

引言

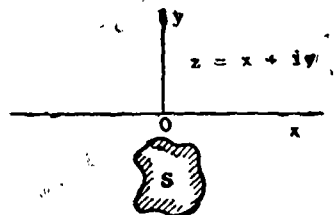
利用位场解析延拓方法解释重磁异常,不同作者采用不同的数学方法,导出了各种不同形式的简易公式。表面看来,这些公式之间似乎毫无联系,以致无从比较优劣,而只能依靠纯实验的办法来检验。

但目前常用的几个解析延拓的近似公式,几乎都是解析函数插补多项式的特殊情形。所以本文试图以二维问题为例,利用复变解析函数的多项式插补理论,建立二维位场解析延拓的统一公式。这样不仅可以了解过去所用的各种公式之间在本质上的联系,还可以比较各种不同的解析延拓方法。甚至还可以建立新的解析延拓方法。

但这里要强调指出的是,在所有讨论中,都假定观测数据是绝对精确的,原始数据中的各种误差均忽略不计。因此,在实际使用这些公式时,决不能认为使用愈精确的公式,计算结果就愈好。事实上,应用过于精确的公式计算,不仅浪费时间,而且还要导致越来越大的误差。

一、问题的数学陈述

在垂直于无限长走向的地质体的观测剖面上,选取直角坐标系 Oxy ,使实轴 Ox 沿地表上观测剖面的方向,虚轴 Oy 垂直于地表向上。用 S 表示地质体与 Oxy 平面相交的截面区域,复数 $z = x + iy$ 表示区域 S 以外剖面上点的复坐标(见图)。



众所周知,在区域 S 外,磁位(或者重力位) $U(x, y)$ 满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

即,函数 $U(x, y)$ 在 S 以外的区域上为一个调和函数。

引进位函数 $U(x, y)$ 的共轭调和位 $V(x, y)$ (只取调和函数 $U(x, y)$ 的共轭函数的主值),亦即函数 $V(x, y)$ 在 S 以外的区域上满足如下的柯西-黎曼方程:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (1.2)$$

因而,复场位:

$$W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

在 S 以外的区域上为一单值解析函数。

但是,因为磁场强度的水平分量 $H(x, y)$ 和垂直分量 $Z(x, y)$ 〔或重力场强度 $g_x(x, y)$ 和 $g_y(x, y)$ 〕为磁位(或重力位) U 的导数:

$$H = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.3)$$

所以,由方程(1.2)和(1.3),得到

$$W'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = -H(x, y) + iZ(x, y).$$

从而,复场强:

$$W_1(z) = -W'(z) = H(x, y) - iZ(x, y)$$

在 S 以外的区域上亦为一单值解析函数。

如所熟知,在地球物理勘探中,所谓解析延拓,一般指的是:已知在地面($y = 0$)上的场强 $H(x, 0)$ 或 $Z(x, 0)$ 〔或者场位 $U(x, 0)$,或共轭位 $V(x, 0)$ 〕,要求算出下半平面中地质体截面 S 以外的某一指定区域内的场强函数 $H(x, y)$ 和 $Z(x, y)$ 〔或者场位函数 $U(x, y)$ 和 $V(x, y)$ 〕的值。

考虑到位场函数随着远离地质体而逐渐衰减的固有特性,因此,可以假定复场位 $W(z)$,以及它们的各阶导数在无穷远点都是正则的,即,当 $|z| \rightarrow \infty$ 时,则 $|W^{(n)}(z)| \rightarrow 0, n=0, 1, 2, \dots$ 。特别,复场强 $W_1(z)$ 在无穷远点是正则的。

下面,我们仅就复场强 $W_1(z)$ 来讨论,所得一切结果对于复场位以及它们的各阶导数都是适用的。

二、位场函数的解析延拓

在复变解析函数论中,解析延拓的标准方法是幂级数法。这个方法,已经被戈里兹得拉用于位场函数的解析延拓。在本文中,我们利用复变解析函数论中的另一类方法,来推导位场函数的解析延拓公式。

最方便的数学工具,自然是复变解析函数的多项式插补理论[请参阅马库雪维奇著:《解析函数论》和盖尔芳得著:《有限差计算》]。

设 $z_0, z_1, z_2, \dots, z_m$ 为上半平面 $y \geq 0$ 中任意给定的一组彼此互异的点,我们的目的是:作一个 m 次的多项式 $P_m(z)$,使其满足条件:

$$P_m(z_j) = W_1(z_j), \quad j=0, 1, 2, \dots, m. \quad (2.1)$$

满足(2.1)条件的多项式 $P_m(z)$,称为复变解析函数 $W_1(z)$ 与插补点 $z_j (j=0, 1, 2, \dots, m)$ 相对应的插补多项式。

