

水准測量偶然誤差和系統誤差計算公式介紹

华北分局 李述泌

水准測量中偶然誤差及系統誤差的計算是評定水准測量精度的主要因素。反之，要正確的評定水准測量的精度就必須計算出偶然的和系統性的誤差在水准測量中引起的影響。對於各等級的水准有不不同的要求，如三等水准要求每公里的偶然誤差不得超過 4.0 mm，系統誤差不超過 0.8 mm（1956 年大比例尺測量規範規定），但其計算方法可以一樣。

當然在水准測量中引起的偶然誤差和系統誤差是由許多因素組成的，如觀測者的人差、水准標尺的刻畫誤差、水准儀的水准管軸和視准軸的不平行，以及天氣自然因素等組成的。但引起這兩種誤差總的表現却是在於往返觀測不能嚴格閉合的觀測值差（或水准環的閉合差）上，當然這一觀測值差是不包含錯誤在內。所以我們為了要計算出這兩種誤差就必須從往返觀測值差來着手。

在一節長為 L 的水准路線上，我們經常把它分為若干段來進行觀測，每一段的中誤差和觀測值差有下之關係：

$$m_i = \frac{1}{2} \Delta_i \dots \dots \dots (1)$$

m_i 第 i 段之中誤差

Δ_i 第 i 段之往返觀測值差

由最小二乘法知偶然誤差和系統誤差有下之關係

$$m^2 = \delta^2 L + \textcircled{1}^2 L^2 \dots \dots \dots (2)$$

L 一節水准線路全長

m 水准測量之中誤差

δ 水准測量的偶然誤差

$\textcircled{1}$ 水准測量的系統誤差

上式也可寫成：

$$\delta^2 L = m^2 - \textcircled{1}^2 L^2 \dots \dots \dots (3)$$

由上所述 L 分為若干段來進行觀測，每段長為 $r_1, r_2, r_3 \dots r_n$ 。

$$\text{即 } L = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = (r) \dots \dots \dots (4)$$

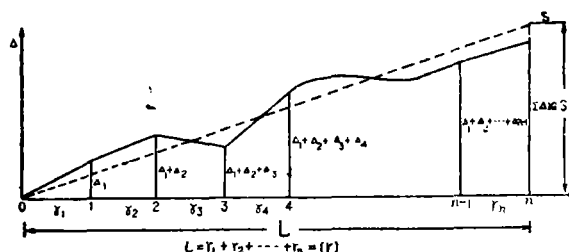
根據 (3) 的意義并顧及 (1) 的關係，則每一段的偶然誤差可寫成：

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 r_1 &= \frac{\Delta_1^2}{4} - \textcircled{1}^2 r_1^2 \\ \delta^2 r_2 &= \frac{\Delta_2^2}{4} - \textcircled{1}^2 r_2^2 \\ &\vdots \\ \delta^2 r_n &= \frac{\Delta_n^2}{4} - \textcircled{1}^2 r_n^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

由上式知要求偶然誤差 δ 必先求得系統誤差 $\textcircled{1}$ 。

$\textcircled{1}$ 是根據以下之推論求得的：

分作數段來觀測的長為 L 的水准路線，如果各段的觀測值差常為同一符號（正或負）出現時，就說明有系統誤差存在。要求此系統誤差可將各段的觀測值差累積起來，如下圖所示：



以起始水准點為原點，路線長 L 為橫座標軸，觀測值差 Δ 為縱座標軸，繪出各點并將各點用折線聯結起來。以上各觀測值差為：

$$\Delta_1, \Delta_1 + \Delta_2, \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \dots$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{n-1} + \Delta_n = \Sigma \Delta$$

假如沒有系統誤差存在，則折線將以橫軸為中線上下移動。因為有系統誤差存在，觀測值差符號相同，故折線乃如上图所示。

要求此系統誤差和路線長度之間的關係，可從原點引一直線（圖上用虛線表示者），此直線使之和折線相交上下包含的面積大致相等。此直線在 n 點處的縱座標為 S ，而原點到 n 點的橫座標為 L ，從而可得出下之關係式：

$$\frac{S}{L} \dots \dots \dots (6)$$

如 S 以公厘為單位， L 以公里為單位，(6) 就表示出每公里的系統誤差來。但 $S \approx \Sigma \Delta$ 故有時在實用上常

以 $\Sigma \Delta$ 代替 S 得:

$$\frac{\Sigma \Delta}{L} \dots \dots \dots (7)$$

但这一 $\Sigma \Delta$ 是由各段的往返观测值差求得的, 再由中误差原理即可写成下式:

$$\textcircled{8} = -\frac{1}{2} \frac{S}{L} \dots \dots \dots (8)$$

(8) 即是单节多段水准测量的每公里系统误差公式, 实用上也可写成:

$$\textcircled{8} = -\frac{1}{2} \frac{[\Delta]}{L}, [\Delta] = \Sigma \Delta$$

为了求出偶然误差, 顾及(3)的关系并把(5)组成相加得:

$$\delta^2(r_1 + r_2 + \dots + r_n) = \frac{[\Delta^2]}{4} - \textcircled{8}^2(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2)$$

$$\delta^2(r) = \frac{[\Delta^2]}{4} - \textcircled{8}^2(r^2)$$

$$\delta^2 = \frac{[\Delta^2]}{4(r)} - \textcircled{8}^2 \frac{[r^2]}{[r]}$$

将(8)中 $\textcircled{8}$ 之值代入上式即得:

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{[\Delta^2]}{4(r)} - \left(\frac{1}{2} \frac{S}{L} \right)^2 \frac{[r^2]}{[r]} \\ &= \frac{[\Delta^2]}{4(r)} - \frac{1}{4} \frac{[r^2]}{[r]} \cdot \frac{S^2}{L^2} \dots (9) \end{aligned}$$

由(4)知 $L = [r]$

$$\text{故} \quad \delta^2 = \frac{[\Delta^2]}{4L} - \frac{[r^2]}{4L^3} \cdot S^2 \dots \dots (10)$$

(10) 式中 r, L 以公里为单位 S 及 Δ 以公厘为单位表示单节多段水准测量的每公里偶然误差。

如果水准路线很长分为若干节, 每节又分为若干段来进行观测, 每节长为 L 。则由于线路较长, 故求得的系统误差也将愈可靠。故此, 可以 L 为权而求 $\textcircled{8}^2$ 的不等权算术平均值。

$$\text{由(8)} \quad \textcircled{8}^2 = \left\{ \frac{1}{2} \frac{S}{L} \right\}^2$$

$$\text{从而} \quad \textcircled{8}^2 = \frac{1}{4} \frac{S^2}{L^2}$$

为求算术平均值:

$$\textcircled{8}^2 = \frac{\frac{1}{4} \frac{S_1^2}{L_1^2} L_1 + \frac{1}{4} \frac{S_2^2}{L_2^2} L_2 + \dots + \frac{1}{4} \frac{S_n^2}{L_n^2} L_n}{L_1 + L_2 + \dots + L_n} \dots (11)$$

上式即是多节的系统误差, 简化为下式

$$\textcircled{8}^2 = \frac{1}{4} \frac{\left[\frac{S^2}{L} \right]}{[L]} = \frac{1}{4} \frac{[S^2]}{[L]} \dots (12)$$

为求偶然误差, 并顾及(5)组成相加的关系式, 从而:

$$\delta^2(r) = \frac{[\Delta^2]}{4} - \textcircled{8}^2(r^2)$$

把(12)的 $\textcircled{8}^2$ 代入得:

$$\delta^2(r) = \frac{[\Delta^2]}{4} - \frac{1}{4} \frac{\left[\frac{S^2}{L} \right]}{[L]} (r^2) \dots (13)$$

因为每节水准路线 L 都是分为 r 段观测的, 所以在全线上 $[L]$ 即是由各节 r 段组成的总和, 故 $[L] = [r]$ 。

由是(13)改写成:

$$\delta^2 = \frac{[\Delta^2]}{4[r]} - \frac{1}{4} \frac{[r^2]}{[L][r]} \cdot \left[\frac{S^2}{L} \right]$$

$$\delta^2 = \frac{[\Delta^2]}{4[L]} - \frac{1}{4} \frac{[r^2]}{[L]^2} \cdot \left[\frac{S^2}{L} \right]$$

$$\delta^2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{[\Delta^2]}{[L]} - \frac{[r^2]}{[L]^2} \cdot \left[\frac{S^2}{L} \right] \right\} \dots \dots (14)$$

(14) 即是多节水准路线的每公里偶然误差, 单位如上所述 L 以公里为单位, Δ, S 以公厘为单位。但应注意 $[r^2] \neq [L]^2$ 。

上述的(12)及(14)式, 即为计算 1 公里线长之偶然误差和系统中误差有名的拉列曼公式。

各式总结如下:

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{8} &= \frac{S}{L} \\ \delta &= \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{4L} - \frac{[r^2]}{4L^3} S^2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{单节多段系统及偶然} \\ \text{误差} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{8}^2 &= \frac{1}{4} \frac{[S^2]}{[L]} \\ \delta^2 &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{[\Delta^2]}{[L]} - \frac{[r^2]}{[L]^2} \left[\frac{S^2}{L} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{多节的系统误差及} \\ \text{偶然误差} \end{array}$$