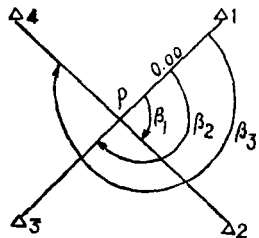


計算后方交会點座標的簡便公式和計算格式

程 仲 华

后方交会解析点是作图极点，导线测量与三角网的联系点，和小比例尺测图的四等点的方法之一。它只要在已佈有控制网的适当地区，将仪器放在选定的未知点上，向几个已知点观测方向或角度，就可根据所测的方向或角度和有关的几个已知点的坐标，标出该点的坐标来。苏联测量方面认为这是一种联系控制点到主网最方便的方法。因此，他们在开始作地形测图之前，用后方交会测定解析点，将佔全部控制点的 75%，可见，他们是如何的广泛采用。虽然我们目前的大比例尺测图规范，在作图根测量时，也有这种方法的規定，但是，实际工作中，却极少采用。究其原因，可能是：1，大多数的测量教本，没有載后方交会定点的簡便計算公式；用計算尺来解算，又早已过时；在計算工作中采用座标平差，总感到計算工作繁重；2，一般書上很少載后方交会点的精度預計公式，怕选择测站和观测的已知点不当，降低了測量成果的精度。在少数書上（如 A. C. 契巴塔廖夫教授著的測量学）虽載有后方交会点的精度估計公式，但計算量亦大，令人感到使用不便，因此就不为人所願用，对提高測量工作效率来说，多少是受了一些阻碍。H. H. 可列司里可夫在苏联「測量与繪图」杂志 1957 年第 2 卷上，曾介紹了一种計算后方交会座标最簡便的公式，并把中間記錄減少到极少。这样一来，就使其計算量不算繁重，若遇未知点选到精度难以确信的地区，再用「地質与勘探」杂志 1957 年第 3 期所載「用图解法估計后方交会定点的精度」



的方法估計，就可不用繁重公式来判断所选的地区，或观测的已知点是否合适了。

下面談談 H. H. 可列司里可夫和 A. C. 契巴塔廖夫教授所論述的最簡便的計算方法。如上图：1，2，3，4 为已知座标点。P 为所求的座标点。

1) 根据公式：

$$\lg a_1 = \frac{(y_2 - y_1) \cot \beta_1 + (y_1 - y_3) \cot \beta_2 + x_3 - x_2}{(x_2 - x_1) \cot \beta_1 + (x_1 - x_3) \cot \beta_2 + y_2 - y_3} \quad (1)$$

求出 a_1 角、(即 P 1 線的方位角)

2) 根据 a_1 利用公式

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + \beta_1, & a_3 &= a_1 + \beta_2, \\ a_4 &= a_1 + \beta_3. \end{aligned} \quad (2)$$

算出 2—P, 3—P, 4—P 線的方位角 a_2, a_3, a_4 。

3) 再根据算得的 a_1, a_2 ，可以用下列公式算得所求点的座标

$$x_p = \frac{x_1 \lg a_1 - x_2 \lg a_2 - y_1 + y_2}{\lg a_1 - \lg a_2} \quad (3)$$

$$y_p = (x_p - x_1) \lg a_1 + y_1 = (x_p - x_2) \lg a_2 + y_2$$

同样用 a_3 和 a_4 利用上面的公式来算 x_p 和 y_p

来作檢查，或用公式 $\lg a_i = \frac{y_i - y_p}{x_i - x_p}$ 作檢查。

这种方法若以苏联 1953 年出版的矿山測量手册 512~513 頁表格，并附算例应为附表 1。

H. H. 可列司里可夫提出的簡便記錄方法，是将已知点按順时針方向編号（如上图），所有的計算工作用計算机进行。按公式 (1) 算 $\lg a_1$ ，先計算分母，并将它記錄下来，后算出分子，不必記下，立即用算出的分母去除，所得的商，根据三角函数表的正切銳角函数，找出 $\lg a_1$ ，算分子和分母时，座标差和三角函数的乘积，可以不必記錄用連乘連加減得到。