大家知道,这样的多项式 $P_m(z)$ 只可能有一个。因为如果有另外一个次数不超过 m 次的多项式 $Q(z)$ 也满足条件(2.1),那么,两者之差

$$P_m(z) - Q(z)$$

在 $m+1$ 个插补点 $z_0, z_1, z_2, \dots, z_m$ 上必等于零,而且其次数又不超过 m ,故它的系数非全为零不可。

换言之必有

$$P_m(z) \equiv Q(z).$$

这就是说,在次数小于 $m+1$ 次的多项式中,只存在唯一的一个满足条件(2.1)的多项式。

现在,具体地来构造多项式 $P_m(z)$ 。为此,只需作一个多项式 $\Omega_n(z)$,使其于点 $z = z_n = 1$,而在其它点 $z = z_j (j \neq n)$ 上等于零。事实上,如果这样的多项式 $\Omega_n(z)$ 存在,那么,形如

$$P_m(z) = \sum_{n=0}^m \Omega_n(z) W_1(z_n)$$

的多项式即为所求的插补多项式。

多项式 $\Omega_n(z)$ 是很容易作出的。实际上,因为 $\Omega_n(z)$ 是以点 $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_{n+1}, \dots, z_m$ 为根,所以,它必为形式

$$\Omega_n(z) = A(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1})(z - z_{n+1}) \cdots (z - z_m),$$

其中的常数 A 由条件 $\Omega_n(z_n) = 1$ 定出为:

$$A = \frac{1}{(z_n - z_0)(z_n - z_1) \cdots (z_n - z_{n-1})(z_n - z_{n+1}) \cdots (z_n - z_m)}$$

从而求得:

$$\Omega_n(z) = \frac{(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1})(z - z_{n+1}) \cdots (z - z_m)}{(z_n - z_0)(z_n - z_1) \cdots (z_n - z_{n-1})(z_n - z_{n+1}) \cdots (z_n - z_m)}$$

在习惯上引用记号

$$\omega_m(z) = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_m),$$

$$\omega'_m(z_n) = (z_n - z_0)(z_n - z_1) \cdots (z_n - z_{n-1})(z_n - z_{n+1}) \cdots (z_n - z_m),$$

则 $\Omega_n(z)$ 可以写成更紧凑的形式

$$\Omega_n(z) = \frac{\omega_m(z)}{(z - z_n)\omega'_m(z_n)}.$$

这样,我们便最后求得所要求的多项式为:

$$P_m(z) = \sum_{n=0}^m \frac{\omega_m(z)}{(z - z_n)\omega'_m(z_n)} W_1(z_n) \quad (2.2)$$

公式(2.2), 通常称为 m 次的拉格朗日插补多项式。

利用拉格朗日插补多项式(2.2)近似地代替 $W_1(z)$, 并且将 $P_m(z)$ 向下半平面中进行外推, 我们就可以导出目前在地球物理勘探中常用的一些解析延拓的近似公式。例如:

1. 命 $m=3$, $z=-ikh$, $z_0=0$, $z_1=h$, $z_2=-h$, $z_3=ikh$, 于是, (2.2)式便退化为形式

$$W_1(-ikh) \doteq 2(k^2+1)W_1(0) - k^2W_1(h) - k^2W_1(-h) - W_1(ikh).$$

把上式的实部和虚部分开, 则求得 (仅写出 Z 的公式)

$$Z(0, -kh) \doteq 2(k^2+1)Z(0,0) - k^2Z(h,0) - k^2Z(-h,0) - Z(0,kh).$$

特别, 令 $k=1$, 我们便得到用差分方法解拉普拉斯方程, 或由调和函数的高斯中值定理所建立的网络公式

$$Z(0, -h) \doteq 4Z(0,0) - Z(h,0) - Z(-h,0) - Z(0,h). \quad (2.3)$$

根据泊松公式, 利用初等的内插求积公式得到上式中 $Z(0,h)$ 的近似公式:

$$\begin{aligned} Z(0,h) \doteq & 0.2952Z(0) + 0.1352\overline{Z}(h) + 0.0660\overline{Z}(2h) + 0.0325\overline{Z}(3h) + 0.0190\overline{Z}(4h) \\ & + 0.0124\overline{Z}(5h) + 0.0087\overline{Z}(6h) + 0.0064\overline{Z}(7h) + \dots \end{aligned} \quad (2.3a)$$

其中 $\overline{Z}(nh) = Z(nh,0) + Z(-nh,0)$, $n=1, 2, \dots$ 。

将式(2.3a)代入(2.3), 可求得公式

$$\begin{aligned} Z(0, -h) \doteq & 3.7048Z(0,0) - 1.1653\overline{Z}(h) - 0.0660\overline{Z}(2h) - 0.0325\overline{Z}(3h) \\ & - 0.0190\overline{Z}(4h) - 0.0124\overline{Z}(5h) - 0.0087\overline{Z}(6h) \end{aligned} \quad (I)_1$$

