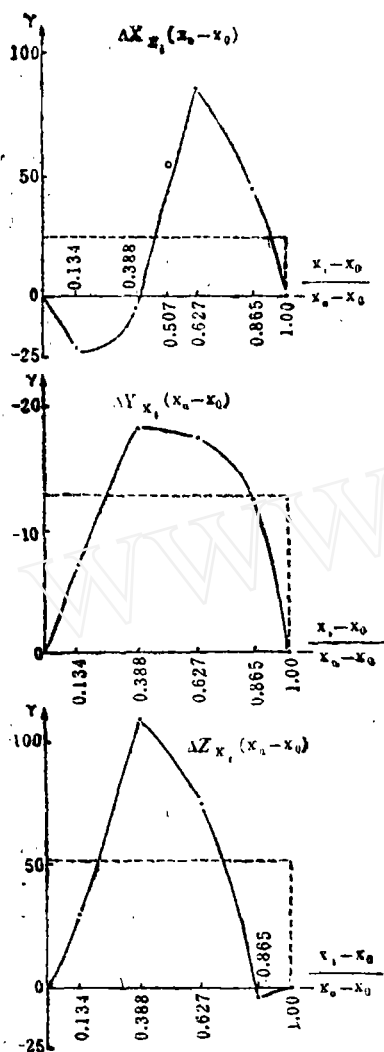


图6

对于图算法来说, 曲线的圆滑和计算结果更趋于稳定; 但这段 (0.134~0.627) 曲线不仅过陡且发生了明显转折, 如用 (12) 式计算, 应再增加截面和进一步分段计算, 否则计算误差不能好转, 这种情况对实际应用已嫌过繁。若仍有必要采用近似积分公式 (12) 计算时, 宜应用纵轴求插值及做积分可以得到较好的结果。

$$\Delta X_2 = -1.45 + 6.21 + 19.6 = 24.4\gamma$$

其计算误差已满足要求。

在实际应用时, 截面是否过少可由圆滑曲线的稳定性来判断。

对 ΔZ 分量, 除了可以按计算 ΔX 分量的方法将曲线分为三段计算以外, 还可以对全部的面元磁场 ΔZ_{xi} 分别加上其自身任意倍 ($\pm K$) 的由单一磁化强度分量 J_j (j 代表 x, y, z 之一) 构成的磁场值 ($\pm K\Delta Z_{xi}^{(J_j)}$), 达到消除原面元磁场曲线的极小值, 同时绘出 $(\Delta Z_{xi} \pm K\Delta Z_{xi}^{(J_j)})$ 及 $(\pm K\Delta Z_{xi}^{(J_j)})$ 两曲线, 并对这两曲线用前述分两段的办法分别求出两磁场值, 其差值即为所求的结果。当选用 $K = 2, j = y$

$$\Delta Z_2 = \int_{x_0}^{x_n} (\Delta Z_x \pm K \Delta Z_x^{(J_j)}) dx - \int_{x_1}^{x_n} (\pm K \Delta Z_x^{(J_j)}) dx = 71.1 - 20.6 = 50.5\gamma$$

由例 2 也可以看出图算法的优越性较多, 有利于实际应用; 其他算法当有需要时做为参考。

过去, 在野外条件下, 没有合适的计算三度体磁场三分量的方法, 三度体面元量板结合电算将有利于这方面的工作; 但所提出的方法可能还有不足之处, 需要在广泛试用过程中逐步修改、充实提高, 使之更趋于完善, 为此希望兄弟单位提出改进意见。