本来用三已知点作后方交会就可以求出所求点的座标来。为了得到檢查和提高精度，大比例尺測量规范規定取用的已知点作后方交会不得少于四点。如取四点，就有四个方向，选择最有利的三个方向（如 1，2，3 点），来計算交会点的座标，按 3 和 4 点再用公式 (3) 来計算檢查座标，取它們的平均数，就可当为最后的座标了。照理采用三四个方向来求交会点的座标，会产生平差的問題，但是拿求出的点当图解解析点来说，因为要求精度不高，用不着花很大的劳力去进行平差，以求得最或是值的。

根据上面的叙述，我們可以設計成如附表 2 的計算格式，并填以同表 1 的算例得附表 2。

比較一二兩表很易看出，第二表比第一表記錄数減少了几乎达到三分之二，（第二表仅記 29 个数据，而第一个表要記 85 个数据），两个表計算的不同，只是用在檢查方面，第一表是用算出的方向来檢驗，第二表是用計算出未知点的座标来檢驗，后者还可以用来取平均数，它与前者相比，并无逊色。由此不难看出第二表使用的价值了。

表 1

$\lg a_1 = \frac{(y_2 - y_1) \cot \beta_1 (y_1 - y_2) \cot \beta_2 + (x_2 - x_1) \cot \beta_2}{(x_2 - x_1) \cot \beta_1 + (y_1 - y_2) \cot \beta_2} = \frac{\Sigma y}{\Sigma x}$					$x_p - x_s = \frac{(x_1 - x_2) \lg a_1 - (y_1 - y_2) \lg a_2}{\lg a_1 - \lg a_2} = \frac{A}{K}$					$\lg a_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$				
1	β_1	19°02'45"	2	β_2	67°00'40"	37	$x_1 - x_2$	125.75	62	y_2	6549.71			
3	$\cot \beta_1$	2.896681	4	$\cot \beta_2$	0.421246	38	$\lg a_1$	-3.623750	63	x_p	5920.75			
5	y_2	6519.71	14	x_2	6308.35	39	$\lg a_2$	-0.132748	66	$x_p - y_p$	628.96			
7	y_1	7147.06	15	x_1	6401.96	40	K	-3.491002	67	x_2	6308.53			
17	$y_2 - y_1$	-597.35	22	$x_2 - x_1$	-93.43	41	$(x_1 - x_2) \lg a_1$	-455.69	68	x_p	6740.37			
18	$(y_2 - y_1) \cot \beta_1$	-1730.33	23	$(x_2 - x_1) \cot \beta_1$	-270.64	42	$(x_1 - x_2) \lg a_2$	-16.68	71	$x_p - x_p$	-431.84			
8	y_1	7147.06	16	x_1	6401.96	43	$y_1 - y_2$	1164.70	72	$\lg a_2$	-1.456465			
9	y_2	5982.36	12	x_2	6276.21	44	A	-1620.39	73	a_2	142°28'25"			
19	$(y_1 - y_2)$	1164.70	24	$x_1 - x_2$	125.75	45	β	-1181.38		$\lg a_3 = \frac{y_2 - y_p}{x_2 - x_p}$				
20	$(y_1 - x_2) \cot \beta_2$	494.12	25	$(x_1 - x_2) \cot \beta_2$	53.35	46	$x_p - x_2$	464.16	74	y_2	5982.36			
11	x_2	6276.21	10	y_2	5982.36	47	$x_p - x_1$	388.41	64	y_p	5920.75			
13	x_1	6308.53	6	y_1	6549.71				75	$y_2 - y_p$	61.61			
21	$x_2 - x_1$	-32.32	26	$y_2 - y_1$	-567.35				76	x_2	6276.21			
27	Σy	-1268.53	28	Σx	350.06				69	x_p	6740.37			
29	$\lg a_1$	-3.623750	30	a_1	105°25'40"				77	$x_2 - x_p$	-464.16			
			31	β_1	19°02'45"	48	$y_p - y_2 = (x_p - x_2) \lg a_2$	-61.62	78	$\lg a_2$	-0.132734			
			34	$a_2 = a_1 + \beta_1$	124°28'25"	49	$y_p - y_1 = (x_p - x_1) \lg a_1$	-1226.31	79	a_2	172°26'21"			
			32	β_2	67°00'40"	50	y_2	5982.36		$\lg a_4 = \frac{y_4 - y_p}{x_4 - x_p}$				
			35	$a_3 = a_1 + \beta_2$	172°26'20"	51	$p - y_2$	-61.62	80	y_4	5400.01			
			33	β_3	139°49'29"	52	y_p	5920.74	65	x_p	5920.75			
			36	$a_4 = a_1 + \beta_3$	245°15'09"	56	x_2	6276.21	81	$y_4 - y_p$	-520.74			
			86	a_4 方位角	245°14'03"	57	$x_p - x_2$	464.16	82	x_4	6500.13			
			87	a_4	1'06"	58	x_p	6740.37	70	x_p	6740.37			
			88	a_4 方位角	1'30"				83	$x_4 - x_p$	-240.37			
									84	$\lg a_4$	2.167582			
									85	a_4	245°14'03"			