2. 命 $m=4$, $z=-ih$, $z_0=0$, $z_1=\frac{h}{2}$, $z_2=-\frac{h}{2}$, $z_3=h$, $z_4=-h$, 于是(2.2)就变为斯图

帕克用幂级数方法所建立的公式:

$$\begin{aligned} W_1(-ih) \doteq & 10W_1(0) + i\frac{8}{3} [W_1(\frac{h}{2}) - W_1(-\frac{h}{2})] - i\frac{5}{6} [W_1(h) - W_1(-h)] \\ & - \frac{16}{3} [W_1(\frac{h}{2}) + W_1(-\frac{h}{2})] + \frac{5}{6} [W_1(h) + W_1(-h)]. \end{aligned}$$

同样, 把上列公式的实部和虚部分开, 从而便求得公式

$$\begin{cases} H(0, -h) \doteq 10H(0,0) + \frac{8}{3}\Delta Z(\frac{h}{2}) - \frac{5}{6}\Delta Z(h) - \frac{16}{3}\overline{H}(\frac{h}{2}) + \frac{5}{6}\overline{H}(h); \\ Z(0, -h) \doteq 10Z(0,0) - \frac{8}{3}\Delta H(\frac{h}{2}) + \frac{5}{6}\Delta H(h) - \frac{16}{3}\overline{Z}(\frac{h}{2}) + \frac{5}{6}\overline{Z}(h), \end{cases} \quad (2.4)$$

其中

$$\overline{H}(\frac{h}{2}) = H(\frac{h}{2},0) + H(-\frac{h}{2},0), \quad \overline{H}(h) = H(h,0) + H(-h,0),$$

$$\Delta H(\frac{h}{2}) = H(\frac{h}{2},0) - H(-\frac{h}{2},0), \quad \Delta H(h) = H(h,0) - H(-h,0).$$

根据希尔伯特公式, 利用内插求积方法, 可将上式中的 H 分量近似地表为

$$\begin{aligned} H(0,0) \doteq & 0.3183\Delta Z(\frac{h}{2}) + 0.3497\Delta Z(h) + 0.1626\Delta Z(2h) + 0.1071\Delta Z(3h) + 0.0800\Delta Z(4h) \\ & + 0.0639\Delta Z(5h) + 0.0532\Delta Z(6h) + 0.0456\Delta Z(7h) + 0.0398\Delta Z(8h) + 0.0354\Delta Z(9h) \\ & + 0.0319\Delta Z(10h) \dots \end{aligned} \quad (2.4a)$$

其中 $\Delta Z(\frac{h}{2}) = Z(\frac{h}{2},0) - Z(-\frac{h}{2},0)$,

$$\Delta Z(nh) = Z(nh,0) - Z(-nh,0), \quad n=1, 2, 3, \dots$$

将(2.4a)式代入(2.4)式, 经简单计算和整理后, 则获得近似公式:

$$\left\{ \begin{aligned} H(0, -h) &= 3.7516\Delta Z\left(\frac{h}{2}\right) + 1.1018\Delta Z(h) + 2.0067\Delta Z(2h) + 1.2735\Delta Z(3h) \\ &\quad + 0.9425\Delta Z(4h) + 0.7417\Delta Z(5h) + 0.6233\Delta Z(6h) + 0.5327\Delta Z(7h) \\ &\quad + 0.4655\Delta Z(8h) + 0.4137\Delta Z(9h) - [2.4670\Delta Z(1.5h) + 1.8912\Delta Z(2.5h) \\ &\quad + 0.9979\Delta Z(3.5h) + 0.7675\Delta Z(4.5h) + 0.6245\Delta Z(5.5h) + 0.5269\Delta Z(6.5h) \\ &\quad + 0.4555\Delta Z(7.5h) + 0.4011\Delta Z(8.5h) + 0.3344\Delta Z(9.5h)] : \quad (I)_2 \\ Z(0, -h) &= 11.1148\bar{Z}(0,0) + 0.2022\bar{Z}(2h) + 0.0586\bar{Z}(3h) + 0.0366\bar{Z}(4h) \\ &\quad + 0.0233\bar{Z}(5h) + 0.0153\bar{Z}(6h) + 0.0116\bar{Z}(7h) + 0.0085\bar{Z}(8h) \\ &\quad + 0.0057\bar{Z}(9h) - [4.6427\bar{Z}\left(\frac{h}{2}\right) + 0.1210\bar{Z}(h) + 0.2336\bar{Z}(1.5h) \\ &\quad + 0.1480\bar{Z}(2.5h) + 0.0723\bar{Z}(3.5h) + 0.0496\bar{Z}(4.5h) + 0.0285\bar{Z}(5.5h) \\ &\quad + 0.0203\bar{Z}(6.5h) + 0.0155\bar{Z}(7.5h) + 0.0117\bar{Z}(8.5h) + 0.0096\bar{Z}(9.5h)] . \end{aligned} \right.$$

