

法方程式解算的简化方法

华北分局 姜玉瑞

苏联“测量与绘图”杂志 1957 年第一期刊载的“最小二乘法中新克拉考夫的计算及其变化”一文，介绍了较简单的法方程式解算格式。根据实际计算体会，说明应用此格式，可节省人力、物力，在技术上和经济上都是合理的工作方法。原文系以行列式的理论基础进行的应用公式推导。为了推广这一先进技术，并考虑测量作业人员易于掌握，兹将简化格式所用公式，作如下介绍。

一、间接观测平差中法方程式解算

取下列法方程式：

$$\left. \begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [al] &= 0 \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + [bl] &= 0 \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + [cl] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

将(1)式中第一法方程式乘上 $\frac{1}{\sqrt{[aa]}}$ ，并引用下列符号：

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{[aa]} &= A_1 \\ \frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}} &= \frac{[ab]}{A_1} = B_1 \\ \frac{[ac]}{\sqrt{[aa]}} &= \frac{[ac]}{A_1} = C_1 \\ \frac{[al]}{\sqrt{[aa]}} &= \frac{[al]}{A_1} = L_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

则得：

$$A_1x + B_1y + C_1z + L_1 = 0 \dots\dots (3)$$

将(1)式中第一法方程式乘上 $-\frac{[ab]}{[aa]}$ ，其结果与(1)式中第二法方程式相加，并以(2)式中符号代替，则得：

$$\begin{aligned} ([bb] - B_1^2)y + ([bc] - B_1C_1)z \\ + ([bl] - B_1L_1) = 0 \dots\dots (4) \end{aligned}$$

将(1)式中第一法方程式乘上 $-\frac{[ac]}{[aa]}$ ，其结果与(1)式中第三法方程式相加，并以(2)式中符号代替，则得：

$$\begin{aligned} ([cc] - C_1^2)z + ([cl] - C_1L_1) \\ + ([bc] - B_1C_1)y + ([cc] - C_1^2)z \\ + ([cl] - C_1L_1) = 0 \dots\dots (5) \end{aligned}$$

方程式(4)及(5)即为第一次约化方程式。它们消除了第一个未知数，并且其系数的排列如同起始方程式一样具有对称性。因此消去下一个未知数 y 所用的方法，与由起始方程式中消去 x 相同。

将方程式(4)乘上 $\frac{1}{\sqrt{[bb] - B_1^2}}$ ，并引用下列符号：

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{[bb] - B_1^2} &= B_2 \\ \frac{[bc] - B_1C_1}{\sqrt{[bb] - B_1^2}} &= \frac{[bc] - B_1C_1}{B_2} = C_2 \\ \frac{[bl] - B_1L_1}{\sqrt{[bb] - B_1^2}} &= \frac{[bl] - B_1L_1}{B_2} = L_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

则得：

$$B_2y + C_2z + L_2 = 0 \dots\dots (7)$$

将方程式(4)乘上 $-\frac{[bc] - B_1C_1}{[bb] - B_1^2}$ ，其结果与(5)式相加，并以(6)式中符号代替，则得：

将方程式(8)乘上 $\frac{1}{\sqrt{[cc] - C_1^2 - C_2^2}}$ ，并以下列符号代替，

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{[cc] - C_1^2 - C_2^2} &= C_3 \\ \frac{[cl] - C_1L_1 - C_2L_2}{\sqrt{[cc] - C_1^2 - C_2^2}} &= \frac{[cl] - C_1L_1 - C_2L_2}{C_3} = L_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

则得：

$$C_3z + L_3 = 0 \dots\dots (10)$$

此式即为第二次约化方程式。

由此

$$z = -\frac{L_3}{C_3} \dots\dots (11)$$

求出 z ，将其值代入方程式(7)中，并由其中解出 y ：

$$y = \frac{-L_2 - C_2z}{B_2} \dots\dots (12)$$

最后, 將 y 和 z 代入方程式 (3) 中, 求出 x :

$$x = \frac{-L_1 - C_1 Z - B_1 y}{A_1} \dots\dots\dots (13)$$

方程式 (11) (12) 及 (13) 称为消化方程式。它們由下列方程式求出。

$$\left. \begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + L_1 &= 0 \\ B_2 y + C_2 z + L_2 &= 0 \\ C_3 z + L_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

这一組称为約化方程式系, 它由方程式 (10) (7) 及 (3) 組成。它与起始的法方程式系 (1) 等效, 由此也可称为等效方程式系。

在解算法方程式时, 逐次消去未知数是按表 1 格式进行, 解法方程式, 常常要求五位或六位数值值的乘或除, 这些演算全部利用计算机进行是很方便的。

二、間接观测平差中未知数函数之中誤差計算

仍以三个未知数为例, 按夏坚白等著之“測量平差法”一書所引証, 未知数函数之中誤差为:

$$m_F^2 = \left(\frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} \right) m^2$$

$$\frac{1}{P_F} = \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} \dots\dots\dots (15)$$

