



关于测斜计算的探讨

· 高 森 ·

《地质与勘探》1973年第3、7两期和1974年第1期刊登的有关孔斜测量计算的文章，读后有一些体会，现就个人的认识提出来与有关作者和同志们一起讨论。

查阅文献可知，定向导斜和连环测斜时钻孔方位角 α 与测得的终点角 φ 及顶角 θ 间存在着函数关系，其表达式主要的有：

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\varphi}{\cos\theta} \text{ (1917年) } \dots\dots\dots (1)$$

$$\sin\Delta\alpha = \frac{\sin\Delta\varphi}{\cos\theta} \text{ (1938年) } \dots\dots (2)$$

$$\text{tg}\alpha = \text{tg}\varphi \cos\theta \text{ (1938年) } \dots\dots\dots (3)$$

$$\sin\Delta\alpha = \frac{\sin\Delta\varphi}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \text{ (1959年) } \dots\dots (4)$$

式中 $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ ； $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

(4)式是由球面三角公式导出，导出过程有所简化。必须指出，推导公式时用的 φ_1 和 φ_2 角是定值，是一个测程孔段构成的弯曲面分别与铅垂面间在孔轴垂直面内的夹角。该测程若用定盘测斜仪测量多次，则可得多组测值： φ_1 、 φ_2 ； φ_1' 、 φ_2' 等。推导公式时，如上述用了其中特定的一组，但不论重复多少次，差值 $\Delta\varphi$ 则是客观不变的定值。

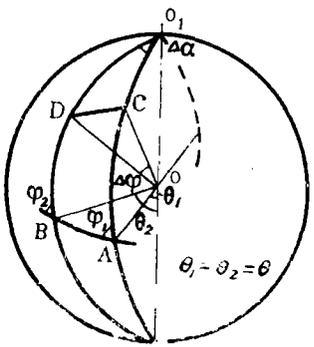


图1

这也就是公式中多取 $\Delta\varphi$ 形式的缘故。

(4)式中，若取 $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ ，则可得近似公式(2)式。(2)式也可以直接由图1导出，取OAC, OBD为大圆(即铅垂面)，则OAB为弯曲面，作OCD垂直于OAB，则近似地 $\angle COD = \Delta\varphi$ ，由球面三角形 O_1CD 知(θ 、 $\Delta\varphi$ 很小时近似地认为 $\angle O_1CD$ 和 $\angle O_1DC$ 是直角)：

$$\frac{\sin\Delta\varphi}{\sin\Delta\alpha} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)}{\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\theta \dots\dots\dots (5)$$

(2)式中，当角度小于 5° 时，用角的弧度可近似代替角的正弦，例如 $\sin 5^\circ = 0.0872$ ， $5^\circ = \frac{\pi}{36} = 0.0872$ ，因而可得(1)式。

(3)式的误差是很大的，它是按圆柱测筒上投影关系得到的。如图2， O_1 椭圆为水平面；C为长轴之半； O_2 圆为钻孔轴线垂直面；a为半径；b为 α 、 φ 角所在面的截线，可得：

$$\text{tg}\alpha = \frac{b}{c} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \text{tg}\varphi \cos\theta \dots\dots\dots (6)$$

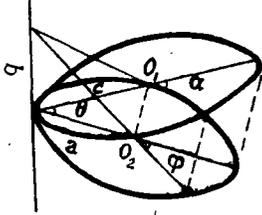


图2

考虑到角度值很小时计算精度高, 查表及运算次数少, 可利用的球面三角公式还有:

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta \alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}}{\cos \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}} \dots \dots \dots (7)$$

下面再看定向导斜用的公式。由图 3 (1), 取球面三角形 O_1AB 表示为图 3 (2), 各边长 (正比于所对中心角) 取为直线, 可表示为图 3 (3)。其中 O_1A 为原弯曲方向; O_1B 为导斜后弯曲方向。这也就是常用的作图法。此时平面三角形的各角比球面三角形的各角要小, 球面剩余的 $1/3$, 但不能把它用以解平面几何或平面三角问题, 因为 $\Delta \alpha$ 与 φ_1 、 φ_2 不在一个平面中。此外, 必须特别注意, 各角都是有方向的。由球面三角公式:

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \cos \theta_1 \cos \gamma + \sin \theta_1 \sin \gamma \cos(\pi - \varphi_1) \\ &= \cos \theta_1 \cos \gamma - \sin \theta_1 \sin \gamma \cos \varphi_1 \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \Delta \alpha \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