3. 在公式(2.2)中, 如果置 $m = 2N+1$; $z = -ikh$; $z_0 = 0$, $z_1 = h$, $z_2 = 2h$, ..., $z_N = Nh$, $z_{N+1} = -h$, $z_{N+2} = -2h$, ..., $z_{2N} = -Nh$, $z_{2N+1} = ikh$, 那么, 得到

$$\begin{aligned} W_1(-ikh) &= \frac{2(k^2+1)(k^2+2^2)\cdots(k^2+N^2)}{(N!)^2} W_1(0) \\ &\quad + \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{2(k^2+1)(k^2+2^2)\cdots(k^2+N^2)}{(k^2+n^2)(N+n)!(N-n)!} [W_1(nh) + W_1(-nh)] - W_1(ikh). \end{aligned}$$

把上式的实部和虚部分开, 于是, 我们求得公式(只对分量 Z 写出):

$$\begin{aligned} Z(0, -h) &= \frac{2(k^2+1)(k^2+2^2)\cdots(k^2+N^2)}{(N!)^2} Z(0,0) \\ &\quad + \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{2(k^2+1)(k^2+2^2)\cdots(k^2+N^2)}{(k^2+n^2)(N+n)!(N-n)!} \bar{Z}(nh) - Z(0, kh). \end{aligned} \quad (2.5)$$

现在, 在(2.5)式中, 若令 $N = 3$, 则得公式:

$$\begin{aligned} Z(0, -kh) &= \frac{(k^2+1)(k^2+4)(k^2+9)}{18} Z(0,0) - \frac{k^2(k^2+4)(k^2+9)}{24} \bar{Z}(h) \\ &\quad + \frac{k^2(k^2+1)(k^2+9)}{60} \bar{Z}(2h) - \frac{k^2(k^2+1)(k^2+4)}{360} \bar{Z}(3h) - Z(0, kh). \end{aligned} \quad (2.6)$$

特别, 当 $k = 1$ 时, 则得到类似于卢贤栋的公式

$$Z(0, -h) = \frac{50}{5} Z(0,0) - \frac{25}{12} \bar{Z}(h) + \frac{1}{3} \bar{Z}(2h) - \frac{1}{36} \bar{Z}(3h) - Z(0, h).$$

把上式中的 $Z(0, h)$ 利用公式(2.3a)代入, 且只取其前七项, 则求得近似公式:

$$\begin{aligned} Z(0, -h) &= 5.2604Z(0,0) - 2.2486\bar{Z}(h) + 0.2673\bar{Z}(h)\bar{Z}(2h) \\ &\quad - 0.0603\bar{Z}(3h) - 0.0190\bar{Z}(4h) - 0.0124\bar{Z}(5h) - 0.0087\bar{Z}(6h). \end{aligned} \quad (I)_3$$

4. 最后, 在公式(2.2)中, 命 $z = -ih$, $z_0 = 0$, $z_1 = ih$, $z_2 = i2h$, ..., $z_n = in h$, ...
于是, (2.2)简化为下列形式:

$$W_1(-ih) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{k=0}^m (-1)^{k-m} C_m^k W_1(ink),$$

式中 C_m^k 为二项式系数;

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

如果再把上式的实部和虚部分开, 那么, 我们便获得休斯、安德烈耶夫分别用交互影响法及逐次逼近法解柏松积分方程和斯特拉霍夫利用复变函数论方法所建立的解析延拓公式(只写出分量 Z):

$$Z(0, -h) \doteq \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \Delta_{y,h}^m Z(0,0), \quad (2.7)$$

其中 $\Delta_{y,h}^m Z(0,0)$ 是函数 $Z(x,y)$ 沿 Oy 轴上的关于坐标原点 $(0,0)$, 具有步长 h 的 m 阶有限差分:

$$\Delta_{y,h}^m Z(0,0) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-m} C_m^k Z(0, kh). \quad (2.8)$$

在(2.7)式中, 如果忽略掉 m 阶以上的有限差分, 那么, 我们获得公式:

$$Z(0, -h) \doteq (m+1)Z(0,0) - \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} C_{m+1}^{k+1} Z(0, kh), \quad (2.9)$$