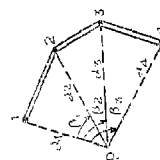
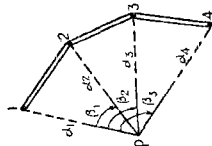
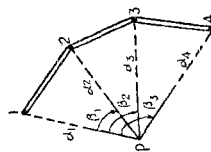


表 2

点	点号	座 (m)		标	β_i	$\cot \beta_i$	a_i	$\lg a_i$	$\lg a_1 - \lg a_2$	
		x	y						$\lg a_3 - \lg a_4$	
已知	1	6401.96	7147.06				1	105°25' 40"	-3.623750	-2.167304
	2	6308.53	6549.71	1	19°02' 45"	2.896681	2	124°28' 25"	-1.456446	
	3	6276.21	5982.36	2	67°00' 40"	0.424246	3	172°26' 2"	-0.132737	-2.300495
	4	6500.13	5400.01	M		350.06	4	245°14' 09"	+2.167758	
所求	P'	6740.36	5920.78	公式:						
检查 平均	P'	6740.35	5920.82	 1. $\lg a_1 = \frac{(y_2 - y_1) \cot \beta_1 - (y_3 - y_1) \cot \beta_2 + x_3 - x_2}{M}$ 2. $M = (x_2 - x_1) \cot \beta_1 - (x_3 - x_1) \cot \beta_2 - y_3 + y_2$ 3. $a_2 = a_1 + \beta_1 \quad a_3 = a_1 + \beta_2 \quad a_4 = a_1 + \beta_3$ 4. $x_p' = \frac{x_1 \lg a_1 - x_2 \lg a_2 - y_1 + y_2}{\lg a_1 - \lg a_2}$ $y_p' = (x_p - x_1) \lg a_1 + y_1$						
	P	6740.36	5920.80							

註: 检查点取 3, 4. 点仍用公式 4. 计算。

註: 检查点取 3、4, 点仍用公式 4, 计算。



公式:-

1. $\lg a_1 = \frac{(y_2 - y_1) \cot \beta_1 - (y_3 - y_1) \cot \beta_2 + x_3 - x_2}{M}$ 2. $M = (x_2 - x_1) \cot \beta_1 - (x_3 - x_1) \cot \beta_2 - y_3 + y_2$ 3. $a_2 = a_1 + \beta_1 \quad a_3 = a_1 + \beta_2 \quad a_4 = a_1 + \beta_3$ 4. $x_p' = \frac{x_1 \lg a_1 - x_2 \lg a_2 - y_1 + y_2}{\lg a_1 - \lg a_2}$ $y_p' = (x_p - x_1) \lg a_1 + y_1$