试论环测原理和计算公式

张福发

环测方法及原理

环测法，就是在一定长度的笔直的定向钻杆两端，各安一组测斜仪，并以孔口定向为基础，向下一段接一段地连环定向，测出钻孔各测点的顶角和终点角。具体到某组仪器来说，就是用悬垂原理测出某测点的钻孔顶角和终点角（钻孔弯曲方向两铅垂剖面在垂直钻孔轴线的倾斜平面上，并以钻孔轴线和倾斜平面的交点为顶点的夹角）再根据上下两测点的顶角和终点角差，用公式算出终点角差的水平投影角，即下测点与上测点的方位角差。总的来讲，环测就是用间接的、相对的、由已知到未知的方法，求测钻孔各测点的方位角。

公式的推导

据上述原理，首先用球面几何图形及关系式求证某测点钻孔弯曲方向和定向方向之间的方位角差与该点终点角、顶角的关系。请参看图1。

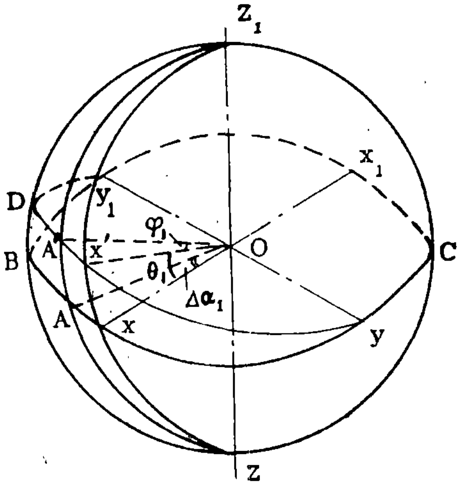

图 1

图1中：

ZZ_1—球体的铅垂轴；

xx_1和yy_1—球体的两个水平轴，并且$xx_1 \perp yy_1 \perp ZZ_1$；

$xABy_1x_1Cy$—水平大圆平面；

$yx'A'Dy_1$—垂直钻孔轴线的倾斜大圆平面；

$\overparen{Z_1A'AZ}$—定向方向铅垂剖面上的大圆弧；

$\overparen{Z_1x'xZ}$—钻孔弯曲方向（终点方向）铅垂剖面上的大圆弧；

O—球心；

φ_1—终点角读数；

θ_1—钻孔顶角读数；

Δx_1—方位角差。

图1中，由于$xx_1 \perp yy_1 \perp ZZ_1$；$x'O$与$xO$是投影关系，所以$x'O$也垂直$yy_1$，而$A'O$分别于$yy_1$、$ZZ_1$两轴斜交。根据球面上两大圆弧的交角等于两大圆弧所在平面之夹角这一基本定理，则角$A = x = x' = 90°$，而角$A' \neq 90°$。在球面$\Delta Z_1x'A'$中，根据球面直角三角形正切定理得：

$$\mathrm{tg}Z_1 = \frac{\mathrm{tg}\overparen{A'x'}}{\sin\overparen{z_1x'}}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\varphi_1}{\sin(90° - \theta_1)}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\varphi_1}{\cos\theta_1}$$

$$\because \Delta\alpha_1 = \angle Z_1$$

$$\therefore \mathrm{tg}\,\Delta\alpha_1 = \frac{\mathrm{tg}\varphi_1}{\cos\theta_1} \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{—}1)$$

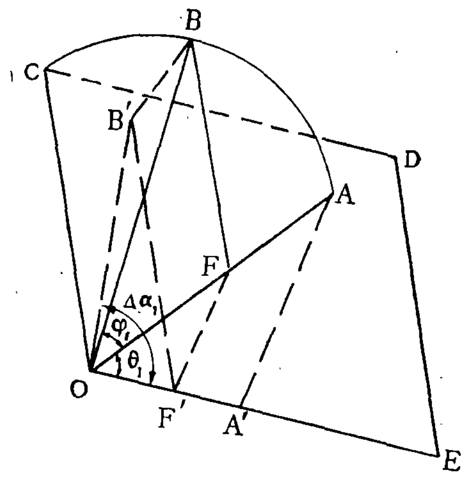

图 2

再用平面几何图形和关系式验证式(1—1)