若令 $m=3$, 则有

$$Z(0, -h) \doteq 4Z(0,0) - 6Z(0,h) + 4Z(0,2h) - Z(0,3h). \quad (2.10)$$

对于(2.10)式中的 $Z(0, kh)$, ($k=1, 2, 3$) 如果使用近似公式〔求法用(2.4a)式〕:

$$Z(0, kh) \doteq \frac{1}{\pi} \left[K_{k,0} Z(0,0) + \sum_{n=1}^{\infty} K_{k,n} \overline{Z}(nh) \right] \quad (2.10a)$$

其中 $K_{k,n} = \arctg \frac{4k}{4(k^2+n^2)-1}$, $k=1, 2, \dots; n=0, 1, 2, \dots$,

那么, 只写出前 7 项, 便得到

$$Z(0, -h) \doteq 2.7477Z(0,0) - [0.5791\overline{Z}(h) + 0.1483\overline{Z}(2h) + 0.0505\overline{Z}(3h) + 0.0238\overline{Z}(4h) + 0.0139\overline{Z}(5h) + 0.0092\overline{Z}(6h)]. \quad (I)_1$$

若令 $m=7$, 则(2.9)变为

$$Z(0, -h) \doteq 8Z(0,0) - 28Z(0,h) + 56Z(0,2h) - 70Z(0,3h) + 56Z(0,4h) - 28Z(0,5h) + 8Z(0,6h) - Z(0,7h). \quad (2.11)$$

同样, (2.11)式中的 $Z(0, kh)$, ($k=1, 2, \dots, 7$) 使用近似公式(2.10a)代替, 于是, 经简单的计算和整理后, 我们立刻得到

$$Z(0, -h) \doteq 4.1441Z(0,0) - [1.3374\overline{Z}(4h) + 0.1297\overline{Z}(2h) + 0.0218\overline{Z}(3h) + 0.0148\overline{Z}(4h) + 0.0114\overline{Z}(5h) + 0.0085\overline{Z}(6h)]. \quad (I)_2$$

对于(2.10)中的 $Z(0, kh)$, ($k=1, 2, 3$), 斯特拉霍夫利用柏松积分公式

$$Z(0, kh) = \frac{kh}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z(\xi, 0)}{\xi^2 + k^2 h^2} d\xi \quad (2.12)$$

代替, 则求得

$$Z(0, -h) \doteq 4Z(0,0) - \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} M_s(\xi) Z(\xi, 0) d\xi, \quad (2.13)$$

就中

$$M_s(\xi) = \frac{6}{\xi^2 + h^2} - \frac{8}{\xi^2 + 4h^2} + \frac{3}{\xi^2 + 9h^2}$$

对(2.13)式中右端的积分, 应用高斯型内插求积公式, 于是, 便可求得公式

$$Z(0, -h) \doteq 2.4320Z(0,0) - [0.4030\overline{Z}(1.077h) + 0.0824\overline{Z}(1.812h)]$$

$$+0.1020 \overline{Z}(2.634h) + 0.0279 \overline{Z}(4.366h) + 0.0209 \overline{Z}(6.057h) \\ + 0.0102 \overline{Z}(8.943h) + 0.0115 \overline{Z}(12.113h) + 0.0044 \overline{Z}(17.887h) \} \quad (\text{I}),$$

斯特拉霍夫, 还制作了一个专供计算(2.13)右端积分的量板。

最后, 就一般情形论, 而将公式(2.12)代入(2.8), 并交换积分和求和的次序, 我们得到

$$\Delta_{y,n}^m Z(0,0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\xi,0) \left[\sum_{k=0}^m (-1)^{k-m} C_m^k \frac{kh}{\xi^2 + k^2 h^2} \right] d\xi \quad (2.14)$$

藉助于已知积分公式

$$\frac{kh}{\xi^2 + k^2 h^2} = \int_0^{\infty} e^{-kh\eta} \cos \xi \eta d\eta,$$

则(2.14)便化为形式

$$\Delta_{y,h}^m Z(0,0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^m (-1)^{k-m} C_m^k e^{-kh\eta} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\xi,0) \cos \xi \eta d\xi \quad (2.15)$$

把(2.15)代入(2.7), 交换积分和求和的次序, 同时利用展式

$$(e^{-h\eta} - 1)^m = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-m} C_m^k e^{-kh\eta}$$

$$\text{和} \quad e^{h\eta} = [1 + (e^{-h\eta} - 1)]^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (e^{-h\eta} - 1)^m,$$

我们便获得更为紧凑形式的公式

$$Z(0, -h) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{h\eta} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\xi,0) \cos \xi \eta d\xi. \quad (2.16)$$