附表 1

I、II、III量板的射线角度

量板 射线角度 角度间隔系数	I 量板		II 量板		III 量板		注：°角度间隔系数 I 量板为 $\frac{\sin 2\theta_{a-1} - \sin 2\theta_n}{0.125}$ II 量板为 $\frac{\theta_{a-1} - \theta_n}{\pi/16}$ III 量板为 $\frac{\sin \theta_{a-1} - \sin \theta_n}{0.125}$
	θ	$\text{tg}\theta$	θ	$\text{tg}\theta$	$\text{ctg}\theta$	θ	$\text{ctg}\theta$
1.0	0°00'00"	0.00000	0°00'00"	0.00000	∞	0°00'00"	∞
	3°35'25"	0.06275	11°15'00"	0.19891	5.02734	7°10'51"	0.25520
	7°14'20"	0.12702	22°30'00"	0.41421	2.41421	14°28'39"	0.25520
	11°00'44"	0.19460	33°45'00"	0.68818	1.49660	22°01'27"	0.40452
	15°00'00"	0.26795	45°00'00"	1.00000	1.00000	30°00'00"	0.57735
	19°20'28"	0.35100	56°15'00"	1.49660	0.66818	38°40'56"	0.80064
	24°17'43"	0.45142	67°30'00"	2.41421	0.41421	48°35'25"	1.13395
	30°31'21"	0.58957	78°45'00"	5.02734	0.19891	61°02'42"	1.80739
	45°00'00"	1.00000	90°00'00"	∞	0.00000	90°00'00"	∞
	30°31'21"	0.58957				61°02'42"	1.80739
0.1	31°16'49"	0.60754				62°33'38"	1.92596
	32°04'45"	0.62679				64°09'30"	2.06476
	32°55'36"	0.64759				65°51'12"	2.23064
	33°50'03"	0.67031				67°40'07"	2.43446
	34°49'04"	0.69548				69°38'09"	2.69407
	35°54'09"	0.72395				71°48'19"	3.04247
	37°07'47"	0.75711				74°15'34"	3.54799
	38°34'51"	0.79774				77°09'41"	4.38787
	40°27'56"	0.85304				80°55'51"	6.26488
	45°00'00"	1.00000				90°00'00"	∞

附表 2

I、II、III量板单环半径 ($\gamma_{m+1}/\gamma_m = e^{0.008}$) 及双环 ($\gamma_{m+1}/\gamma_m = e^{2 \times 0.008}$) 环带系数 $\gamma\delta$ 、 δ_0 、 $\gamma\delta^*$