在图2中：

CDEO—矩形水平平面；

ABCO—终点角盘1/4扇形平面；

O—终点角盘的中心点；

AO—仪器终点方向；

BO—仪器定向方向；

A′、B′、F′分别为A、B、F点的水平投影；

A′O与B′O分别为AO与BO的水平投影；

θ_1—顶角读数；

φ_1—终点角读数；

$\Delta\alpha_1$—终点方向与定向方向之间的方位角差。

在终点角盘的扇形平面上，由B点作BF⊥AO，并连接B′F′，则BF//B′F′//CO。

在直角ΔBFO中：$BF=BO\cdot\sin\varphi_1$；

$FO=BO\cdot\cos\varphi_1$

在直角ΔFF′O中：$F'O=FO\cdot\cos\theta_1$

在直角ΔB′F′O中：$\angle B'F'O=90°$；

B′F′平行并等于BF

$\therefore B'F'=BO\cdot\sin\varphi_1$；

$F'O=FO\cdot\cos\theta_1$

$=OB\cdot\cos\varphi_1\cdot\cos\theta_1$，

则$\text{tg}\,\Delta a_1=\dfrac{B'F'}{F'O}$

$$=\frac{BO\cdot\sin\varphi_1}{BO\cdot\cos\varphi_1\cdot\cos\theta_1}$$

$$=\frac{\text{tg}\varphi_1}{\cos\theta_1}$$

两种方法求证的结果相同。同理可得第二个测点钻孔弯曲方向和定向方向之间的方位角差与该点终点角、顶角的关系式：

$$\text{tg}\,\Delta a_2=\frac{\text{tg}\varphi_2}{\cos\theta_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1—2)$$

式（1—2）中，φ_2应为下仪器终点角读数与装合差的代数和。

上、下两组仪器的终点方向分别为两测点的钻孔弯曲方向，则两测点之间的方位角差：

$$\Delta\alpha=\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1—3)$$

一般情况下两测点的顶角不会相差太大，为简便起见，可将两测点的终点角落到同一倾斜平面上，如图3所示。两测点的终点角差为：

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1+A\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2—1)$$

式（2—1）中：

$\Delta\varphi$—两测点终点角差；

φ_2—下仪器终点角读数；

φ_1—上仪器终点角读数；

A—上下两组仪器的装合差。

则可求出两测点的方位角差：

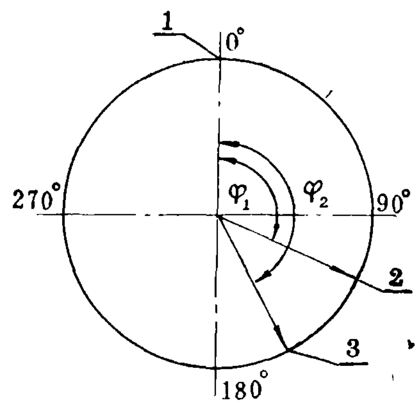

图3

1.定向方向；2.上仪器终点方向；3.下仪器终点方向

$$\text{tg}\,\Delta\alpha=\frac{\text{tg}\,\Delta\varphi}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

$$=\frac{\text{tg}\,\Delta\varphi}{\cos\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2-2)$$

上测点的方位角是已知的，则下测点的方位角为：

$\alpha_2=\alpha_1+\Delta\alpha$ ……………………（3）

值得注意的是，终点角（或终点角差）和方位角差、装合差可为正负值，也可为90°×1～4加减某个角度，因此在计算中必须根据各象限正切函数变换公式求算。

关于各公式正确性的探讨

目前比较广泛应用的公式有伊万诺夫公式，即：

$$\sin\Delta\alpha=\frac{\sin\Delta\varphi}{\cos\theta}$$

此式是据球面三角形正弦定理导出的，可参看图1。在球面三角$Z'x'A'$中，角$X'=90°$，而角$A\neq90°$，伊万诺夫却误认为角A'等于90°，因此他的错误推导过程是：

$$\frac{\sin\widehat{Z_1x'}}{\sin A'}=\frac{\sin\widehat{A'x'}}{\sin Z_1'}$$

$\widehat{Z_1x'}=(90°-\theta_1)\cdot\gamma$，$\widehat{A'x'}=\varphi_1\cdot\gamma$，将$\theta_1$改为$\theta$，将$\varphi_1$改为$\Delta\varphi$后可写成：

$$\frac{\sin(90°-\theta)}{\sin90°}=\frac{\sin\Delta\varphi}{\sin Z_1'}$$

$$\frac{\cos\theta}{1}=\frac{\sin\Delta\varphi}{\sin Z_1'}$$

则$\sin Z_1=\dfrac{\sin\Delta\varphi}{\cos\theta}$

$\because\angle Z_1=\Delta\alpha$

$\therefore\sin\Delta\alpha=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\theta}$