式中: γ 为楔顶角; φ_1 为楔座扭转角 (即终点角)。

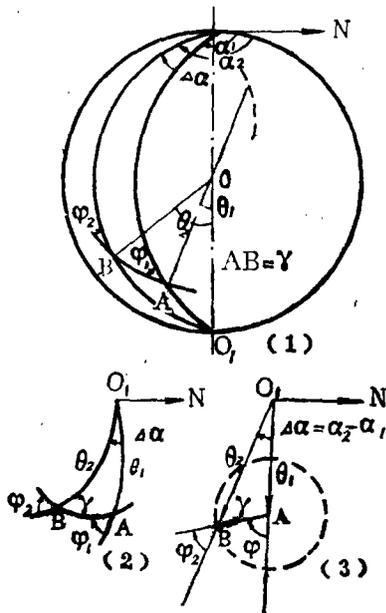


图 3

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \Delta \alpha} = \frac{\sin \theta_2}{\sin(\pi - \varphi_1)} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \varphi_1} \dots \dots \dots (10)$$

$$\text{或 } \operatorname{ctg} \Delta \alpha \sin(\pi - \varphi_1) = \operatorname{ctg} \gamma \sin \theta_1 - \cos \theta_1 \cos(\pi - \varphi_1)$$

$$\operatorname{ctg} \Delta \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \gamma \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} \dots \dots \dots (11)$$

现在用解析几何方法导出上述公式, 如图 4, 原孔轴 $O'O$ 与新孔轴 $O'B$ 夹角为 γ , l 可取为测程长, B 点轨迹为圆 O , 其水平射影为椭圆 O_1 , 其长半轴为 $l \sin \gamma$, 短半轴为 $l \sin \gamma \cos \theta_1$, 因而可得椭圆方程, 椭圆上的 $B_1(x, y)$ 的坐标为:

$$\begin{aligned} x &= l \cos \gamma \sin \theta_1 + l \sin \gamma \cos \varphi_1 \cos \theta_1 \\ y &= l \sin \gamma \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

因 $\operatorname{ctg} \Delta \alpha = \frac{x}{y}$, 可得 (11) 式,

$$\sin \Delta \alpha = \frac{y}{O'B} = \frac{y}{l \sin \theta_2}, \text{ 可得}$$

(10) 式。

$O'O_1$ 轴与座标轴的夹角是 $(90^\circ - \theta_1)$, $90^\circ, \theta_1$;

$$\text{向量 } l = \{ l \sin \theta_2 \cos \Delta \alpha, l \sin \theta_2$$

$\sin \Delta \alpha, l \cos \theta_2 \}$, l 在 $O'O_1$ 上的射影:

$$l \cos \gamma = l \sin \theta_2 \cos \Delta \alpha \cos(90^\circ - \theta_1)$$

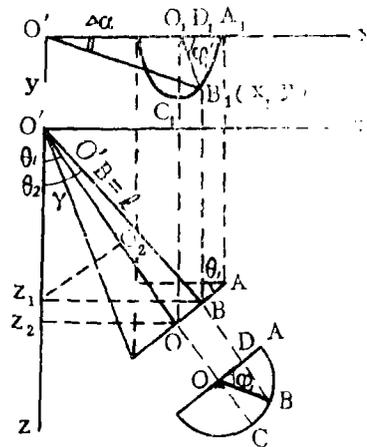


图 4

+ O + l \cos \theta_2 \cos \theta_1, 可得(9)式。或由图4直接推得:

$$\begin{aligned} l \cos \gamma &= O'O = O'O_2 + O_2O \\ &= O'Z_1 \cos \theta_1 + O'D_1 \sin \theta_1 \\ &= l \cos \theta_2 \cos \theta_1 + l \sin \theta_2 \cos \Delta \alpha \sin \theta_1 \end{aligned}$$

使座标绕y轴(即y_1轴)转动\theta_1角,使O'O成为Z_1轴,原Z轴夹角为(90^\circ + \theta_1), 0^\circ, \theta_1; 向量

$$l = \left\{ \begin{aligned} &l \sin \gamma \cos \varphi_1, \\ &l \sin \gamma \sin \varphi_1, \\ &l \cos \gamma \end{aligned} \right\}, l \text{ 在 } Z \text{ 轴上的射影:}$$

l \cos \theta = -l \sin \gamma \cos \varphi_1 \sin \theta_1 + O + l \cos \gamma \cos \theta_1, 可得(8)式。或由图4直接推得:

$$\begin{aligned} l \cos \theta_2 &= O'Z_1 = O'Z_2 - Z_1Z_2 \\ &= l \cos \gamma \cos \theta_1 - OD \sin \theta_1 \\ &= l \cos \gamma \cos \theta_1 - l \sin \gamma \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因 } \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{DB}{OD} = \frac{D_1B_1}{OD} = \frac{D_1B_1}{O_1D_1} \\ &= \frac{O_1D_1}{OD} = \operatorname{tg} \varphi_1' \cos \theta_1 \end{aligned}$$

$$\text{故 } \operatorname{tg} \varphi_1' = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos \theta_1} \dots \dots \dots (12)$$