以高斯規則表示之符号, 对照本文 (2) (6) 及 (9) 式所引証之符号, 則得:

$$\left. \begin{aligned} [bb \cdot 1] &= [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} \\ &= [bb] - B_1^2 = B_2^2 \\ [bc \cdot 1] &= [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]} \\ &= [bc] - B_1 C_1 \\ [cc \cdot 1] &= [cc] - \frac{[ac][ac]}{[aa]} \\ &= [cc] - C_1^2 = C_2^2 \\ [cc \cdot 2] &= [cc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1][bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \\ &= [cc] - C_1^2 - \frac{([bc] - B_1 C_1)^2}{B_2^2} \\ &= [cc] - C_1^2 - C_2^2 = C_3^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

应用 (16) 式之符号对照, 將 (15) 式右边各項以本文所引用之符号及其規則作如下表示:

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_1^2}{[aa]} &= \frac{f_1^2}{A_1^2} = F_1^2 \quad (F_1 = \frac{f_1}{A_1}) \\ \frac{[f_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} &= \frac{(f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1)^2}{B_2^2} \\ &= \frac{(f_2 - B_1 F_1)^2}{B_2^2} = F_2^2 \quad (F_2 = \frac{f_2 - B_1 F_1}{B_2}) \\ \frac{[f_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} &= \frac{(f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1 - \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [f_2 \cdot 1])^2}{C_3^2} \\ &= \frac{(f_3 - C_1 F_1 - C_2 F_2)^2}{C_3^2} \\ &= F_3^2 \quad (F_3 = \frac{f_3 - C_1 F_1 - C_2 F_2}{C_3}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

則得:

$$\frac{1}{P_F} = F_1 F_1 + F_2 F_2 + F_3 F_3 \dots\dots\dots (18)$$

$$= [FF]$$

未知数函数中誤差即为:

$$m_F^2 = [FF] n \dots\dots\dots (19)$$

三、条件观测平差中法方程式解算及未知数函数中誤差之計算

解算条件观测平差中之法方程式繁数 K , 与解算間接观测平差之未知数步骤完全相同。

取下列繁数方程式:

$$\left. \begin{aligned} [aa] K_1 + [ab] K_2 + [ac] K_3 + \omega_1 &= 0 \\ [bb] K_2 + [bc] K_3 + \omega_2 &= 0 \\ [cc] K_3 + \omega_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

將 (20) 式用本文一节中叙述之方法約化, 并引用下列符号:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_1}{A_1} &= W_1 \\ \frac{\omega_2 - B_1 W_1}{B_2} &= W_2 \\ \frac{\omega_3 - C_1 W_1 - C_2 W_2}{C_3} &= W_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

則得約化法方程式:

$$\left. \begin{aligned} A_1 K_1 + B_1 K_2 + C_1 K_3 + W_1 &= 0 \\ B_2 K_2 + C_2 K_3 + W_2 &= 0 \\ C_3 K_3 + W_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

消化法方程式即为:

$$\left. \begin{aligned} K_3 &= \frac{-W_3}{C_3} \\ K_2 &= \frac{-W_2 - C_2 K_3}{B_2} \\ K_1 &= \frac{-W_1 - C_1 K_3 - B_1 K_2}{A_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots(23)$$

未知数函数之中誤差計算公式之推导，与本文二节所叙述之推导方法相同。

取上述之“測量平差法”一書中之未知数函数中誤差公式：

$$m_F^2 = m^2 \left\{ (ff) - \left(\frac{[af]^2}{[aa]} + \frac{[bf \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \dots\dots \right) \right\} \dots\dots(24)$$

引用下列符号：

$$\left. \begin{aligned} \frac{[af]}{A_1} &= \phi_1 \\ \frac{[bf] - B_1 \phi_1}{B_2} &= \phi_2 \\ \frac{[cf] - C_1 \phi_1 - C_2 \phi_2}{C_3} &= \phi_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots(25)$$

則得未知数函数中誤差計算公式：

$$m_F^2 = m^2 \left\{ (ff) - (\phi\phi) \right\} \dots\dots(26)$$

四、法方程式解算的檢核計算

取法方程式中之系数及常数項，并用下列符号

表示；

$$\left. \begin{aligned} [aa] + [ab] + [ac] + [al] + f_1 &= [as] \\ [ab] + [bb] + [bc] + [bl] + f_2 &= [bs] \\ [ac] + [bc] + [cc] + [cl] + f_3 &= [cs] \end{aligned} \right\} \dots\dots(27)$$