此外，还有周延勋同志运用球面三角形正切定理推导出来的公式：

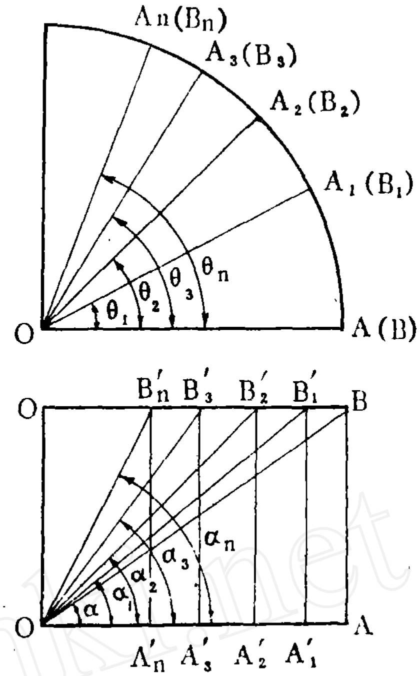

图 4

$\text{tg}\,\Delta\alpha=\text{tg}\,\Delta\varphi\cos\theta$（见1966年《探矿工程》“环测原理与计算公式的探讨”）

李照同志运用纳皮尔公式推导出来的公式为：

$$\text{ctg}\frac{\Delta\alpha}{2}=\frac{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\cdot\text{ctg}\frac{\Delta\alpha}{2}$$

（见1974年第1期《地质与探勘》）

为论述各公式的正确性，首先研究一下倾斜平面上的角与它水平投影角的关系（见图4）。设α为矩形平面ABOO平面以角α的顶角O所在的边OO为轴向上转动，与水平面的夹角θ由0°→90°变化时，矩形平面ABOO就成了倾斜平面，则A、B两点在投影面上变动的轨迹是两个以AO为半径的弧$\widehat{AA}_n$和$\widehat{BB}_n$；在水平面上变动的轨迹是矩形平面的AO、BO两个边，所得各角α_1，α_2，α_3，……α_n均为α角的水平投影角。因各投影角的对边等于α角的对边，邻边逐次小于α角的邻边，所以$\alpha_n>\cdots>\alpha_3>\alpha_2>\alpha_1>\alpha$。

因此可得如下结论：倾斜平面上的锐角，以通过它的顶点并垂直某一边的水平线为轴转动时，则该角小于它的水平投影角，两角之差随着倾斜平面与水平平面的夹角θ的增大而增大。同理：倾斜平面上的直角或钝角按上述方法转动时，则直角等于它的水平投影角，与θ角的变化无关；钝角大于它的水平投影角，两角之差随着θ角的增大而增大。

用各公式所求算的方位角差Δα就是两测点终点角差Δφ的水平投影角，终点角度盘所在的倾斜平面与水平平面在终点方向（钻孔弯曲方向）上的夹角等于钻孔顶角。这三个角之间的关系也必须符合上述结论。由此进而推论：钻孔方向不变，两测点的顶角不同，则两点测得的终点角不同；相反两点测得的终点角相同，顶角不同，则钻孔两点的方位角也不同。

我们设：$\theta=30°$，$\Delta\varphi$由0°～360°变化和$\Delta\varphi=60°$，θ由0°～90°变化时，运用伊诺夫、周延勋和本文介绍的公式求算的Δα值列于表1。设：$\theta_1=20°$，$\theta_2=10°$，Δφ由0°～360°变化时，用李照同志推导公式求算的Δφ值列于表2。