(12)式与(3)式不同,前者是孔轴垂直面射影在水平面上,而不是水平面射影在轴孔垂直面上。这样就可以用平面几何和平面三角的方法来解算及作图。为了绘椭圆应求得焦距(2 \sin \theta_1 \sin \gamma)。所有各量均除以

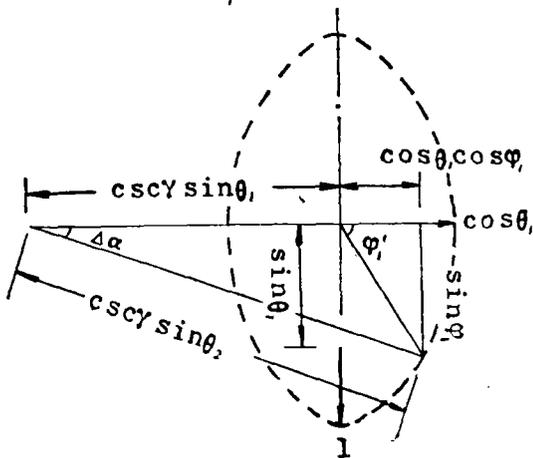


图 5

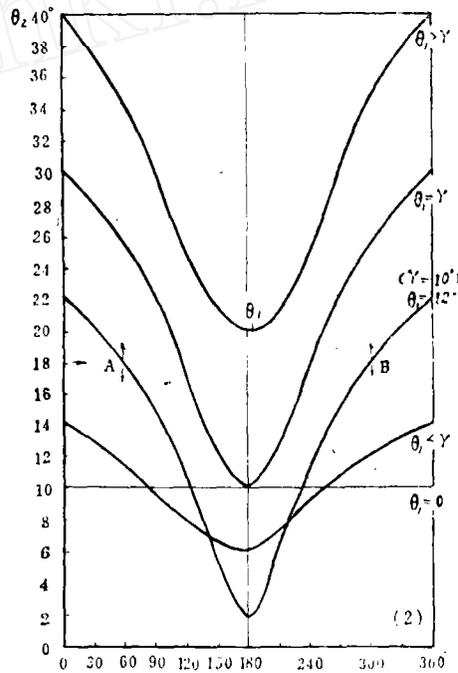
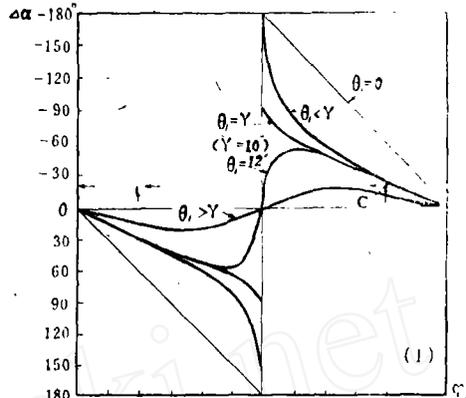


图 6 \gamma = \text{const} 时 \Delta \alpha - \varphi_1 - \theta_2 关系

\sin \gamma, 则可得图5的作图法。这个方法比通用作图法精确,但较烦琐,不实用。

用解析几何方法的优点是不需用球面三角原理推导公式;概念可用较直观的图来表达;引入 \gamma 量便于计算及造表。

不论用作图法或算法,在 \theta_1, \theta_2, \varphi_1, \Delta \alpha, \gamma 五个参数中已知三个可求其余二个。定向导斜时,通常是求 \theta_2, \Delta \alpha 或 \theta_2, \varphi_1 的问题;《斜交测斜法在定向导斜中的应用》(以下简称《斜交定向》)一文中,是求 \varphi_1 (即 \alpha 模)、\Delta \alpha 的问题。

