

用內分点佈設測角圖根的研討

鞍山分局 罗光燭

測角圖根点虽然是較低級的控制点，一般技术要求不高，但由于它数量較多，在控制测量的总工作量中佔有相当的比重。因此採用什么样的佈設方式能够做到既省工又合乎精度要求，一直是值得研究和討論的問題。最近由于領導上的大力支持，我們得在某地区嘗試地运用了一种較比不同的佈設方法——內分点佈設法，即在四等三角点下佈設內分点，再在內分点間敷設測圖用的附合鎖。經实践証明：在一定的条件下，它还是可用的，能够提高效率，滿足要求。茲拟就这一方法的原理和我們实践所得作一介紹。由于技术水平所限和实验的局限性，在說明問題上可能有不全面甚至不合理的地方，希同志們加以指正。

由于这次做的控制是只打算供測千分之一地形圖用，因此下面的叙述和結論也暫限于 1/1000 測圖的范围，关于精度也概以地質部編之「大比例尺測量规范」(下简称规范)来衡量。在該规范中对 1/1000 測圖用的控制有如下基本要求：

1. 独立測角圖根網边長 0.3~0.6 公里，最弱边相对精度为 1/6000 (§ 16 及 § 194)。
2. 加密測角圖根網一般边長 80~120 公尺，可以敷設在独立測角圖根点(或边)之間。圖形不得超过 15 个，求巨角在特殊情况下亦不得小于 20 度 (§ 195 及 § 203)。
3. 加密測角圖根網允許用簡略方法平差，如有公共点，其坐标較差在 0.2 公尺以內是允許的，並可取用其平均值 (§ 278)。
4. 四等三角点边長無明确規定，但适用于 1/2000 比例尺的边長为 1.5~5.0 公里，1/1000 应适当縮短 (§ 82)，茲假定最長为 1.5 公里。

(一) 我們以前的佈網方式

自 1954 年以后，我們佈設測圖控制的方案大都是在兩個四等三角点或四等补点間，用線形鎖作第一次加密(此类点以下简称圖根点，但在我队則已習慣称它为 $\Pi \cdot \Pi$ 点，精度按独立測角圖根点来要求：)。在兩圖根点之間 再用線形鎖或附合鎖作第二次加密

(下简称加密点，但在我队習慣称它为 N 点，精度按独立測角圖根点来要求)。作为直接測圖用。

我們知道：如果線形鎖的起始边不是丈量而是假設的，則它的条件方程式，除开三角形三內角之和应为 180° 的条件外，一般認為它只有一个多边形閉塞条件(或方位条件)，而沒有边条件。如圖 1 所示，一用內定向，一用外定向，但它的多边形或方位角条件都是：

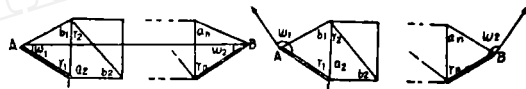


圖 1

$$Vw_1 + Vr_1 + Va_2 + Vb_2 \dots + Vr_n + Vw_2 + W = 0$$

因此可知：內外定向都可用同一公式(即同一表格)进行計算。同时也可看出，那怕有个三角形的 a, b 角互换(例如抄倒了)，並不影响上式的成立，也就是說，一样能平差和求出真边長，一直要到計算坐标增量时，由于坐标条件的限制，才發現不对头。如果是属于观测成果不够好之类的誤差，就更难發現了。因为：

1. 不能不容許有坐标閉合差(因为沒考虑坐标条件，如加以考虑則計算更繁)。
2. 虽然角測得不大好，但可能有偶合將坐标閉合差抵消成不太大。
3. 不一定是求巨角(a, b 角)的問題，坐标閉不上倒很可能是定向角測得不对。

