

用圖表法計算後方交会点精度

陳汝麒 程仲華

在 1:10000 以上的小比例尺測圖中，作解析圖根点或作導線与远距离的三角点相联結工作，最便利的方法是后方交会法。尤其在广濶地区使用更为广泛。苏联的工作經驗指出：在草原地区採用后方交会法决定控制点的約佔 80%。

后方交会点的精度，有时是不高的，有时甚至大大超过規定的誤差範圍。如果佈点时，不能預先防止这种超限現象的出現，和求得最高精度的有利方案，就是最仔細的观测，也难保証得到滿意的結果，和免去需要重測的危險。因此，后方交会点的精度估計工作是必須而且重要的。但是，使用精度估計的公式來計算，这工作非常繁重，在实用上很不方便。苏联“測量与制圖学雜誌”1956年第二期Ю.А.АПАДЖ-АПОВ 介紹了一种圖表法，用它來估計后方交会点的精度，工作就簡便了。現將这方法介紹如下：

根据精度估計公式*：

$$M = \frac{1}{4F^2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) m^2 \dots\dots\dots (1)$$

式中： m 为观测方向中誤差， F, σ 表示变换三角形的面积和边長。

現在讓我們先做变换三角形。从任一点 P ，划出三条方向綫，使其夾角为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ，即后方交会实际測得的或选点时圖解得來的角度，然后以 P 为起点，在每条方向綫上各量取一段距离使其分別为 $r_i =$

$\frac{P}{S_i}$ ，(S_i 为后方交会点至已知三角点的边長，用圖

解法得來) 得到三个点 T_1', T_2', T_3' ，連接这三个点成一三角形，我們称之为变换三角形。

茲命 h_1, h_2 和 h_3 表示变换三角形 $T_1' T_2' T_3'$ 三边的高，由圖 1 可以看出：

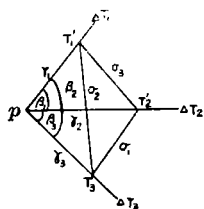


圖 1

$$F = \frac{1}{2} h_1 \sigma_1 = \frac{1}{2} h_2 \sigma_2 = \frac{1}{2} h_3 \sigma_3$$

$$\text{故得 } \sigma_1 = \frac{2F}{h_1}, \sigma_2 = \frac{2F}{h_2}, \sigma_3 = \frac{2F}{h_3} \dots\dots\dots (2)$$

將 (2) 式代入 (1) 式得

$$M^2 = \frac{m^2}{h_1^2} + \frac{m^2}{h_2^2} + \frac{m^2}{h_3^2} \dots\dots\dots (3)$$

由 (3) 式中看出 P 点的精度决定於变换三角形的三个高 h_1, h_2 和 h_3 ，只要我們作出变换三角形，就可直接从圖上量出各边的高來。为了求得变换三角形方便起見，应先按不同的距离 S 算出 r (S 以公里为單位， r 以 mm 为單位。) 即：

$$S = 1KM \quad r = \frac{P}{S} = 206,265mm$$

$$S = 2KM \quad r = \frac{P}{S} = 103,134mm$$

$$S = 3KM \quad r = \frac{P}{S} = 88,7mm$$

$$S = 4KM \quad r = \frac{P}{S} = 51,56mm$$

$$S = 5KM \quad r = \frac{P}{S} = 41,4mm$$

$$S = 6KM \quad r = \frac{P}{S} = 34,4mm$$

.....

然后以 r 按一定的縮尺來作同心圓，每个同心圓按 S 註記数字，再在同心圓圖的下面作一与 r 同比例尺的尺子，借以量取变换三角形各边的高(如圖 2)。

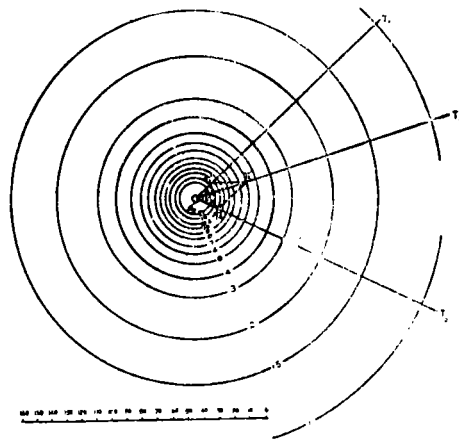


圖 2

其次由公式(1)看出, 因为 m 是一常数, $\frac{m^2}{h^2}$ 的数值随 h 的变化而变化, 为了计算简单。可以先做出 $\frac{m^2}{h^2}$ 随 h 变化的表, 兹以 $m=10''$, $15''$, $20''$ 为例作表如下:

m = 20''								m = 15''			
h MM	$\frac{m^2}{h^2}$	h MM	$\frac{m^2}{h^2}$	h MM	$\frac{m^2}{h^2}$	h MM	$\frac{m^2}{h^2}$	h MM	$\frac{m^2}{h^2}$	h MM	$\frac{m^2}{h^2}$
∞	0.0	14.1	2.0	10.0	4.0	8.2	6.0	∞	0.0	10.6	2.0
44.8	0.2	13.5	2.2	9.8	4.2	8.0	6.2	33.5	0.2	10.1	2.2
31.6	0.4	12.9	2.4	9.5	4.4	7.9	6.4	23.8	0.4	9.7	2.4
25.8	0.6	12.4	2.6	9.3	4.6	7.8	6.6	19.4	0.6	9.3	2.6
22.4	0.8	11.9	2.8	9.1	4.8	7.7	6.8	16.8	0.8	9.0	2.8
20.0	1.0	11.5	3.0	9.0	5.0	7.6	7.0	15.0	1.0	8.7	3.0
18.3	1.2	11.2	3.2	8.8	5.2	7.4	7.2	13.7	1.2	8.4	3.2
16.9	1.4	10.8	3.4	8.6	5.4	7.3	7.4	12.7	1.4	8.1	3.4
15.8	1.6	10.5	3.6	8.5	5.6	7.3	7.6	11.9	1.6	7.9	3.6
14.9	1.8	10.2	3.8	8.3	5.8	7.2	7.8	11.2	1.8	7.7	3.8
14.1	2.0	10.0	4.0	8.2	6.0	7.1	8.0	10.6	2.0	7.5	4.0

m = 10''							
h MM	$\frac{m^2}{h^2}$	h MM	$\frac{m^2}{h^2}$	h MM	$\frac{m^2}{h^2}$	h MM	$\frac{m^2}{h^2}$
∞	0.0	7.1	2.0	5.0	4.0	4.0	6.0
20.3	0.2	6.7	2.2	4.8	4.2	4.0	6.2
15.8	0.4	6.4	2.4	4.7	4.4	3.9	6.4
12.9	0.6	6.2	2.6	4.6	4.6	3.9	6.6
11.2	0.8	5.9	2.8	4.5	4.8	3.8	6.8
10.0	1.0	5.7	3.0	4.5	5.0	3.8	7.0
9.1	1.2	5.6	3.2	4.4	5.2	3.7	7.2
8.4	1.4	5.4	3.4	4.3	5.4	3.6	7.4
7.9	1.6	5.2	3.6	4.2	5.6	3.6	7.6
7.4	1.8	5.1	3.8	4.1	5.8	3.5	7.8
7.1	2.0	5.0	4.0	4.0	6.0	3.5	8.0

有了上面的圖和表, 我們就可根据它来计算精度了, 其步骤如下:

1. 在透明紙上按照 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 角度划出后方交会的三个方向, 并把所求点 P 与圖解同心圆的圆心相重。
2. 以 P 点至已知点 T_1, T_2, T_3 的距离在同心圓圖上得到 T_1', T_2', T_3' 变换三角形。
3. 以三角板及直尺求得变换三角形的高 h_1, h_2 及 h_3 ,
4. 以 h 为引数在表中求得 $\frac{m^2}{h_1^2}, \frac{m^2}{h_2^2}$ 及 $\frac{m^2}{h_3^2}$ 。

5. 用下面公式求出后方交会点的点位中誤差,

$$M = \sqrt{\frac{m^2}{h_1^2} + \frac{m^2}{h_2^2} + \frac{m^2}{h_3^2}}$$

例: 設后方交会点至三个已知三角点 T_1, T_2, T_3 的距离分别为 $S_1=15.0km$ $S_2=5.8km$ $S_3=12.4km$ (在选点圖上量得) 交会線的夾角为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 試求交会点的点位中誤差

按照 1, 2 項求得变换三角形 $T_1' T_2' T_3'$ 如圖 2 所示, 量得变换三角形的高分别为; $h_1=16, h_2=24, h_3=17$, 設 $m=20''$, 各以 16、24、17 为引数, 查表得

$$\frac{m^2}{h_1^2} = 1.6, \quad \frac{m^2}{h_2^2} = 0.7, \quad \frac{m^2}{h_3^2} = 1.4,$$

$$\text{由此 } M^2 = 1.6 + 0.7 + 1.4 = 3.7$$

$$\text{故 } M = \sqrt{3.7} = 1.9m$$

但是实际工作中往往选定的已知点不止三个, 而是四个或五个, 先算出它們各个方向綫的 r , 作出变换三角形的頂点, 根据这些頂点, 分別組成变换三角形, 再算出每組的 M 值来比較大小, 加以选择。例如在圖 3 中, 可以組成的变换三角形, 就有 123, 124, 125, 134, 135, 234, 235, 245, 345 等九个, 但是 123, 124, 125, 135, 234, 235 由它們最短的高或憑眼看,

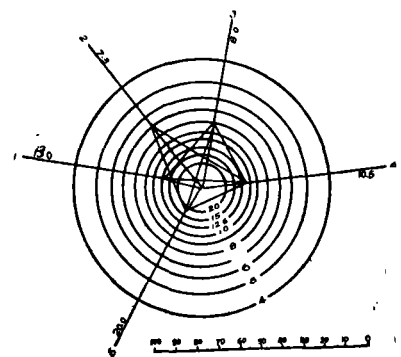


圖 3

就能判断以它們算出的 M , 比 134, 245, 345, 算出的 M 大, 因为它們的 h 有最小的, 不用計算就可以將它們淘汰。但是 134, 245, 和 345 这三个变换三角形, 那个的 M 最小呢? 这是难以憑眼睛判断的, 若是根据圖表法算出 $M_{134}=1.9m$, $M_{245}=1.8m$, $M_{345}=2.1m$, 就可确定应该观测的是 134 或 245 兩組已知点的方案了。

註 * 請参考 A.C. ЧЕХОВТАРЕВ 普測學下卷第一分册 238 頁——239 頁。