



小三角鎖(網)平差的多邊形法則

华东分局測量隊 朱學能

苏联 B. B. 巴保夫教授所提出的“多边形平差法”是一門通俗簡便，並符合於最小乘法原理的一种平差方法，所以在測量界获得了广泛的应用。

我們只要認定测定一个多边形环，將产生該环的閉合差，反之在測定值中有閉合差，將意味着該环多边形的存在。在小三角測量上，如所周知：每一三角形有一閉合差，每一水平条件、方位角条件、極条件、長条件、座标条件皆各有一个閉合差。因而可分別命定为水平多边形、方位多边形、極多边形、長多边形、座标多边形。为此，小三角鎖(網)的平差將可依多边形法則进行。

依多边形法則在处理小三角鎖(網)的平差时，可把角度当作环节看待。这样三角形水平多边形，方位多边形閉合差，可依角度作平均分配，至於極多边形、長多边形、座标多边形的傳遞系数，亦依角度作平均分配。因而小三角鎖(網)平差的运算形式，同样可归结在草圖上逐次趋近。

这里介紹一个按多边形法則示例的独立中心網：为易於理解起見，在圖1中分別加兩条閉合虛綫，用以表达水平多边形、極多边形(但实际平差时只要我們默認每一条件方程，即每一个多边形的話，可以不作这些虛綫)。並令極多边形奇数角的 δA_i (环节系数) 为正；偶数角的 δB_i (环节系数) 为負。但必須注意的是 1.2.3.4.5.6.7.8.8.9.10.11.12. 諸角对三角形而言，其环节系数为 +1。那么按：在每个多边形方程式中，首先列入本身的改正系数 K 乘多边形全周長(就三角鎖(網)而言，应当是 K 乘多边形环节自

乘方的总合)从該值中減去(就三角鎖(網)而言，應該是加)各相联系的多边形的改正系数乘相应环节的長度(对相应多边形的角度系数)，再加上該多边形的閉合差，然后整个总和等於零[註1]。本例中八个多边形条件之八个未知数方程式是：

$$3K_i + K_7 + (\delta A_i - \delta B_i) K_8 + f_i = 0 \quad (1-6) \quad (i=1.2.3.4. \dots \dots 6)$$

$$\left. \begin{aligned} K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 + 6K_7 + W &= 0 \\ \sum_1^6 (\delta A_i - \delta B_i) K_i + (\sum_1^6 \delta^2 A_i + \sum_1^6 \delta^2 B_i) & \\ K_8 + W_2 &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

式中 f_i 表示相应三角形閉合差， W, W_2 分別表示水平多边形，極多边形的閉合差。

按多边形法則同样得出各角改正数为：

$$\left. \begin{aligned} (2i-1) &= K_i + \delta A_i K_8 \\ (2i) &= K_i - \delta B_i K_8 \\ (7i) &= K_i + K_7 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

显然 1、2 兩式与 $[VV] = \text{極小}$ 所得出的方程式完全一样。

下面我們进一步介紹几个实际例子：

一、兩固定点間三角鎖的平差。

以圖2为例：

諸三角形及定向多边形的未知系数方程式为：对於 ΔI ： $3K_1 + K_6 + f_1 = 0$

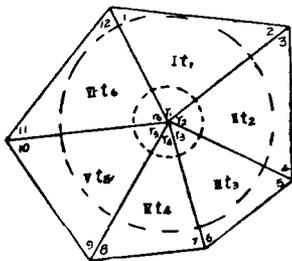


圖 1

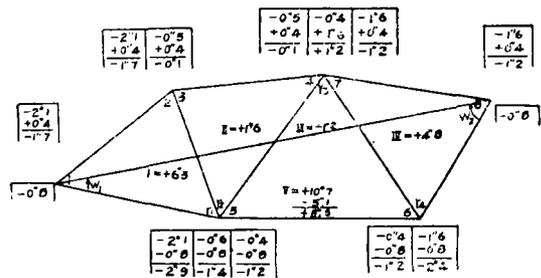


圖 2

| 多边形 | 角号 | 观测值 | 改正值 | 平差值 | 依公式计算所得改正值 | 较差 |
|-----|----------------|------------|-------|-------------|------------|------|
| I | 2 | 67-17-56.3 | -1.70 | 67-17-54.60 | -1.70 | 0.00 |
| | r ₁ | 60-08-49.2 | -2.90 | 60-08-46.10 | -2.90 | 0.00 |
| | 1 | 52-33-21.0 | -1.70 | 52-33-19.30 | -1.70 | 0.00 |
| II | 4 | 44-38-24.2 | -0.10 | 44-38-24.10 | -0.13 | 0.03 |
| | r ₂ | 78-05-34.0 | -1.40 | 78-05-32.60 | -1.34 | 0.06 |
| | 3 | 58-18-03.4 | -0.10 | 58-18-03.30 | -0.13 | 0.03 |
| III | 6 | 50-59-34.5 | -1.20 | 57-59-33.30 | -0.80 | 0.40 |
| | r ₃ | 67-46-30.0 | +1.20 | 67-46-31.20 | +0.40 | 0.80 |
| | 5 | 54-13-56.7 | -1.20 | 54-13-55.50 | -0.80 | 0.40 |
| IV | 8 | 48-34-33.7 | -1.20 | 48-34-32.50 | -1.20 | 0.00 |
| | r ₄ | 56-28-38.1 | -2.40 | 56-28-35.70 | -2.40 | 0.00 |
| | 7 | 74-56-53.0 | -1.20 | 74-56-51.80 | -1.20 | 0.00 |
| V | W ₁ | 15-06-10.4 | -0.80 | 15-06-09.60 | -1.23 | 0.43 |
| | W ₂ | 37-57-28.0 | -0.80 | 37-57-27.20 | -1.23 | 0.43 |