在实际计算中, 应用公式(2.16)比较困难。下面, 我们从公式(2.16)出发, 来推导一个计算它的近似公式。

为此目的, 在(2.16)中实现变数替换:

$$\eta = \frac{\pi}{L} \zeta,$$

并且, 假定选取 \$L\$ 如此之大, 使得除在 \$Ox\$ 轴上的区间 \$[-L, +L]\$ 内以外, \$Z(\xi, 0)\$ 等于零。于是 (2.16) 变成形式

$$Z(0, -h) = \frac{1}{L} \int_0^{\infty} e^{\frac{\pi h}{L} \zeta} d\zeta \int_{-L}^{+L} Z(\xi,0) \cos \frac{\pi \zeta}{L} \xi d\xi. \quad (2.17)$$

现在, 首先对关于 \$\zeta\$ 的积分应用简单的内插求积公式来代替。此时只要赋予 \$\zeta\$ 不同的正整数 \$0, 1, 2, \dots, l, \dots\$, 于是, 得到

$$Z(0, -h) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{\frac{\pi l}{L} h} \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} Z(\xi,0) \cos \frac{\pi l}{L} \xi d\xi \quad (2.18)$$

其次, 再对(2.18)中关于 \$\xi\$ 的积分应用内插求积公式。此时把积分区间 \$[-L, +L]\$ 用分点 \$-nh, -(n-1)h, \dots, -h, 0, h, \dots, nh, \dots\$ 进行等分, 并用近似的和来代替这个积分, 则有

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} Z(\xi,0) \cos \frac{\pi l}{L} \xi d\xi = \frac{1}{n} \sum_{n=-n}^{n-1} Z(nh,0) \cos \frac{\pi l n}{n}. \quad (2.19)$$

把(2.19)代入(2.18), 并交换求和的次序, 则得到

$$Z(0, -h) = \sum_{n=-N}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{\infty} e^{\frac{\pi l}{N}} \cos \frac{\pi l n}{N} \right) Z(nh, 0). \quad (2.20)$$

很显然, 我们只要求出下列极限:

$$A_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{\infty} e^{\frac{\pi l}{N}} \cos \frac{\pi l n}{N} \right),$$

则(2.20)就可以写成形式:

$$Z(0, -h) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n Z(nh, 0). \quad (2.21)$$

为了求系数 A_n , 应用三角函数公式

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$$

和等比级数的求和公式

$$\sum_{p=0}^N q^p = \frac{1-q^{N+1}}{1-q},$$

则很容易求得

$$\begin{aligned} A_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{l=0}^N \frac{1}{2} \left(e^{\frac{\pi l}{N}} + i \frac{\pi l n}{N} + e^{\frac{\pi l}{N}} - i \frac{\pi l n}{N} \right) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N} \left(\frac{1-e^{\frac{(N+1)\pi}{N}} + i \frac{n(N+1)\pi}{N}}{1-e^{\frac{\pi}{N}} + i \frac{n\pi}{N}} + \frac{1-e^{\frac{(N+1)\pi}{N}} - i \frac{n(N+1)\pi}{N}}{1-e^{\frac{\pi}{N}} - i \frac{n\pi}{N}} \right) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2N} \left(\frac{(-1)^n e^{\frac{\pi}{N}}}{1-e^{-\left(\frac{\pi}{N} + i \frac{n\pi}{N}\right)}} + \frac{(-1)^n e^{\frac{\pi}{N}}}{1-e^{-\left(\frac{\pi}{N} - i \frac{n\pi}{N}\right)}} + \frac{1}{1-e^{\frac{\pi}{N}} + i \frac{n\pi}{N}} + \frac{1}{1-e^{\frac{\pi}{N}} - i \frac{n\pi}{N}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n e^{\frac{\pi}{N}}}{\pi + i\pi n} + \frac{(-1)^n e^{\frac{\pi}{N}}}{\pi - i\pi n} - \frac{1}{\pi + i\pi n} - \frac{1}{\pi - i\pi n} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n e^{\frac{\pi}{N}} - 1}{1+n^2}. \end{aligned}$$

这样, 把上式代入(2.21), 我们就得到林鲍乌公式.

$$Z(0, -h) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{\frac{\pi}{N}} - 1}{1+n^2} Z(nh, 0). \quad (2.22)$$

或者写成形式:

$$\begin{aligned} Z(0, -h) &\approx 7.0476 \overline{Z}(0, 0) - 3.8421 \overline{Z}(h) + 1.4095 \overline{Z}(2h) - 0.7684 \overline{Z}(3h) \\ &\quad + 0.4146 \overline{Z}(4h) - 0.2955 \overline{Z}(5h) + 0.1905 \overline{Z}(6h) - 0.1537 \overline{Z}(7h) \\ &\quad + 0.1084 \overline{Z}(8h) - 0.0937 \overline{Z}(9h) + 0.0698 \overline{Z}(10h) + \dots \end{aligned} \quad (I)_4$$

三、误差估计及解析延拓公式的比较

综上所述, 我们看到, 目前在地球物理勘探中所提出的, 用以进行解析延拓的几个简易公式, 几乎都是复变解析函数的拉格朗日插补多项式的特殊情形. 不仅如此, 只要我们在拉格朗日插补多项式中适当地选择插补点, 从原则上讲, 便可以获得无穷多个解析延拓的公式.