以上论述和各公式求算结果表明，伊万诺夫和周延勋、李照二同志推导出来的公式都有些不妥。伊万诺夫在公式推导过程中，把图1所示的球面三角形$Z_1X'A'$中的A'角错误地当成直角，因此用该式求算出的Δα与Δφ和θ的关系，不符合客观实际情况，特别是当$\theta>(90°-\Delta\varphi)$时，所得$\sin\Delta\alpha>1$，与正弦函数定义不符，因此该公式不成立。周、李二同志在作球面几何图形和公式推导过程中，对终点角的定义有所误解，终点角本来是倾斜平面上的角，他们误认为是球面上的角；同时仪器的定向方向和终点方向两铅垂剖面上的大圆弧只能交于球体的上、下两极点（Z、Z_1）而他们误认为可在球面上任意一点相交（参看周延勋和李照同志分别在《探矿工程》和《地质与勘探》上发表的两文插图）。因此这两个公式都不能正确地反映出钻孔两侧点方位角差随着钻孔两侧点顶角、终点角差的变化而变化的规律。

文中介绍的新公式符合环测原理，比较真实地反映了两测点方位角差与两测点顶角、终点角之间的关系：当$\Delta\varphi=0°$时，无论θ如何变化，所得的$\Delta\alpha=0°$，表明钻孔方位角没有变化；当$\theta=0°$时，Δφ测不准，所得$\Delta\alpha=\Delta\varphi$，则Δα也是个变数，表明钻孔没有方位角；当$\theta=90°$时，虽能测出两点的终点角差，但求算不了方位角差，表明在水平孔中不能使用这一方法测钻孔方位角。

对"连根起拔套管法"的改进意见

编辑同志并转王聚宝同志：

《地质与勘探》1974年第5期刊登王聚宝同志的"连根起拔套管法"一文很好。为了使这种方法更适应野外条件，我们建议：

一、可否将"特制丝杆和压盘结构"改用炮台式夹持器或螺旋千斤顶的帽子（机台一般都有，不需特制）代替。

二、连根起拔，必须从底部卡死，卡具可否选用木质的矢锥，其优点是：

（1）不必要大量铁砂，只需一些大小不等的碎石或取粉管的积物做卡料，木矢锥浇水膨胀后即卡死。（2）起完套管，倒转敲打，取出木矢锥。如不急用，则可待其自然干燥后取出，如急用，也可烘干取出。

陕西地质局四队五分队　薛万德　1974.9.15

（信）（箱）

表 1

θ \ Δφ \ 求算结果		Δα: $\sin\Delta\alpha=\frac{\sin\Delta\varphi}{\cos\theta}$	Δα: $tg\Delta\alpha=tg\Delta\varphi\cdot\cos\theta$	Δα: $tg\Delta\alpha=\frac{tg\Delta\varphi}{\cos\theta}$
θ	Δφ			
30°	0°	0°	0°	0°
〃	5°	5°50′	4°20′	5°45′
〃	10°	11°45′	8°40′	11°30′
〃	15°	17°30′	13°10′	17°5′
〃	30°	35°20′	26°40′	33°30′
〃	45°	55°	40°50′	49°
〃	60°	90°	56°15′	63°25′
〃	75°	$\sin\Delta\alpha>1$	72°45′	76°55′
〃	90°	$\sin\Delta\alpha>1$	90°	90°
〃	110°	$\sin\Delta\alpha>1$	112°45′	107°30′
〃	300°	270°	304°	296°30′

θ \ Δφ \ 求算结果		Δα: $\sin\Delta\alpha=\frac{\sin\Delta\varphi}{\cos\theta}$	Δα: $tg\Delta\alpha=tg\Delta\varphi\cdot\cos\theta$	Δα: $tg\Delta\alpha=\frac{tg\Delta\varphi}{\cos\theta}$
θ	Δφ			
0°	60°	60°	60°	60°
5°	〃	60°30′	59°45′	60°5′
10°	〃	61°45′	59°30′	60°25′
10°	〃	63°30′	59°10′	60°50′
15°	〃	90°	56°20′	63°30′
30°	〃	$\sin\Delta\alpha>1$	51°20′	67°45′
45°	〃	$\sin\Delta\alpha>1$	40°55′	73°50′
60°	〃	$\sin\Delta\alpha>1$	24°10′	81°30′
75°	〃	$\sin\Delta\alpha>1$	0	测不出
90°	〃			

表 2

θ_1	20°						
θ_2	10°						
Δφ	0°	20°	40°	60°	90°	110°	300°
Δα	0°	20°36′	41°10′	61°32′	91°46′	111°38′	298°28′

群