對於 $\Delta II: 3K_2 + K_5 + f_2 = 0$
 對於 $\Delta III: 3K_3 + 2K_5 + f_3 = 0$ (3)
 對於 $\Delta IV: 3K_4 + K_5 + f_4 = 0$

對於定向多边形: $7K_5 + K_1 + K_2 + 2K_3 + K_4 + W = 0$ 相应諸角的改正数为:

$$\begin{aligned}
 (1) = (2) = K_1 & \quad (5) = (6) = K_3 + K_5 \\
 (r_1) = K_1 + K_5 & \quad (r_3) = K_3 \\
 (3) = (4) = K_2 & \quad (7) = (8) = K_4 \\
 (r_2) = K_2 + K_5 & \quad (r_4) = K_4 + K_5 \\
 & \quad (W_1) = (W_2) = K_5
 \end{aligned} \quad \dots (4)$$

依逐渐趋近法解 3 式得: $K_i = -\frac{f_i}{3} + K'_5$ ($i =$

1, 2, 3, 4.)。为加速收敛起见, 则 $K_5 = -\frac{W + \sum \frac{f_i}{3}}{7} +$

K'_5 , 但在实际运算时用不着无限次的循环, 为此令 $K_5 = -\sigma$, 同时保证对三角形的第二次分配值总和为零起见, 我们将这里所得的趋近值代入 (4) 式, 并顺便凑合一下则 (4) 式变为:

$$\begin{aligned}
 (1) = (2) &= -\frac{f_1}{3} + \frac{\sigma}{2} \\
 (r_1) &= -\frac{f_1}{3} - \sigma \\
 (3) = (4) &= -\frac{f_2}{3} + \frac{\sigma}{2} \\
 (r_2) &= -\frac{f_2}{3} - \sigma
 \end{aligned} \quad \dots (5)$$

$$\begin{aligned}
 (5) = (6) &= -\frac{f_3}{3} - \sigma \\
 (r_3) &= -\frac{f_3}{3} + 2\sigma \\
 (7) = (8) &= -\frac{f_4}{3} + \frac{\sigma}{2} \\
 (r_4) &= -\frac{f_4}{3} - \sigma \\
 (W_1) = (W_2) &= -\sigma
 \end{aligned} \quad \dots (5)$$

因此依 (5) 式在草圖上計算, 所得改正值只有兩次分配即可得到, 所以非常方便。

根据以上原理, 將实际操作程序說明如下:

1. 观测后立即繪一草圖, 若所有三角形及定向多边形閉合差, 均在界限以內, 则可着手进行分配工作。

2. 这样將圖形按羅馬字編号, 然后将閉合差写在圖形內。如本例最好將三角形閉合差写在定向多边形之外的本圖形內, 如 +6.3", +1°6', +1.2", +4.8" 分别是 $\Delta I, \Delta II, \Delta III, \Delta IV$ 的閉合差。+10".3 乃定向多边形 D 的閉合差。

3. 未分配之前, 先在每一三角形頂的外面划一个改正数表, 然后将三角形的閉合差以反号分别分配給每一个角。因之 ΔI 諸角的分配值是 -2"1, ΔII 諸角的分配值是 +0.5", ΔIII 諸角分配以 -0"4, ΔIV 諸角分配以 -1"6。其次把参与多边形內諸角的第一次分配值加起来, 如本例中, $r_1, r_2, 5, 6, r_4$ 諸角第一次分配值和是 -5"1, 所得結果与定向多边形原有閉合差 +10"7 相加, 其和为 +5"6。接着以定向多边形內角的个数去除上面的和, 然后平均分配給参与定向多边形的每一个角並反号。如本例 +5"6 ÷ 7 = +0", 以其反号分配之。参与定向多边形諸角作第二次分配后, 接着即先将該值的一半(一角在多边形內)或二倍(二角在多边形內)以相反的符号分配給同一三角形中未参加多边形的那些角。因之 1, 2, 3, 4, 7, 8 諸角分配以 +0"4, 而 r_3 則分配以 +1"6。

4. 最后將每一頂角的兩次分配值相加, 即得相应頂角的改正值。

5. 为校对我們工作正确与否; 第一, 每一三角形諸內角改正值总和, 应等於該三角形原閉合差反号。第二, 参与定向多边形諸角改正值总和, 亦等於其原閉合差反号。

这样將所得的改正值写入表 I 中, 經過加或減即

等於水平多边形閉合差反号。以上兩条件滿足后，即可着手極多边形平差。为此在每一个角的改正数表的右面增添一个表，用以計算極多边形的傳遞系数。對於極多边形傳遞系数閉合差及三角網諸角的第二次改正值計算步驟如下：