\theta_2 - \varphi_1 的关系由(8)式决定,可得图6

(2), $\Delta\alpha = 0$ 时, 当 $\varphi_1 = 0^\circ (360^\circ)$, $\theta_2 = \theta_1 + \gamma$; 当 $\varphi_1 = 180^\circ (-180^\circ)$, $\theta_2 = |\theta_1 - \gamma|$, 这是确定曲线族的两个易知点。同时由(8)式知, φ_1 一定时, 当 θ_1 与 γ 角互换位置后 θ_2 不变, 这一点在《斜交定向》附录中证实 $\theta_1 = 10^\circ$ 、 $\gamma = 8^\circ$ 同 $\theta_1 = 8^\circ$ 、 $\gamma = 10^\circ$ 的曲线是一致的。 $\gamma = 8^\circ$ 的其它情况时, 则不能利用 $\gamma = 10^\circ$ 的曲线族, 须另行模拟或计算, 不同的 γ 有不同的曲线族。

$\Delta\alpha - \varphi_1$ 的关系由(10)或(11)式决定, 可得图7。图7的 φ_1 及 $\Delta\alpha$ 均变化于 $0 \sim 360^\circ$, 由钻孔原弯曲方向(即 $\theta_1 + \gamma$ 方向)起, 顺时针作为正, 反之作为负。 $\theta = \gamma$ 条件的曲

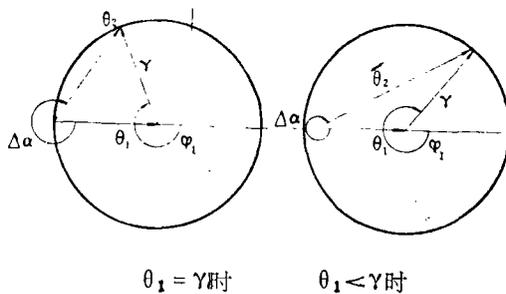
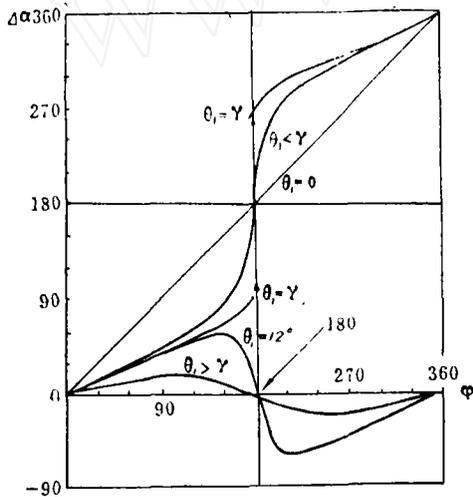


图 7

线在 $\varphi_1 = 180^\circ$ 处有个不连续点。必须注意, $\varphi_1 = 0^\circ$ 与 $\varphi_1 = 360^\circ$, $\Delta\alpha = 0^\circ$ 与 $\Delta\alpha = 360^\circ$ 实际上是同一个点。为了便于计算, 要求 $\Delta\alpha$ 只在 $|0 \sim 180|$ 内变化, 改换形式可得图6(1)。

建议《斜交定向》原图4的 $\alpha - \alpha$ 关系取图6或图7的形式, 则可不需变换座标。举该文例一说明:

已知 $\theta_1 = 120^\circ$, $\theta_2 = 18^\circ$, $\alpha_1 = 80^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, 由图6可得A, B, C点, 相应地 $\varphi_1 = 60^\circ$ 和 300° (或负 60°), $\Delta\alpha = -20^\circ$ 。事实上 $\alpha_2 = 60^\circ$ 的已知条件是多余的, 若已知 α_2 , 问题变成求 φ_1 , 用作图法也可得到。

孔内定向装置的方位角, 《斜交定向》中提出的方法可归纳为下式, 即:

$$\alpha_{真} = \alpha_0 + \alpha_{模} = 80^\circ + 300^\circ (-60^\circ) = 20^\circ$$

亦即 $\alpha_{真} = \alpha_1 + \varphi_1$ 的关系式, 这不妥当, 应当通过(1)一(4)式换算, 若用(2)式则 $\alpha_{真} = 80^\circ + (-62^\circ 18') = 17^\circ 42'$ 。本文所用符号与该文所用符号相对应为: $\theta_1 = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$, $\alpha_1 = \alpha_0$, $\alpha_2 = \alpha$, $\varphi_1 = \alpha_{模}$ 。

定向导斜时, 为了测投到孔内的下半面定位座相对于原弯曲方向的终点角, 于1963年在239勘探队曾用氢氟酸法测定。也可以用定盘测斜仪来测。

斜交测斜法提出了一些新问题, 该法的优点在于扩大了测量范围, 可应用于更小顶角情况, 因为这时仪器误差较大。

自然, 计算仅是问题的一方面, 实际操作中, 由于孔内条件的复杂性, 每下一次楔子可改变的顶角及方位角大小是有限的, 往往达不到预期的结果。在设计中应考虑到这一点。