环号 m	半径 γ_m	环号 m	半径 γ_m	$\lg \frac{1}{\gamma_m}$	$\frac{1}{\gamma_m}$	$\gamma\delta_1$	δ_{01}	$\gamma\delta_1^*$	$\gamma\delta_2$	δ_{02}	$\gamma\delta_2^*$	$\gamma\delta_3$	δ_{03}	$\gamma\delta_3^*$
-50		-50		1.7372	54.5982	0.0000		0.0000	-0.0012		-0.0033	0.0000		0.0001
-48		-48		1.6677	46.5254	0.0000		0.0000	-0.0017		-0.0045	0.0001		0.0001
-46		-46		1.5982	39.6464	0.0000		0.0000	-0.0024		-0.0062	0.0001		0.0002
-44		-44		1.5287	33.7844	0.0000		0.0000	-0.0032		-0.0086	0.0002		0.0003
-42		-42		1.4592	28.7891	0.0000		0.0000	-0.0044		-0.0118	0.0003		0.0005
-40		-40		1.3897	24.5325	0.0000		0.0000	-0.0061		-0.0163	0.0005		0.0008
-38		-38		1.3203	20.9053	0.0000		0.0000	-0.0084		-0.0224	0.0008		0.0014
-36		-36		1.2508	17.8143	0.0000		0.0000	-0.0115		-0.0308	0.0013		0.0022
-34		-34		1.1813	15.1803	0.0000		0.0000	-0.0158		-0.0423	0.0022		0.0036
-32		-32		1.1118	12.9358	0.0001		0.0001	-0.0217		-0.0581	0.0035		0.0057
-30		-30		1.0423	11.0232	0.0001		0.0002	-0.0296		-0.0798	0.0056		0.0092
-28		-28		0.9728	9.3933	0.0003		0.0003	-0.0403		-0.1094	0.0090		0.0148
-26		-26		0.9033	8.0045	0.0005		0.0006	-0.0547		-0.1497	0.0143		0.0238
-24		-24		0.8338	6.8210	0.0009		0.0010	-0.0738		-0.2044	0.0228		0.0382
-22		-22		0.7644	5.8124	0.0017		0.0020	-0.0988		-0.2782	0.0360		0.0609
-20	0.1864	-20	0.2019	0.6949	4.9530	0.0031		0.0036	-0.1309		-0.3769	0.0563		0.0969
-19	0.2187	-19	0.2369	0.6254	4.2207	0.0056		0.0067	-0.1710		-0.5078	0.0871		0.1532
-17	0.2567	-17	0.2780	0.5559	3.5966	0.0101		0.0124	-0.2193		-0.6787	0.1328		0.2403
-15	0.3012	-15	0.3263	0.4864	3.0648	0.0176		0.0224	-0.2743		-0.8980	0.1984		0.3731
-13	0.3535	-13	0.3829	0.4169	2.6117	0.0302		0.0401	-0.3320		-1.1723	0.2891		0.5715
-11	0.4148	-11	0.4493	0.3474	2.2355	0.0499		0.0702	-0.3850		-1.5043	0.4078		0.8606
-9	0.4868	-9	0.5273	0.2779	1.8965	0.0793	2.6289	0.1201	-0.4223	2.7530	-1.5892	0.5528	0.0000	1.2684
-7	0.5712	-7	0.6188	0.2085	1.6161	0.1203	2.2402	0.1994	-0.4311	2.3460	-2.3115	0.7146	0.0000	1.8211
-5	0.6703	-5	0.7261	0.1390	1.3771	0.1726	1.9090	0.3197	-0.4008	1.9991	-2.3420	0.8749	0.0000	2.5357
-3	0.7866	-3	0.8521	0.0695	1.1735	0.2334	1.6267	0.4823	-0.3275	1.7035	-3.1435	1.0088	0.0000	3.4106
-1	0.9231	-1	1.0000	0.0000	1.0000	0.2963	1.3862	0.7257	-0.2179	1.4516	-3.4710	1.0924	0.0000	4.4194

I、II、III量板单环半径($\gamma_{m+1}/\gamma_m = e^{0.08}$)及双环($\gamma_{m+1}/\gamma_m = e^{2.0 \times 0.08}$)环带系数 $y\delta, \delta_0, y\delta^*$ 附表2 (续)