但是, 插补多项式(2.2)只是近似地描述场强函数 $W_1(z)$ 。更确切地说, 应用拉格朗日插补多项式(2.2), 我们只是把场强函数 $W_1(z)$ 用一个 m 次的多项式 $P_m(z)$ 来代替, 而此多项式与场强函数仅在 $m+1$ 个点上相等。当然, 如果场强函数 $W_1(z)$ 本身就是 m 次多项式, 那么, $W_1(z)$ 便恒等于 $P_m(z)$ 。然而, 在实际问题中, $W_1(z)$ 除常数外永远不可能是多项式。因此, 当用多项式 $P_m(z)$ 代替 $W_1(z)$ 时, 在非插补点 z 上, 差数 $W_1(z) - P_m(z)$ 就异于零而成为计算上的误差。这个差数称为拉格朗日插补多项式的余项, 通常用记号 $R_m(z)$ 来表示它:

$$R_m(z) = W_1(z) - P_m(z). \quad (3.1)$$

这样一来, 当用插补多项式 $P_m(z)$ 近似他去代替 $W_1(z)$ 而实行解析延拓时, 一个重要的问题就是如何选取插补点, 使得余项 $R_m(z)$ 在所论区域上为最小的问题。

首先, 十分自然地想到, 当插补点 $z_0, z_1, \dots, z_m$ 的数目越多, 则所得到的插补多项式 $P_m(z)$ 在所论区域上, 通常就越接近于函数 $W_1(z)$ 。一般说来, 插补点的数目愈多, 在所论区域上余项 $R_m(z)$ 就愈小。由此可见, 在上一节我们所导出的一些解析延拓公式中, 若不考虑观测数据中的误差的影响, 则最精确的公式是(I)₄, 其次是(I)₁和(I)₂, 再次是(I)₃, 精度最差的是(I)₁、(I)₁和(I)₃。

但是, 减小余项 $R_m(z)$, 不但靠增加插补点的数目来达到, 而且还依靠这些点的选择。为了更确切地说明这个事实, 需要导出余项 $R_m(z)$ 的解析表达式。

为此目的, 我们说明多项式(2.2)可以化成如下的积分形式:

$$P_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{W_1(\zeta)}{\omega_m(\zeta)} \cdot \frac{\omega_m(\zeta) - \omega_m(z)}{\zeta - z} b\zeta \quad (3.2)$$

其中 c 为区域 S 以外的, 包含点 $z_k (k=0, 1, 2, \dots, m)$ 在内的有限, 或无限的逐段光滑的闭曲线。事实上, 命

$$\varphi(\zeta) = \frac{W_1(\zeta)}{W_m(\zeta)} \cdot \frac{\omega_m(\zeta) - \omega_m(z)}{\zeta - z}$$

若把 $\omega_m(z)$ 和 $\omega_m(z)$ 展成幂级数:

$$\omega_m(\zeta) = \sum_{k=0}^m a_k \zeta^k, \quad \omega_m(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k,$$

$$\begin{aligned} \text{则有} \quad \frac{\omega_m(\zeta) - \omega_m(z)}{\zeta - z} &= \frac{\sum_{k=0}^m a_k (\zeta^k - z^k)}{\zeta - z} = a_1 + a_2 (\zeta + z) + \dots + a_m (\zeta^{m-1} + \dots + z^{m-1}) \\ &= a_1 + a_2 \zeta + \dots + a_m \zeta^{m-1} + (a_2 + a_3 \zeta + \dots + a_m \zeta^{m-2}) z + \dots + a_m z^{m-1} \\ &= A_{m-1}(\zeta) + A_{m-2}(\zeta) z + \dots + A_0(\zeta) z^{m-1} \end{aligned}$$

于是, 点 $\zeta = z$ 不是函数 $\varphi(\zeta)$ 的奇点。这样, 函数 $\varphi(\zeta)$ 在曲线 C 内只有一级极点 $z_k (k=0, 1, 2, \dots, m)$, 从而, 由残数定理, 我们得到

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{W_1(\zeta)}{\omega_m(\zeta)} \cdot \frac{\omega_m(\zeta) - \omega_m(z)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^m \operatorname{Res}_{\zeta=z_k} \varphi(\zeta), \quad (3.3)$$