因之，在边的精度判断上，契巴塔廖夫測量学下卷二分冊 478 頁中曾指出：「沒有任何材料可作判断的依据。」所以把这种不量边的線形鎖作为相当于独立測角圖根網級的加密控制来用(即允許再發展一次)，它的最弱边能否达 1/6000，並無理論上的保証。根据我們 1956 年秋在某区作的 14 条線形鎖来看(佈置在四等点下，用威尔特 T_2 三測回測定)，經实量或採用重合边檢查，較差与边長之比有的达十一万分之一，有的只几千分之一，精度頗为不均，过去我們为了对付这点，曾採用过密佈方式，如圖 2 所

示：先独立地計算 A~B, B~C, C~A 三条綫形鎖，其三个公共边的边長都有二个計算值。然后在三条鎖間的空隙部份，再用中心形

(或附合鎖等其他圖形) 填充之。中心形的起算边，可用任意一条鎖的任意一条边 (或二条边)，通常是採

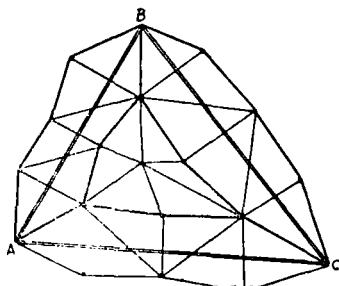


圖 2

用認為精度較好的边。这样如圖 2 所示，又會出現五个公共边，由于公共边的互相牽連，便能够發現那兒观测有問題，如果所有的公共边兩次 (或兩次以上) 推算出来的边長，其不符值在一定的允許範圍內 (例如較差：边長 = 1 : 10,000 或 1 : 15,000)，則取用其平均数，最后把綫形鎖拆开按附合導線計算 (或者在一个平差区域内組成結点，結点平差后才計算。) 这样綫形鎖的穩定性是增強了，但平差計算的工作量却大大增加了 (尤其是組成結点的)，又由于它是近似平差，在作附合導線計算时，一个点會出現兩個 (或兩個以上的) 坐标值。必須再取用其中数，为了便于下一級加密点的計算和成果間的一致性，边長与方位就必須反算。此外在今天來說，这种密佈方式也有点过旧了。(註一)

我們也採用过另一种較普通的加密方式的，如圖 3 所示：在四等網中先插入几个补点，如 I, II, 然后利

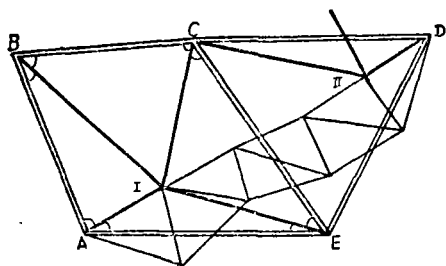


圖 3

用 A~I, II~D 敷設附合鎖。这样做精度是足够的，像点 I 的点位中誤差在 $m \leq 5''$ ，边長 ≤ 1.5 公里的条件下，是能在 3cm 以內的，即使短边边長为 250 公尺时，相对精度也能在 1/10,000 以上。但是：

1. 插入点外業內業的工作量都較大。例如在三角形中插入一点，要設三、四个站。計算上以一般按

术員水平，需要二个人对算二天左右 (从平差起至登完卡片止)，因此不宜多量插入，只能插入不多的点作为佈設圖根点的依据，而不能全靠它来直接發展加密点。

2. 这样佈置的圖根点鎖即令它的最弱边能达到 1/6000 (这表示：测角精度要高，圖形要少，选点很不容易)，但与下面介紹的內分点来比較，無論外業內業都費事得多。