① 分別將一次改正值与觀測值相加，用以查取角的正弦对数，並求得極多边形閉合差，對於本例是+689，同时查出相应的正弦对数一秒的表差，記入極多边形諸角傳遞系数計算表內，但要注意，正弦对数一秒之表差，對於奇数角为正，偶数角为負。就本例而言1,2,3,4,5,6，諸角正弦对数一秒之表差，分別是+17.7，-43.1，+36.0，-39.0，+75.5，-36.7。其次是將同一三角形的兩個角正弦对数一秒之表差相加，写在原三角形閉合差之上，如本例其值分別對於Δ I 是-25.4，Δ II 是-3.0，Δ III 是+38.8。然后以此諸值的1/2反号作第一次分配給所屬諸角。如本例其第一次分配值對於Δ I 諸角是+8.47，對於Δ II 諸角是+1.0，對於Δ III 諸角是-12.93。这样可將網中心諸角的第一次分配值相加，如本例其值是-3.48。並以参与中心的角数除之，反号分配給 r_i 諸角。如本例其值是+1.16。同样將該值的1/2反号分配其余兩角，如1,2,3,4,5,6，等角的第二次分配值是-0.58。这样再把所有值加起来記在所屬改正数表格上面，这些数就是我們所求得的傳遞系数。如本例對於1,2,3,4, r₁, 5,6, r₂ 的傳遞系数分別是 +25.59，-

35.21， +9.65， +36.42， -38.58， +2.15， +61.99， -50.21， -17.78。

② 为审查傳遞系数的計算有無錯誤，一定要做以下三方面的校核。i、對於同一三角形其值之和为零。ii、對於網中心諸 r_i 角其值之和为零。iii、凡参与極多边形諸角其值之和为零。若此三条件有一个不能滿足，得立即重算。

③ 由此即可計算第二次改正值。为此把所得傳遞系数予以平方，分別写在相应諸表的下面。如例中1,2, r₁, 3,4, r₂, 5,6, r₃ 諸相应环节的系数（即傳遞系数）平方分別是654.85, 1239.74, 92.54, 1326.42, 488.42, 4.66, 3842.76, 2521.04, 138.77。然后相加其值是11302.9，並以此值除極多边形閉合差+689 並反号得 -0.06096，再以該数乘所有环节的傳遞系数，即得第二次改正值。如例中1,2, r₁, 3,4, r₂, 5,6, r₃ 諸角的第二次改正值分別是 -1'56， +2'150， -0'99， -2'22， -2'35， -0'13-3'78， +0'051， +0'72。最后將兩次改正值相加填入表中，可得諸角的平差值。查出其正弦对数在第七位上差+1，我們認為是可以允許的。

为了使問題更清楚，我們把本例数据按克呂格兩組平差所得結果相較絲毫不差，可說明这个方法的严密性。这种严密性，並非偶然的，虽然方法不一致，但結果始終是相同的。（全文待續）

（上接17頁）

常决定所接触的火成岩体的产状一产出形态，因为当接触面很陡时，即便矿体延深很大，但由於目前开採技术条件的限制，也不能全部列为表內儲量。此外，侵入体的形态及侵入部位，都对矿体的規模有很大的影响。（如图4）。

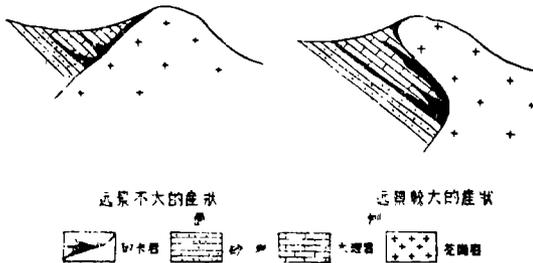


图4

此外，矿区地層及構造的研究，無疑的給评价矿床提供重要的地質論据。在工作进行中，尚需及

时採取光谱分析及岩矿鑑定标本，以便及早掌握矿区內伴生有益組份的种类及白鎢矿的分佈、产状特征及粒度大小，当初步确定矿区有进一步勘探的必要时，可迅速採取可选性試驗的样品1—2个，以便快得出工业可能利用程度的初步結論。

总之，砂卡岩型白鎢矿床的产状比較复杂，影响矿体和矿化的因素也比較多，只有很好的研究这种矿床的地質特性，才能更好的指导工作，並进而得出正确的评价。从全世界鎢矿的生产情况来看，这种类型所佔的比例是逐步上升，目前約可与黑鎢石英脈类型佔同样重要地位。随着我国选、冶技术水平的迅速提高，这种趋势也是必然的。

砂卡岩型白鎢矿床，規模往往極大，某些矿区还可进行露天开采，極适于建設机械化的採选企業，可以預卜，随着我国地質工作的逐步扩大和深入，我們將能給祖国找到更多的这种巨大的鎢矿基地。