环号 m	半 径 γ_m	环 号 m	半 径 γ_m	$\lg \frac{1}{\gamma_m}$	$\frac{1}{\gamma_m}$	$y\delta_1$	δ_{01}	$y\delta_1^*$	$y\delta_2$	δ_{02}	$y\delta_2^*$	$y\delta_3$	δ_{03}	$y\delta_3^*$
1	1.0833	2	1.1735	1.9305	0.8521	0.3533	1.1813	1.0221	-0.0281	1.2370	-3.6889	1.1108	0.0000	5.5118
3	1.2713	4	1.3771	1.8610	0.7261	0.3968	1.0666	1.3754	0.0414	1.0541	-3.7770	1.0639	0.0000	6.6226
5	1.4918	6	1.6161	1.7915	0.6188	0.4221	0.8578	1.7722	0.1526	0.8983	-3.7356	0.9651	0.0000	7.6865
7	1.7507	8	1.8965	1.7221	0.5273	0.4284	0.7309	2.1944	0.2351	0.7654	-3.5829	0.8350	0.0000	8.6516
9	2.0544	10	2.2255	1.6526	0.4493	0.4178	0.6229	2.6228	0.2862	0.6523	-3.3478	0.6944	0.0000	9.4866
11	2.4109	12	2.6117	1.5831	0.3829	0.3947	0.5308	3.0406	0.3294	0.5558	-3.0616	0.5591	0.0000	10.1810
13	2.8292	14	3.0648	1.5136	0.3283	0.3635	0.4523	3.4353	0.3111	0.4736	-2.7522	0.4389	0.0000	10.7401
15	3.3201	16	3.5966	1.4441	0.2780	0.3282	0.3854	3.7987	0.2981	0.4036	-2.4412	0.3378	0.0000	11.1790
17	3.8962	18	4.2207	1.3746	0.2389	0.2919	0.3284	4.1269	0.2763	0.3439	-2.1431	0.2561	0.0000	11.5168
19	4.5722	20	4.9530	1.3051	0.2019	0.2568	0.2799	4.4189	0.2571	0.2931	-1.8668	0.1920	0.0000	11.7729
21	5.3655	22	5.8124	1.2356	0.1720	0.2240	0.2385	4.6757	0.2226	0.2497	-1.6167	0.1427	0.0000	11.9649
23	6.2965	24	6.8210	1.1662	0.1466	0.1941	0.2032	4.8996	0.1958	0.2128	-1.3941	0.1054	0.0000	12.1076
25	7.3891	26	8.0045	1.0967	0.1249	0.1675	0.1732	5.0938	0.1707	0.1514	-1.1983	0.0775	0.0000	12.2130
27	8.6711	28	9.3933	1.0272	0.1065	0.1440	0.1476	5.2613	0.1479	0.1545	-1.0276	0.0568	0.0000	12.2905
29	10.1757	30	11.0232	0.9577	0.0907	0.1236	0.1258	5.4053	0.1276	0.1317	-0.8797	0.0415	0.0000	12.3473
31	11.9413	32	12.9358	0.8882	0.0773	0.1058	0.1072	5.5289	0.1096	0.1122	-0.7522	0.0303	0.0000	12.3888
33	14.0132	34	15.1803	0.8187	0.0659	0.0905	0.0913	5.6346	0.0940	0.0957	-0.6425	0.0221	0.0000	12.4191
35	16.4447	36	17.8143	0.7492	0.0561	0.0773	0.0778	5.7251	0.0805	0.0815	-0.5485	0.0161	0.0000	12.4411
37	19.2980	38	20.9053	0.6797	0.0478	0.0660	0.0663	5.8024	0.0688	0.0694	-0.4680	0.0117	0.0000	12.4572
39	22.6464	40	24.5325	0.6103	0.0408	0.0563	0.0565	5.8684	0.0588	0.0592	-0.3992	0.0085	0.0000	12.4689
41	26.5758	42	28.7891	0.5408	0.0347	0.0480	0.0482	5.9247	0.0502	0.0504	-0.3404	0.0062	0.0000	12.4774
43	31.1869	44	33.7844	0.4713	0.0296	0.0410	0.0410	5.9727	0.0428	0.0430	-0.2902	0.0045	0.0000	12.4826
45	36.5983	46	39.6464	0.4018	0.0252	0.0349	0.0350	6.0137	0.0365	0.0366	-0.2474	0.0033	0.0000	12.4881
47	42.9485	48	46.5254	0.3323	0.0215	0.0298	0.0298	6.0486	0.0311	0.0312	-0.2109	0.0024	0.0000	12.4913
49	50.4005	50	54.5982	0.2628	0.0183	0.0254	0.0254	6.0783	0.0266	0.0266	-0.1797	0.0017	0.0000	12.4937
$y\delta_1$ 极大	$[\lg \frac{1}{\gamma_m}]y\delta_1$ 极大	$y\delta_2$ 极大	$[\lg \frac{1}{\gamma_m}]y\delta_2$ 极大	$y\delta_2 = 0$	$[\lg \frac{1}{\gamma_m}]y\delta_2$ = 0	$y\delta_1$ 极小	$[\lg \frac{1}{\gamma_m}]y\delta_1$ 极小	$y\delta_2^*$	$[\lg \frac{1}{\gamma_m}]y\delta_2$ 极小	$y\delta_3$ 极大	$[\lg \frac{1}{\gamma_m}]y\delta_3$ 极大			
0.4286	1.7331	0.3125	1.5428	0.0000	1.8839	-0.4323	0.2252	-3.7788	1.8495	1.1126	1.9465			