(二) 用內分点佈設測角圖根

假如我們在一定的条件下 (那些条件下面將分別談到)，除了应用上述方法以外，还採用另一种加密方式，如圖 4 所示：先在 B 点放站照准 C，根据实际

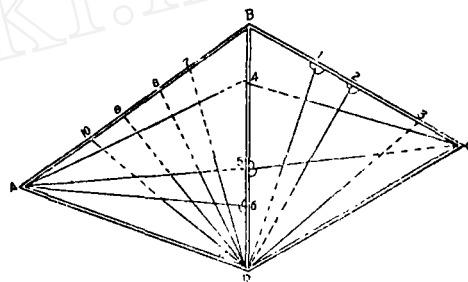


圖 3

需要与地形許可，在 B~C 直線上定下 1, 2, 3 三点，使 1~2, 3~C 边長不小于 250 公尺 (与独立测角圖根網最短边長 300 公尺近似)，然后同样定好 4, 5, 6 及 7, 8, 9, 10 等七个点，是为定点工作。定好点之后，至测站 D 依次照准 C, 3, B, 7, 8, 9, 10, A 各点 (假定看不見 1, 2, 兩点)，經過测站平差后 ($\angle CDB$ 及 $\angle BDA$ 为固定角平差方法見規範 196 頁) 便可按照正弦定律推算 C~3, 7~8, 8~9, 9~10 等的边長。茲以 $\triangle DAI0$ 为例：

因 DA 边及 $\angle DAI0$ 原为已知，

$\angle ADI0$ 已經測定，

$$\angle DI0A = 180^\circ - (\angle DAI0 + \angle ADI0)$$

故 $A \sim 10 = A \sim D \cdot \frac{\sin \angle ADI0}{\sin \angle AID0}$ 可以算出。另外

我們也可根据 D~B 同样計算出 B~10 的长度，二者之和应恰等于已知长度 B~A，此点可作为計算有無錯誤的檢查用。同理：可一一推出 $A \sim 9, A \sim 8, A \sim 7$ 等的边長，于是短边 $9 \sim 8 = (A \sim 8) - (A \sim 9)$ ，其余类推。由于这些点都在一直線上，它的方位都是一样的 (与 A~B 同一方位)。一般情况它的正余弦

函数也可以到三角点成果中去抄取,能很方便地求出各点坐标。此外,我們也可以利用表格公式直接計算这些点的坐标,免去推算边长这一道工序。

至于圖 4 中的 1, 2 兩点可以在該兩点处放測站,直接測定求巨角(但应配賦使合乎 180° 的規約)。这种放測站方式,也可利用来作檢查用,例如 5, 6 兩点。

这些短边的边长,方位,坐标既已决定,我們便可利用它們作起算边,在其間佈置附合鎖,綫形鎖或網等各种加密点,作为測圖用。如圖 5 所示,粗黑綫表示这些短边,兩条附合鎖的空隙部份亦可按照规范 § 192 之規定,用少数測角交会点填充之(如 A, B 点)。佈置加密鎖的最理想方式是將每二个合式的三角形拼成一个四边形在其間拉鎖,如圖 5 右边部份所示。

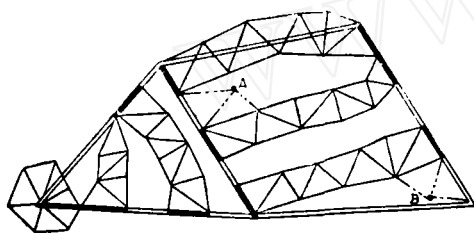


圖 5

这样做的优点是:

1. 一般放一个測站可以决定二, 三个圖根点的坐标, 附合鎖需要的边长也毋須反算。而做綫形鎖, 决定一个点至少要放一个多測站(因在已知点也要放站), 可以提高效率二, 三倍。

2. 觀測灵活, 例如求圖 6 中的 I 点坐标可以:

- ① 由 A 看 I,
- ② 由 C 看 I,
- ③ 由 I 看 A,
- ④ 由 I 看 C,
- ⑤ 实量 D~I (如果地形許可),

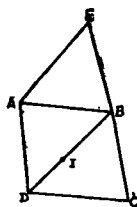


圖 6

如 E, 而按 $\triangle DEB$ 來計算。

3. 計算簡單, 一般測工均能胜任。

4. 佈置加密点时, 由于已知短边多, 不但选点容易, 而且可以选择更少的圖形与更宜的路綫。

5. 佈置加密点, 除可采用圖中所示的形式, 尚可採用量巨導綫(例如通过隱蔽地区), 或再作一次

分点如圖 7 所示。

現在从理論上来談談精度問題。

1. 短边的方位角精度是足够的, 它的測定毋須讀数只要照准。如果所用仪器望远鏡放大倍数为 24 倍,

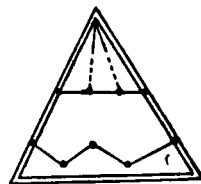


圖 7

則照准誤差只有 $\frac{60''}{24} = 2''.5$, 容許誤差只有 $2 \times 2''.5 = 5''$ 。

2. 測角中誤差: 假定是用 $10''$ 經緯仪(或 T_2) 二測回測定角度, 依照契巴塔廖夫教授叙述之公式:

$$\text{讀数凑整誤差 } m_0 = \frac{t}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{10''}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \approx 3''$$

$$\text{望远鏡瞄准誤差 } m_v = \frac{60''}{24} = 2''.5$$

$$\begin{aligned} \text{測角中誤差 } m'\beta &= \sqrt{\frac{1}{n} (m_v^2 + \frac{m_0^2}{2})} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} (2.5^2 + \frac{3^2}{2})} \\ &= 2''.3 \quad (n \text{ 为測回数}) \end{aligned}$$

$$\text{容許測角中誤差 } m\beta = 2m'\beta = 4''.6 \approx 5''$$

3. 假如規定四等三角網最大边长 1.5 公里, 最小角度值为 30° , 則最不好圖形当如圖 8 所示: $AC = 1.5\text{Km}$, $AB = BC \approx 0.87\text{Km}$

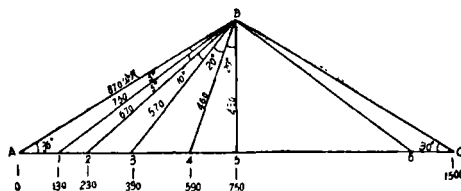


圖 8

在圖 9 中: 設 b 为已知边, 只觀測了 β_1, β_3 二个角, 則按正弦定律推算出来的 S, 其中誤差 m_s 可按式求之:

$$\left(\frac{m_s}{S}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\beta}{\rho}\right)^2 \cdot \{ \text{ctg}^2 \beta_1 + \text{ctg}^2 \beta_3 \}$$

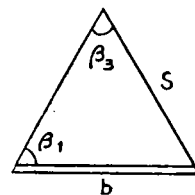


圖 9

式中 $\frac{m_b}{b}$ 为起算边的相对精度, 按照规范应在 $1/40,000$ 以上(四等三角網最弱边精度), 如不予顧及起始边誤差, 則上式成为:

$$m_s = S \cdot \frac{m\beta}{\rho} \cdot \sqrt{\text{ctg}^2 \beta_1 + \text{ctg}^2 \beta_2}$$

我們就利用它來計算各短邊的相對精度，式中之 $m\beta$ 均以 $5''$ 計， $\rho'' \approx 200,000$ (註二)

① A~1 边：從圖 8 來看，A~1 可利用 A~B 來直接推算（設其中誤差為 m' ），也可以利用 B~C 計算 1~C，然後由 (A~C) - (1~C) = A~1（結果是一致的），如不考慮 A~C，B~C 等已知邊的本身誤差，則這樣求得的 1~C 的中誤差也就是 A~1 的中誤差（設為 m'' ），而 A~1 最後的中誤差，應該是 $M_{A-1} = \frac{m' m''}{\sqrt{m'^2 + m''^2}}$ ，以圖 8 中實際數字代入得：

$$\begin{aligned} m' &= 130 \cdot \frac{5''}{200,000} \cdot \sqrt{\text{ctg}^2 5^\circ + \text{ctg}^2 145^\circ} \\ &= \frac{130}{40,000} \cdot \sqrt{11.4^2 + 1.4^2} = 0.037 \text{ 公尺} \\ m'' &= \frac{1370}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 115^\circ + \text{ctg}^2 35^\circ} = \frac{1370}{40,000} \\ &\quad \cdot \sqrt{0.5^2 + 1.4^2} = 0.051 \text{ 公尺} \end{aligned}$$

$$\therefore M_{A-1} = \frac{0.037 \times 0.051}{\sqrt{0.037^2 + 0.051^2}} = 0.029 \text{ 公尺}$$