此处记号 $\operatorname{Res}_{\zeta=z_k} \varphi(\zeta)$ 表示函数 $\varphi(\zeta)$ 在点 $z_k (k=0, 1, 2, \dots, m)$ 的残数。

又因 $\varphi(\zeta)$ 在点 $\zeta = z_k$ 邻域内的罗朗展开式为

$$\varphi(\zeta) = \frac{a_{-1}}{\zeta - z_k} + a_0 + a_1(\zeta - z_k) + \dots,$$

所以, 求得 $\varphi(\zeta)$ 的残数表示式为:

$$\operatorname{Res}_{\zeta=z_k} \varphi(\zeta) = a_{-1} = [\varphi(\zeta)(\zeta - z_k)]_{\zeta=z_k} = \left\{ \frac{W_1(\zeta)}{\omega_m(\zeta)} \cdot \frac{\omega_m(\zeta) - \omega_m(z)}{\zeta - z} (\zeta - z_k) \right\}_{\zeta=z_k}$$

$$= \frac{\omega_m(z)W_1(z_k)}{(z-z_k)\omega'_m(z_k)}, k=0,1,2,\dots,m. \quad (3.4)$$

把(3.4)式代入(3.3), 我们就立刻得到拉格朗日插补多项式(2.2)。至此, (3.2)式证毕。

进一步, 利用 $P_m(z)$ 的积分表示式(4.2)和公式

$$W_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{W_1(\xi)}{\xi-z} d\xi,$$

我们便得到余项 $R_m(z)$ 的积分形式的表示式

$$R_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{W_1(\xi)}{\xi-z} \frac{\omega_m(\xi)}{\omega_m(z)} d\xi, \quad (3.5)$$

由式(3.5)可以看出, 如果在所论区域上, 插补点都集中在上半平面的某一位置上, 那么, 对于下半平面中离插补点较远的点 z , 多项式 $\omega_m(z)$ 的模 $|\omega_m(z)|$ 便有很大的增加, 从而, 余项的模 $|R_m(z)|$ 也就有很大的增加。这一简单的事实表明, 为了使插补多项式(2.2)更好地逼近于函数 $W_1(z)$, 在某种意义上说, 我们应当在所论区域上均匀地选择插补点 $z_0, z_1, z_m, \dots$ 。实际上, 当插补点的数目确定时, 我们能够选取在所论区域上使多项式 $\omega_m(z)$ 的模为最小的插补点。然而, 这个问题的探究只有理论上的意义。在应用中, 在所论区域上选取具有相等间隔的插补点常常是很方便的, 因为在这种情形下, 所得插补多项式不但具有对称性, 而且也很简单。

由于上述原因, 所以在上面我们所导出的一系列简易的解析延拓公式中, 一般就按照两类方式来选择插补点: 一类是在实轴上均匀地选取插补点(除个别点外), 另一类是在虚轴上均匀地选取插补点。

最后, 为了要得到误差的估计式, 我们把延拓区域取下半平面中的带形域 $-H \leq y < 0$ ($H = \text{常量} > h$), 于是, 若考虑到 $W_1(z)$ 在无穷远点的正则性, 则(3.5)便可以改写成下列形式:

$$R_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_1(\xi-iH)}{\xi-iH-z} \frac{\omega_m(z)}{\omega_m(\xi-iH)} d\xi. \quad (3.6)$$

如果按照第一类方式选取插补点: $z_0=0, z_1=h, z_2=2h, \dots, z_N=Nh, z_{N+1}=-h, z_{2N}=-Nh, z_{2N+1}=ih$, 那么得到余项的估计式为:

$$|R_{2N+1}^{(1)}(-ih)| \leq \frac{(1+1)(1+2^2)\dots(1+N^2)h^{2N+2}}{\pi H(H^2-h^2)(H^2+h^2)(H^2+2^2h^2)\dots(H^2+N^2h^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_1(\xi-iH)| d\xi. \quad (3.7)$$

若依第二类方式选取插补点: $z_0=0, z_1=ih, z_2=i2h, \dots, z_{2N+1}=i(2N+1)h$, 则得到余项的估计式为:

$$|R_{2N+1}^{(2)}(-ih)| \leq \frac{(2N+1)h^{2N+2}}{\pi(H-h)H(H+h)(H+2h)\dots(H+(2N+1)h)} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_1(\xi-iH)| d\xi. \quad (3.8)$$

应用拉格朗日插补多项式实行解析延拓的另一个重要问题, 是插补多项式的收敛区域的问题。关于这个问题, 我们介绍读者去参看前面提到的盖尔芳得的专著。

本文只论述了解析延拓的古典公式, 关于克服原始数据中的干扰和各种误差的影响, 以及位场解析延拓的应用范围等问题, 作者准备以后再专门讨论。