为了檢核法方程式的解算，用方程式(27)在依次約化法方程式时，进行檢核其系数。

按一节叙述之步骤进行約化，并引用下列符号：

$$\left. \begin{aligned} \frac{[as]}{A_1} &= S_1 \\ \frac{[bs] - B_1 S_1}{B_2} &= S_2 \\ \frac{[cs] - C_1 S_1 - C_2 S_2}{C_3} &= S_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots(28)$$

則得(27)式的約化式：

$$\left. \begin{aligned} A_1 + B_1 + C_1 + L_1 + F_1 &= S_1 \\ B_2 + C_2 + L_2 + F_2 &= S_2 \\ C_3 + L_3 + F_3 &= S_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots(29)$$

亦可利用求最或然誤差平方和进行最后的檢核計算。

按前述引証未知数函数中誤差規則，則得：

$$[vv] = [ll] - [LL] \dots\dots(30)$$

五、解算格式

法方程式的解算全部以表1之格式进行，并以表

2作为計算实例：

新克拉考夫解算格式

表1

x	y	z	l	f	s
[aa]	[ab]	[ac]	[al]	f ₁	S ₁
	[bb]	[bc]	[bl]	f ₂	S ₂
		[cc]	[cl]	f ₃	S ₃
$A_1 = \sqrt{[aa]}$	$B_1 = \frac{[ab]}{A_1}$	$C_1 = \frac{[ac]}{A_1}$	$L_1 = \frac{[al]}{A_1}$	$F_1 = \frac{f_1}{A_1}$	$S_1 = \frac{S_1}{A_1}$
	$B_2 = \sqrt{[bb] - B_1^2}$	$C_2 = \frac{[bc] - B_1 C_1}{B_2}$	$L_2 = \frac{[bl] - B_1 L_1}{B_2}$	$F_2 = \frac{f_2 - B_1 F_1}{B_2}$	$S_2 = \frac{S_2 - B_1 S_1}{B_2}$
		$C_3 = \sqrt{[cc] - C_1^2 - C_2^2}$	$L_3 = \frac{[cl] - C_1 L_1 - C_2 L_2}{C_3}$	$F_3 = \frac{f_3 - C_1 F_1 - C_2 F_2}{C_3}$	$S_3 = \frac{S_3 - C_1 S_1 - C_2 S_2}{C_3}$

$$\begin{aligned} [II] &= [VV] + [IL] & [VV] &= [II] - [IL] & \frac{1}{P_F} &= FF \\ x &= -\frac{L_1 + C_1 Z + B_1 y}{A_1}; & y &= -\frac{L_2 + C_2 Z}{B_2}; & z &= -\frac{L_3}{C_3} \end{aligned}$$

新克拉考夫解算格式算例

表 2

x	y	z	u	l	f	s	檢 核
+3.00	+0.39 +2.53	-0.28 +0.20 +1.08	-0.26 -0.17 +0.29 +0.60	+3.36 +3.34 -7.62 +2.99	-1 0 +1 0	+5.21 +6.29 -5.53 +3.45	
+1.732	+0.225 +1.575	-0.162 +0.150 +1.015	-0.150 -0.087 +0.275 +0.703	+1.940 +1.843 -7.470 +7.817	-0.577 -0.082 -0.881 -0.458	+3.008 +3.564 -5.298 +8.063	+3.008 +3.563 -5.299 +8.062

$$\begin{aligned} [II] &= 165.68 & [VV] &= +41.61 & \frac{1}{P_F} &= 1.325 \\ x &= -0.753 & y &= -2.772 & z &= +10.372 & u &= -11.119. \end{aligned}$$

由表 3 可看出新克拉考夫提出的計算格式，比高斯格式时，其数字的記載数目甚为簡捷。新格式在实际計算工作中的优点。当解算 n 个法方程

法方程式解算数字記載的数目比較

表 3

法方程式个数	按高斯完全格式記載数目	在新克拉考夫方法中記載数目	較 差
3	36	24	12
5	101	50	51
10	356	150	206
20	2416	500	1916
30	6876	1050	5826
50	29296	2750	24546
100	182096	10500	171596
150	619396	23250	596146
200	1435846	41000	1394846

(上接第32頁)

操作时首先踏动踏板(5)，使其上下运动，通过傳动帶(6)代动傳动軸(7)做往复轉动，使鋸片(8)也相应的隨着往复轉动。然后再用右手取浸湿过的砂粒(炭化砂砂輪粉)連續做間断地涂 抹 在鋸片(8)上。再用左手取划好形狀線的硬質合金 靠 紧 在鋸片

上，由于鋸片上存有砂粒，破坏了硬質合金結晶組織即可逐步完成切割作用。

在天气較冷时，应使盛有碳化砂砂輪粒鍋中水的溫度保持在 20~26°C 之間。在大量加工时可采用机械夾持，代替手工操作，以提高效率。