② A~2 边：

$$\begin{aligned} m' &= \frac{230}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 10^\circ + \text{ctg}^2 140^\circ} = \frac{230}{40,000} \\ &\quad \cdot \sqrt{5.7^2 + 1.2^2} = 0.034 \text{ 公尺} \\ m'' &= \frac{1270}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 110^\circ + \text{ctg}^2 40^\circ} = \frac{1270}{40,000} \end{aligned}$$

表 1

短 边 名 称	內分綫与已知边夾角 (小角)	絕 对 中 誤 差 值	要求相对精度为 1/6000 时，边長不得短于
A~1	5°	0.029 公尺	6000 × 0.029 = 174 公尺
A~2	10°	0.026	× 0.026 = 156 "
1~2	5°	$\sqrt{0.026^2 + 0.029^2} = 0.039$	× 0.039 = 234 "
2~3	10°	$\sqrt{0.018^2 + 0.026^2} = 0.032$	× 0.032 = 192 "
3~4	20°	$\sqrt{0.009^2 + 0.018^2} = 0.020$	× 0.020 = 120 "
4~5	40°	$\sqrt{0.003^2 + 0.009^2} = 0.012$	× 0.012 = 72 "

$$\cdot \sqrt{0.4^2 + 1.2^2} = 0.040 \text{ 公尺}$$

$$\therefore M_{A-2} = \frac{0.034 \times 0.040}{\sqrt{0.034^2 + 0.040^2}} = 0.026 \text{ 公尺。}$$

③ A~3 边：

$$\begin{aligned} m' &= \frac{390}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 20^\circ + \text{ctg}^2 130^\circ} = \frac{390}{40,000} \\ &\quad \cdot \sqrt{2.7^2 + 0.8^2} = 0.028 \text{ 公尺，} \\ m'' &= \frac{1110}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 100^\circ + \text{ctg}^2 50^\circ} = \frac{1110}{40,000} \\ &\quad \cdot \sqrt{0.2^2 + 0.8^2} = 0.023 \text{ 公尺，} \end{aligned}$$

$$\therefore M_{A-3} = \frac{0.028 \times 0.023}{\sqrt{0.028^2 + 0.023^2}} = 0.018 \text{ 公尺。}$$

④ A~4 边：

$$\begin{aligned} m' &= \frac{590}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 40^\circ + \text{ctg}^2 110^\circ} = \frac{590}{40,000} \\ &\quad \cdot \sqrt{1.2^2 + 0.4^2} = 0.019 \text{ 公尺，} \\ m'' &= \frac{910}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 80^\circ + \text{ctg}^2 70^\circ} = \frac{910}{40,000} \\ &\quad \cdot \sqrt{0.2^2 + 0.4^2} = 0.010 \text{ 公尺，} \end{aligned}$$

$$\therefore M_{A-4} = \frac{0.019 \times 0.010}{\sqrt{0.019^2 + 0.010^2}} = 0.009 \text{ 公尺}$$

⑤ A~5 边：

$$\begin{aligned} m' = m'' &= \frac{750}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 60^\circ + \text{ctg}^2 90^\circ} \\ &= \frac{750}{40,000} \times 0.6 = 0.011 \text{ 公尺，} \end{aligned}$$

$$M_{A-5} = \frac{0.011}{\sqrt{2}} = 0.008 \text{ 公尺。}$$

根据上面的計算可以列出一个表 (表 1)

現在再來看下一個圖形（圖 10）：

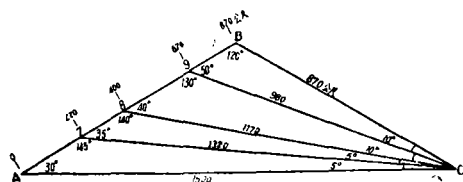


圖 10

⑥ A~7 边：

$$m' = \frac{220}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 25^\circ + \text{ctg}^2 145^\circ} = \frac{220}{40,000} \cdot \sqrt{11.4^2 + 1.4^2} = 0.067 \text{ 公尺,}$$

$$m'' = \frac{650}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 25^\circ + \text{ctg}^2 35^\circ} = \frac{650}{40,000} \cdot \sqrt{2.1^2 + 1.4^2} = 0.041 \text{ 公尺,}$$

∴ $M_{A-7} = 0.035$ 公尺。

⑦ A~8 边：

$$m' = \frac{400}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 10^\circ + \text{ctg}^2 140^\circ} = \frac{400}{40,000}$$

$$\cdot \sqrt{5.7^2 + 1.2^2} = 0.058 \text{ 公尺,}$$

$$m'' = \frac{470}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 20^\circ + \text{ctg}^2 40^\circ} = \frac{470}{40,000}$$

$$\cdot \sqrt{2.7^2 + 1.2^2} = 0.030 \text{ 公尺,}$$

$M_{A-8} = 0.027$ 公尺。

⑧ A~9 边：

$$m' = \frac{670}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 20^\circ + \text{ctg}^2 130^\circ} = \frac{670}{40,000}$$

$$\cdot \sqrt{2.7^2 + 0.8^2} = 0.047 \text{ 公尺,}$$

$$m'' = \frac{200}{40,000} \sqrt{\text{ctg}^2 10^\circ + \text{ctg}^2 50^\circ} = \frac{200}{40,000}$$

$$\cdot \sqrt{5.7^2 + 0.8^2} = 0.030 \text{ 公尺,}$$

$M_{A-9} = 0.025$ 公尺。

根据这些計算也可以再列一表（表 2）：

表 2

短 边 名 称	内分綫与已知边夾角 (小角)	絕 对 中 誤 差 值	要求相对精度为 1/6000 时, 边長不得短于
A~7	5°	0.035 公尺	$6000 \times 0.035 = 210$ 公尺
A~8	10°	0.027	$\times 0.027 = 162$ 公尺
7~8	5°	$\sqrt{0.035^2 + 0.027^2} = 0.044$	$\times 0.044 = 264$ 公尺
8~9	10°	$\sqrt{0.025^2 + 0.027^2} = 0.038$	$\times 0.038 = 228$ 公尺
9~B	10°	0.025	$\times 0.025 = 150$ 公尺

由表 1 及表 2 可知，如果我們在选点时注意：

1. 内分綫与已知边的夾角接近 10°（即圖 8 中的 $\angle AB1$, $\angle CB6$ 及圖 10 中的 $\angle AC7$, $\angle BC9$ 要求接近 10°）

2. 短边边長不短于 250 公尺，

3. 三角点边長不大于 1500 公尺，三角形任一内角不小于 30°。

4. 内点的測角中誤差不大于 5" (10" 或 T_2 仪器二測回)，則各短边是能够达到 1/6000 以上的相对精度的。也就是說，它可以做下一級加密鎖的起算边。

如果我們再选择一个正三角形（即三个边都是 1.5 公里長的長边），按上述方法推算，也將得到相同的結論。

假如我們在佈置四等網时同时佈設四等补点，並且遵照规范 § 18 之規定，边長不大于 0.8 公里，則在同样的条件下：

$M'_{A-1} = \frac{1}{2} M_{A-1}$ （假定最長边为 750 公尺即 1.5/2 公里）短边更可縮至 125 公尺，或稍放大至 150 公尺左右。

事实上，我們也应这样按照规范做，因为：

1. 内分点的定線埋石比較容易了，

2. 由 150 公尺縮到 120 公尺（附合鎖的容許边長）比由 250 公尺縮到 120 公尺要容易得多。

3. 这样才有可能敷設边長不超过 120 公尺，圖形不超过 15 个的附合鎖。否則以 1.5 公里的三角網边長，即使按直綫敷設，在边長都是 120 公尺的情况下，也需要 $\frac{1500}{120} \times 2 = 25$ 三角形。（全文待續）